

Reseñas Bibliográficas

Serie OPERA PRIMA: **Trabajos de Educación Matemática**. Editado por la Sección de Matemática Educativa CINVESTAV, México.

La serie Ópera Prima: Trabajos de Educación Matemática, es el resultado de una cuidadosa selección de los trabajos de tesis de maestría en Matemática Educativa. Se reúnen aquí aquellos trabajos de investigación que puedan, por un lado, propiciar en el profesor de matemáticas una reflexión sobre su quehacer profesional, y por el otro, dar a conocer al investigador, o al futuro investigador, metodologías y resultados que fructifiquen en su propio trabajo.

Cada número de Ópera Prima presenta el primer trabajo sistemático de investigación del autor en turno. El Comité Editorial, cuando lo ha considerado conveniente, ha invitado al autor a revisar su obra a la luz de la experiencia acumulada.

Ópera Prima representa un esfuerzo para difundir el trabajo del investigador novel entre sus colegas, actuales y potenciales, y entre todos aquellos que estén vinculados a la Educación Matemática.

Hasta el momento, han aparecido tres números de Ópera Prima, que reseñaremos brevemente a continuación. Los lectores interesados en adquirir estas publicaciones pueden dirigirse a:

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional
Apartado Postal 14-740, México 07000, D.F.
At'n. Dra. Blanca M. Parra

ÓPERA PRIMA No. 1: ULLOA, José Ramón.
Razonamiento verbal y estructura formal del problema matemático, prólogo de Jesús Riestra. Sección de Matemática Educativa, CINVESTAV, México, 1988, 57 pp.

Esta obra se inscribe dentro de la corriente llamada de investigación experimental que tuvo su auge a finales de los setenta y que perse-

guía realizar estudios sistemáticos de los problemas educativos mediante el uso de métodos estadísticos. El trabajo de J.R. Ulloa, elaborado en 1979, se propone investigar el problema de determinar si existe una relación entre la habilidad de razonar verbalmente y la habilidad de captar la estructura formal de un problema matemático.

El autor adopta la definición de Krutetskii para la *habilidad de captar la estructura formal de un problema matemático* como aquella habilidad mediante la cual se abstrae la "forma matemática" de un material dado. El mismo Krutetskii sugiere la manera de "medir" esta habilidad, planteando al estudiante enunciados que encierren problemas matemáticos y determinando en qué medida el estudiante percibe en ellos la estructura matemática oculta.

Por otro lado, la *habilidad de razonamiento verbal*, la toma José Ramón Ulloa de los psicólogos Bennet, Seaschore y Wesman quienes la definen como la habilidad para comprender conceptos expresados en palabras, abstraer para generalizar y pensar en forma organizada. Los psicólogos mencionados han diseñado tests para medir esta habilidad, mismo que reproduce Ulloa en su investigación.

Una vez definidas estas habilidades y determinado el modo de medirlas, el autor se propone determinar el tipo de relación que hay entre ellas. Parte de hipótesis de que **un grado alto de la habilidad matemática corresponde a un grado alto de desarrollo de la habilidad verbal, mientras que, a un grado bajo de desarrollo de la habilidad verbal corresponde un grado bajo de desarrollo de la habilidad matemática.**

Para decidir si la hipótesis es correcta, el autor busca evidencia experimental aplicando los tests correspondientes a un grupo de 76 estudiantes del primer año de las carreras de ingeniería, filosofía y economía, cuyo promedio de edad es de 19 años.

A falta de un estadístico adecuado para detectar **implicación** entre variables. José Ramón Ulloa introduce un estadístico no paramétrico de su propia creación, al cual bautiza

como "relación parcial" y que le permite medir el grado en el que la tabla de contingencia de los datos obtenidos afirma o niega su hipótesis. Así mismo, se asegura que sus resultados no sean producto del azar, midiendo su nivel de significación.

A raíz de los resultados que obtiene en el experimento descrito, el autor propone un segundo experimento para determinar si la naturaleza del problema matemático modifica la relación entre las habilidades ya investigadas. En esta dirección se plantea el estudio sobre una diferencia entre los problemas geométricos y los problemas aritméticos y algebraicos. Su hipótesis para este segundo experimento resulta ser una ampliación de la hipótesis anterior: la habilidad de captar la estructura formal de un problema matemático depende de la habilidad de razonamiento verbal pero esta relación de dependencia es más fuerte en el caso de los problemas aritmético-algebraicos que en el de los problemas geométricos.

La obra que reseñamos tiene un doble mérito: por un lado arroja resultados interesantes en cuanto a la relación de dos habilidades, lo cual puede tener repercusiones en la didáctica: si logramos desarrollar en nuestros estudiantes un cierto grado de habilidad de razonamiento verbal, éstos tendrán menos dificultades para captar la estructura formal de un problema matemático.

Pero por otra parte, el trabajo de Ulloa es un ejemplo muy fino de la aplicación del método clásico de investigación experimental que, seguramente, será de gran utilidad para los investigadores en formación. La publicación contiene, además de la descripción detallada del tratamiento estadístico, una copia íntegra de los instrumentos utilizados.

Guillermina Waldegg
CINVESTAV - México

OPERA PRIMA No. 2: FREGONA, Dilma Gladis. *La adquisición del concepto de número, prólogo de Shirley Bromberg. Sección de Matemática Educativa, CINVESTAV, México, 1989, 125 pp.*

El trabajo de Dilma Fregona es el primero de una serie de estudios sobre la enseñanza de la aritmética en la escuela primaria. Se trata de una investigación de tipo clínico cuyo objetivo es detectar las habilidades operatorias aritméticas que la escuela ha desarrollado en los alumnos.

Ante las preguntas de si a los niños les queda algo del trabajo realizado, de si pueden usar las nociones "aprendidas" en situa-

ciones diferentes, Fregona propone dos situaciones (una convencional, la otra no convencional) a un grupo de niños de 1° a 6° año de una escuela primaria, en entrevistas a equipos de dos alumnos cada vez.

En la primera parte de este trabajo, la autora hace un análisis de las metodologías y contenidos de la propuesta didáctica vehiculada a través de los textos gratuitos de matemáticas para la escuela primaria. El examen cuidadoso de las situaciones presentadas a los alumnos pone de manifiesto la pobreza de la concepción de la aritmética, por una parte, y la de la concepción didáctica, por la otra.

En efecto, Dilma Fregona señala que es la concepción instrumental de la matemática la que se refleja en la enseñanza; esto es, la aritmética y de su aprendizaje en la que el su-
ra resolver problemas (por lo demás estereotipados y triviales), despojándola de los aspectos lúdicos que constituyen el encanto de esta rama de la matemática.

Pero aún con esta concepción, se advierte en la propuesta un tratamiento desigual para cada una de las operaciones con naturales, siendo la suma la operación privilegiada. El tratamiento y el tiempo concedidos a presentar la noción de suma, comparado con los correspondientes para la resta, la multiplicación y la división, muestran su importancia cuando se constata que la única operación verdaderamente constituida en los alumnos, aún en los de sexto año, es la suma.

Por otra parte, el análisis muestra también que el tipo de problemas propuestos a los alumnos es reflejo de una concepción de la matemática y de su aprendizaje en la que el sujeto no participa en la elaboración de su conocimiento; de ahí que no se espere que los alumnos enfrenten los problemas como tales sino como situaciones para reproducir comportamientos aprendidos en clase.

La situación no convencional propuesta a los alumnos, y que corresponde al título original del trabajo *¿Cuántos frijoles hay en un kilo?*, pone de manifiesto algunas de las fallas de la enseñanza.

Fundamentalmente, lo que apuntábamos antes en el sentido de que la única operación constituida como tal en los alumnos es la suma, a la que recurren para resolver tareas reiterativas donde la multiplicación sería realmente un procedimiento de resolución. Esto es, la suma prevalece en el procedimiento de resolución de una situación nueva y con un rango de números que supera el dominio escolar.

Para la multiplicación, es posible distinguir dos niveles de uso el de resolución de problema y el de economía algorítmica; el primero es utilizado frente a la situación conven-

Reseña de paquetes de software

Introducción

El objetivo fundamental de este trabajo es hacer una breve reseña de algunas experiencias prácticas que hemos tenido en el uso de técnicas de Inteligencia Artificial aplicadas a la enseñanza de las matemáticas en particular con el lenguaje muLISP y los paquetes muMATH y Mathematica.

Estas aplicaciones han sido desarrolladas desde 1987 a la fecha, inicialmente en la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la UANL, y desde 1989 en el Centro de Inteligencia Artificial del Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey, como parte del proyecto TUIN (Tutores INteligentes) de dicho centro.

Inteligencia artificial y sistemas expertos

El término inteligencia artificial (IA) se usa para referirse a la habilidad de una computadora para realizar tareas de las que es capaz la inteligencia del ser humano, tareas como razonamiento y aprendizaje.

Los sistemas expertos son un intento de reproducir algunos razonamientos humanos y procesos de toma de decisiones en un sistema de cómputo. Los sistemas expertos están hechos de tres elementos: una base de conocimiento, una base de reglas, y un intérprete de reglas.

Las computadoras en la educación

Las computadoras han sido usadas en educación desde hace unos 25 años contribuyendo a actividades tales como:

- Entrenamiento de estudiantes en su programación.
- Auxilio a estudiantes para descubrir estrategias para resolver problemas que son aplicables a situaciones no computacionales.
- Juegos educativos.
- Instrucción personalizada CAI (Computer-Assisted Instruction).

Frame-Based CAI

Los primeros programas CAI esencialmente imitaban material instruccional previo, tal como un texto de instrucción programada, la técnica CAI basada en instrucción programada es conocida como frame-based CAI. En frame-based CAI el estudiante responde a problemas presentados por un computador. Muchos de estos programas han sido ya desarrollados, sin embargo la gran mayoría de ellos simplemente usan la computadora como un rotafolio electrónico subutilizando el enorme poder de la computadora en el proceso instruccional.

Programas ICAI

Añadiendo técnicas de IA a CAI se obtiene un nuevo y efectivo sistema de instrucción llamado Intelligent Computer-Assisted Instruction que analiza la actuación de un estudiante a fin de desarrollar estrategias de tutorio individual.

Siguiendo a Begenbaum, Ferstein (1985), los principales componentes de un sistema ICAI son:

- Módulo Experto.
- Módulo del Estudiante.
- Módulo de Tutorio.

Módulo Experto

Contiene el conocimiento que el sistema intenta impartir al estudiante.

Módulo del Estudiante

Analiza la actuación del estudiante ante un cierto material, buscando la causa del problema o problemas que puede tener un estudiante para aprender un material dado usando para ello un esquema de los patrones de respuesta del estudiante identificando aquellos conceptos equivocados del estudiante y "descubriendo" las causas del razonamiento erróneo.

Módulo de Tutorio

Una vez que el módulo del estudiante ha determinado las causas del problema de un estudiante, el módulo de tutorio de un ICAI selecciona estrategias para dar información tutorial al estudiante.

Herramientas para el desarrollo de software en IA

Editores

Programas que auxilian al programador a dar un programa al computador.

Debuggers

Programas que auxilian al programador en la detección y corrección de errores.

Lenguajes

Permiten la comunicación hombre-máquina.

De estas herramientas detallaremos un poco acerca de los lenguajes así como de algunos sistemas que para la manipulación simbólica han sido desarrollados, particularmente hablaremos de:

- Lenguaje LISP.
- *Sistemas muMATH y Mathematica.*

El lenguaje LISP

LISP (LIS^t Programming) es el lenguaje de programación hegemónico en IA, fue desarrollado por John McCarthy cuando no encontró un lenguaje que le permitiera escribir un programa que el llamaba *Advice taker* en el que se proponía usar las técnicas de la lógica formal matemática para hacer deducciones y exhibir un cierto sentido común.

muMATH

muMATH se desarrolló para brindar un cómputo algebraico de propósito general de mayor disponibilidad para cualquier tipo de usuario. El sistema es interactivo y permite crear nuevas funciones a través de un lenguaje llamado muSIMP (derivado de LISP) por lo cual se puede expandir.

Las capacidades matemáticas de los lenguajes de programación tradicionales son esencialmente limitadas a operaciones aritméticas. En contraste con muMATH es posible evaluar y simplificar fórmulas cuyo contenido sean variables a las que no se les ha asignado un valor numérico previamente. Tales variables son manejadas algebraicamente como cualquier matemático lo haría.

Mathematica

Mathematica es un sistema general para hacer matemática computacional. Prove de un medio ambiente para instalar, correr y documentar cálculos y programas, permite además hacer interface con la mayoría de los lenguajes y medios ambientes que corren bajo UNIX.

Mathematica representa una síntesis de diferentes tipos de software:

- lenguajes interactivos tipo BASIC
- lenguajes estructurados como C o PASCAL
- sistemas interactivos como MathCAD o Matlab
- sistemas algebraicos como MACSYMA o REDUCE
- lenguajes de manipulación simbólica como LISP
- gráficos del tipo PostScript

Sobre todo Mathematica es un sistema para representación del conocimiento matemático.

Descripción de trabajos

Reseñamos ahora algunos de los trabajos que hemos realizado utilizando LISP, muMATH y Mathematica, estos son los siguientes:

- Graficador de funciones
- Ecuaciones diferenciales y grupos de Lie
- MacDiff

Graficador de funciones

Se trata de un programa escrito en LISP para graficar funciones el cual permite hacer lo siguiente.

- obtener la primera y segunda derivada simbólica de funciones algebraicas o trascendentales
- graficar en una misma pantalla (o diferentes) la función así como su primera y segunda derivada
- graficar una familia de curvas

Este programa fue desarrollado para servir de apoyo al curso de Cálculo Diferencial de nivel ingeniería, en lo que respecta a temas como: funciones crecientes y decrecientes, concavidad, extremos relativos.

Ecuaciones Diferenciales y Grupos de Lie

Es un sistema que dada una ecuación diferencial no lineal de primer orden permite obtener un cambio de variable para dar a la ecuación diferencial la forma de variables separables. Para hacer esto se parte de un grupo uniparamétrico de funciones y se estudian las condiciones bajo las cuales una cierta ecuación diferencial ordinaria es invariante bajo el grupo.

Este sistema se desarrolló bajo muMATH y fue presentado en el congreso de la Sociedad Matemática Mexicana en noviembre de 1988.

MacDiff

Se trata de un módulo experto para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias escrito en el lenguaje de Mathematica que corre en Macintosh II y en la Next. Este sistema puede:

- resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden del tipo, variables separables, términos homogéneos, exactas, lineal y Bernoulli.
- resolver ecuaciones diferenciales lineales de orden mayor o igual que dos, homogéneas y de coeficientes constantes.
- resolver ecuaciones de Cauchy-Euler.
- graficar, isoclinas, trayectorias ortogonales, y curvas solución.

Proyectos en desarrollo

Actualmente y bajo los auspicios del Centro de Inteligencia Artificial del ITESM se encuentran en desarrollo módulos expertos para:

- Análisis Gráfico
- Series de Fourier.

Así como el módulo del estudiante para MacDiff.

Éstos al igual que MacDiff están orientados a brindar apoyo a los cursos de matemáticas que

se imparten en las licenciaturas e ingenierías del ITESM.

Conclusiones

Si bien el trabajo está en sus primeras etapas los resultados obtenidos hasta ahora nos dan una medida de la factibilidad del diseño de sistemas expertos para la enseñanza de las matemáticas.

De igual manera la buena aceptación que estos proyectos han tenido en la comunidad estudiantil permite vislumbrar un futuro prometedor para esta área, ciertamente aún hay mucho por hacer pero las expectativas de éxito son (a nuestro entender) bastante buenas.

Referencias

- ARROYO V., Ana.** Análisis de un Sistema Experto para la Educación. Tesis de Maestría. ITESM, Campus Monterrey, Noviembre 1986.
- BEGENBAUM H., Feistein E.** Encyclopedia of Computer Science Xerox. Palo Alto, Calif. 1985.
- WINSTON P., HORN B.** LISP second edition. Addison Wesley, Massachusetts, 1984.
- WOLFRAM et all.** Mathematica. Addison Wesley, Massachusetts, 1989.

M. en C. Rodrigo González R.
Centro de Inteligencia Artificial. ITESM

M. en C. Eduardo Uresti Ch.
Centro de Inteligencia Artificial. ITESM

La influencia de computadoras e informática sobre la matemática y su enseñanza

ICMI Study Series, 1985

Este primer estudio del ICMI está dedicado a dos temas:

- ¿Cómo influyen las computadoras en ideas y valores matemáticos y el avance de esta ciencia?
- ¿Qué impacto tiene la computadora en los currícula y la enseñanza de la matemática?

El impacto de la computadora sobre la matemática:

Con respecto al tema a) se afirma que los conceptos matemáticos, p. eje., número real o función siempre han dependido de métodos de cálculos y métodos de escritura o representación. Las computadoras ofrecen nuevas maneras de escritura y de cálculo y permiten ver las ideas más tradicionales desde una nueva perspectiva.

Las áreas nuevas o descubiertas nuevamente para la investigación en matemáticas incluye ecuaciones no lineales de ondas, trabajos relacionados con funciones de Weierstrass, Takagi y la función singular de Lebesgue. Las computadoras tienen también un impacto en la teoría de grupos, combinatoria, teoría de números, geometría y análisis matemático, para mencionar las más importantes.

La idea de la demostración matemática como una cadena de deducciones a partir de los axiomas, ha sido afectada por las computadoras que a veces sugieren resultados que luego se prueban o que han realizado demostraciones como en caso del teorema de los cuatro colores. A veces se generan contraejemplos con la computadora y se refutan conjeturas.

Demostraciones por computadoras a veces se critican porque se basan en "la fuerza bruta" p. eje., un análisis exhaustivo de todos los casos, pero este método puede generar sistemas expertos que hacen matemáticas para cumplir el sueño de Leibniz de una máquina calculadora racional.

Algunas ramas de la matemática siempre han estado abiertas a la experimentación la cual es más factible con computadoras. Los experimentos llevan a conjeturas y a veces a teoremas. En estadística, por ejemplo, la experimentación puede hacerse a través de simulaciones o análisis exploratorio de datos.

El interés en métodos iterativos ha sido revivido por las computadoras y se obtuvieron resultados fascinantes, como p. eje., la teoría de los fractales. La necesidad de encontrar algoritmos económicos para la programación de computadoras ha llevado a la teoría de las complejidades. La existencia de paquetes simbólicos alivia el trabajo "pesado" para los matemáticos y los anima a atacar problemas considerados inaccesibles.

El impacto de la computadora sobre el currículo matemático y su enseñanza:

En el tema b) se discute el currículo matemático y la enseñanza de la matemática preuniversitaria y universitaria. Las ramas usuales de la matemática en la escuela preparatoria son álgebra, geometría, trigonometría e introducción al cálculo, como temas nuevos a veces se ofrecen probabilidad y estadística y matemáticas discretas.

En la universidad a nivel licenciatura, el cálculo ha sido la materia central, también álgebra lineal es importante, al igual que análisis numérico y matemáticas discretas. El efecto de

la computadora sobre este currículo es metodológico y de contenido. En cuanto a contenidos se necesitarán más tópicos de matemáticas discretas y lógica para apoyar el área de informática y lógica, de punto de vista metodológico hay que tomar en cuenta paquetes simbólicos y gráficos que permiten cambiar el enfoque didáctico y poner menos énfasis en manipulaciones mecánicas sino al desarrollo de conceptos que se pueden descubrir y explorar con la ayuda de las computadoras.

Conclusiones

Ya se ha mencionado que la computadora puede conducirnos a cambiar nuestro punto de vista acerca de la matemática y la actividad del matemático. El aspecto experimental en matemáticas es más prominente y los alumnos deben desarrollar habilidades como observar, explorar, formar nociones e intuiciones, predecir, probar hipótesis, conducir estas pruebas, controlar variables, simular, etc. Pero no hay que descuidar actividades matemáticas tradicionales como demostrar, generalizar y abstraer.

Las computadoras pueden cambiar la relación entre estudiantes y alumnos ya que éstas permiten al alumno ser cognitivamente activo en matemáticas. Se presentan muchos ejemplos en el estudio de ICMI que ilustran como lograr esta actividad matemática. La computadora puede ser auxiliar didáctico del maestro como pizarrón electrónico dentro del esquema tradicional cátedra-ejemplos-tarea-examen o bien el alumno interactúa con la computadora y se llega a una estructura proyecto-interacción entre alumno, máquina y profesor. Esto producirá una "revolución" en muchos salones de clase ya que tendría que cambiar la metodología y

las metas de la enseñanza y la evaluación del aprendizaje.

La computadora puede ser útil para detectar errores de los alumnos y motivarlos para intensificar su actividad matemática. La disponibilidad de software matemático es satisfactoria. Básicamente hay sistemas sofisticados de manipulación simbólica, paquetes menos completos para visualización, simulación, exploración, resolución de problemas y lenguajes de programación.

Es importante notar que el uso razonable de computadoras requiere software con un buen estándar educativo cuya integración al currículo debe coordinarse con programas de actualización de los profesores para lo cual se necesita recursos financieros. Peligros de un uso indiscriminado de computadoras que requieren más investigación pueden ser una uniformización de pensamiento matemático de los alumnos y la falta de diálogo entre alumnos y profesores.

Se concluye el estudio del ICMI con la afirmación que estamos recién empezando a sentir el impacto de la computadora sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Muchas aplicaciones de la computadora en la educación aprovechan el aspecto dinámico del despliegue en la pantalla. La contribución de la computadora es la de una ayuda para cálculos, para demostraciones y para desarrollar ideas, poniendo énfasis en métodos numéricos y el estudio de algoritmos. La computadora per se no mejora la enseñanza, tenemos que aprender de aprovecharla al máximo.

Elfriede Wenzelburger G.
Maestría en Educación en Matemáticas

Educación Matemática

es una publicación que surge de la necesidad y el interés de varios sectores de la comunidad educativa de México, por tener un medio de comunicación adecuado y continuo para difundir ampliamente reflexiones, sugerencias didácticas, ensayos y reportes de investigación en torno a los aspectos de la Educación Matemática, propiciando su conocimiento, discusión y estudio para contribuir así, en forma significativa, al mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en los diferentes niveles educativos, tanto de nuestro país como del resto de Latinoamérica.

NO SE PIERDA DE NINGUN NUMERO DE LA REVISTA.