

La regla de Leibniz para diferenciar un producto: una prueba usando la regla de la cadena

Usualmente en los cursos de cálculo se obtienen las fórmulas para derivar sumas, productos y composiciones de funciones sin ver que estas fórmulas se pueden relacionar.

Si los estudiantes saben diferenciar x^2

$$1) (x^2)' = 2x$$

saben que la derivada es lineal, es decir

$$2) (kf)' = kf' \quad (k \text{ constante})$$

$$3) (f + g)' = f' + g'$$

y conocen la regla de la cadena

$$4) [g(f(x))]' = g'(f(x))f'(x)$$

es muy sencillo demostrar la regla de Leibniz para derivar el producto de funciones.

Demostración

Completa el producto de funciones fg a un cuadrado

$$f^2 + 2fg + g^2 = (f + g)^2.$$

Deriva ambos lados

$$2ff' + 2(fg)' + 2gg' = 2(f + g)(f' + g')$$

Cancelando y simplificando la expresión se obtiene

$$(fg)' = fg' + gf'.$$

Alfinio Flores Peñafiel
Centro de Investigación en
Matemáticas
CIMAT, Guanajuato