NOTAS DE CLASE

Derivando con la calculadora

Introducción

La modernización de la enseñanza, y en particular de la enseñanza de las matemáticas, es un proceso que se desarrolla fundamentalmente en dos frentes: en el plano de la modernización de los contenidos (mejoramiento de los diseños curriculares) y en el de la modernización de los procedimientos (perfeccionamiento de los recursos didácticos). Ambos aspectos, indudablemente, son de una gran importancia.

Por lo que respecta a los recursos didácticos, se entiende principalmente el empleo de los más modernos y recientes adelantos tecnológicos: la computadora, los programas educativos de video, la calculadora. Por supuesto, cada uno de estos objetos ha atraído en mayor o menor medida la atención de los especialistas. El video, por su costo, continúa estando alejado de los grandes proyectos educativos. La computadora ya no es tan cara y empieza a ocupar un lugar importante entre los recursos didácticos. Sólo la calculadora parece encontrarse en una aparente indefinición.

Con la calculadora parece tener lugar una cierta situación paradójica. Actualmente, el mercado se encuentra prácticamente inundado de diversos modelos baratos de calculadoras, y en los salones de clase éstas siempre se encuentran presentes en un número considerable. Sin embargo, en los cursos de matemáticas las calculadoras continúan siendo ignoradas o, en el mejor de los casos, desestimadas.

El autor comparte la opinión de que aún no se ha dicho la última palabra sobre el empleo de la calculadora en los cursos de matemáticas [Moursund, 1985] y de que es todavía temprano para descartarlas del proceso educativo. Aún más, está convencido de que es posible aprovechar las calculadoras como recurso para agilizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas [Moursund, 1985; Dudnitzin et al, 1987]. El presente artículo intenta ser una ilustración al respecto.

La calculadora y los experimentos didácticos

El empleo de las calculadoras en el proceso docente permite realizar en la clase trabajos que requieren de una gran cantidad de cálculos. Bajo los métodos tradicionales, este tipo de acciones no resultan posibles. Una de tales formas de trabajo es la implementación de experimentos didácticos con el auxilio de la calculadora.

Ejemplo 1. En el curso de Cálculo Diferencial, al estudiar el tema "Las derivadas de las funciones trigonométricas" se hace necesario determinar el valor de los límites

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x}$$

M. en C. José Ramón Jiménez Rodríguez
Centro de Investigación y Docencia en Matemática Educativa
Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora

Tradicionalmente, en los manuales se da una demostración bastante compleja, no del todo intuitiva [Granville, Leithold, Ayres y otros]. Para los fines didácticos, podría ser más útil obtener el valor de tales límites mediante un experimento didáctico, el cual podría convencer a los estudiantes de manera elocuente de que dichos límites son iguales a 1 y 0 respectivamente.

Con el fin de realizar este experimento es necesario calcular una serie de valores para las funciones

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} \quad \text{y} \quad \frac{\cos x - 1}{x}.$$

Al realizar los cálculos hay que cercionarse de que la calculadora trabaje en el régimen de "RAD" (radianes). Para los modelos más sencillos de calculadoras de la marca *Casio* y sus análogos, todos estos cálculos pueden ejecutarse siguiendo respectivamente los algoritmos:

$$\boxed{x}\ \boxed{\text{sen}}\ \boxed{\div}\ \boxed{x}\ \boxed{=}$$

$$\boxed{x}\ \boxed{\cos}\ \boxed{-}\ \boxed{1}\ \boxed{=}\ \boxed{\div}\ \boxed{x}\ \boxed{=}$$

Los resultados correspondientes a estos experimentos se muestran en la Tabla 1.

TABLA 1

x	$\frac{\operatorname{sen} x}{x}$	$\frac{\cos x - 1}{x}$
1	0.8414709	−0.4596976
0.5	0.958851	−0.2448348
0.1	0.9983341	−0.0499583
0.01	0.9999833	−4.999955 −03
0.001	0.9999998	−5. −04
0.0001	1	−5.01 −05
0.00001	1	0

Este experimento, además de que conduce a obtener los resultados buscados, es también útil porque obliga a los estudiantes a poner atención en el régimen de trabajo de la calculadora (¡quien haga los cálculos en el régimen de "GRAD" obtendrá resultados diferentes!), y por lo mismo los hará recapacitar en que en las expresiones

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x}$$

se entiende que los ángulos se miden en radianes. Para los estudiantes débiles estos experimentos de hecho tienen mayor fuerza y valor que una demostración rigurosa.

Ejemplo 2. Igualmente, en el curso de Cálculo Diferencial, al estudiar el tema "La derivada de la función exponencial" es necesario evaluar el límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

En los manuales tradicionales generalmente se exponen demostraciones sumamente rigurosas [Leithold, Granville, Ayres y otros], poco accesibles para el estudiante medio. En este caso también resulta útil implementar un experimento didáctico con el auxilio de la calculadora. Para los modelos más sencillos de la marca *Casio* y sus análogos el algoritmo de cálculo es el que a continuación se indica:

$$\boxed{x}\ \boxed{\text{INV}}\ \boxed{e^x}\ \boxed{-}\ \boxed{1}\ \boxed{=}\ \boxed{\div}\ \boxed{x}\ \boxed{=}$$

Los resultados del experimento se reproducen en la Tabla 2.

TABLA 2

x	$\frac{e^x - 1}{x}$
1	1.7182818
0.5	1.2974425
0.1	1.0517092
0.01	1.0050167
0.001	1.0005
0.0001	1.00005
0.00001	1

Los estudiantes, luego de realizar esta serie de cálculos, llegan fácilmente a la conclusión correcta:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$$

Ejemplo 3. Análogamente, los experimentos didácticos con la calculadora podrían hacer más accesible para el estudiante la obtención de la fórmula para las funciones exponenciales:

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$$

Estos experimentos consistirían de dos partes. En la primera parte se estudiarían las derivadas de las funciones particulares 2^x, 3^x, 5^x, 10^x, ... Ello nos conduciría a tener que evaluar los límites:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2^{\Delta x} - 1}{\Delta x}, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3^{\Delta x} - 1}{\Delta x},$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{10^{\Delta x} - 1}{\Delta x}, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Todos estos límites se pueden evaluar con el auxilio de la calculadora mediante el siguiente "programa" estándar:

$\boxed{\text{base}}$ $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{x^y}$
$\boxed{\text{exponente}}$ $\boxed{=}$ $\boxed{-}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$
$\boxed{\div}$ $\boxed{\text{exponente}}$ $\boxed{=}$

Los estudiantes obtienen los resultados que se presentan en la Tabla 3. Enseguida el profesor tendría que auxiliar a los estudiantes a identificar los límites obtenidos con los logaritmos naturales de las bases correspondientes:

$\ln 2 = 0.693147$, $\quad \ln 3 = 1.0986123$,

$\ln 5 = 1.6094379$, $\quad \ln 10 = 2.30258$.

En base a estos resultados se esperaría que los estudiantes pudieran arribar fácilmente a la generalización

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \ln a$$

y por lo tanto a obtener fácilmente la fórmula

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a.$$

Ejemplo 4. Para finalizar, veamos el caso de la función logarítmica, y cómo la calculadora nos podría resultar útil.

Para obtener la fórmula para la derivada de la función $y = \ln x$ se hace necesario evaluar el límite.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x}$$

o lo que es lo mismo

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).}{\Delta x}$$

Al igual que en el caso anterior, para llegar a la fórmula general tendríamos que desarrollar un experimento en dos etapas. En la primera etapa se determinarían los límites particulares para $x = 1, 2, 3, 4, 5, 10$. En los modelos más simples de calculadoras de la marca *Casio* y en sus análogos esto se puede ejecutar con el siguiente "programa" estándar:

$\boxed{\Delta x}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{x}$ $\boxed{=}$ $\boxed{+}$ $\boxed{1}$
$\boxed{=}$ $\boxed{\ln}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\Delta x}$ $\boxed{=}$

Los estudiantes pueden obtener los siguientes resultados (Tabla 4).

TABLA 3

x	$\frac{2^x - 1}{x}$	$\frac{3^x - 1}{x}$	$\frac{5^x - 1}{x}$	$\frac{10^x - 1}{x}$
0.1	0.7177346	1.1612317	1.7461894	2.5892541
0.01	0.69555	1.1046692	1.6224591	2.3292992
0.001	0.6933874	1.0010992	1.6107337	2.305238
0.0001	0.693171	1.098672	1.609567	2.30285
0.00001	0.69314	1.09861	1.60945	2.30261

TABLA 4

Δx \ x	1	2	3	4	5
0.1	0.9531018	0.4879016	0.3278982	0.2469261	0.1980262
0.01	0.995033	0.4987541	0.332779	0.249688	0.1998002
0.001	0.9995003	0.499875	0.3332777	0.2499687	0.19998
0.0001	0.99995	0.4999875	0.3333274	0.2499968	0.199998
0.00001	0.999995	0.4999987	0.3333294	0.2499996	0.1999998
0.000001	0.9999995	0.4999998	0.3333329	0.2499999	0.1999999

A los estudiantes no les resulta muy difícil identificar enseguida los límites obtenidos:

$$1.0 \quad 0.5 \quad 0.3333333 \quad 0.25 \quad 0.2$$

o simplemente

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5}$$

Basándose en estos resultados, en la siguiente etapa es fácil generalizar

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x}$$

y por lo tanto establecer la fórmula

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}.$$

Observaciones

Todos los experimentos didácticos que se han señalado son susceptibles de realizarse en el salón de clase en el tiempo normal asignado para ésta. El profesor deberá organizar el trabajo de manera adecuada. En el caso de los experimentos en varias etapas, el trabajo puede ser distribuido por filas, por mesas de trabajo o por equipos. Enseguida se procede al análisis global de los resultados obtenidos por separado.

Observemos que en el caso de los experimentos propuestos el empleo de la calculadora se conjuga con un tratamiento intuitivo (no riguroso ni estrictamente matemático) del concepto de límite. El autor considera que ésto se corresponde más con la psicología del estudiante en la etapa inicial de estudio del Cálculo Diferencial.

Por último, es obvio que se pueden diseñar experimentos didácticos con el auxilio de la calculadora para abordar otros temas de los cursos de matemáticas.

Bibliografía

MOURSUND D.G. Uso de la calculadora en el salón de clase. **Editorial Limusa**. México. 1985.

DUDNITZIN Yu. P., PASHKOVA L.M., SYTINA T.L. El empleo de los recursos tecnológicos y audiovisuales en las clases de matemáticas. **Editorial "Vyschaya shkola"**. Moscú. 1987.