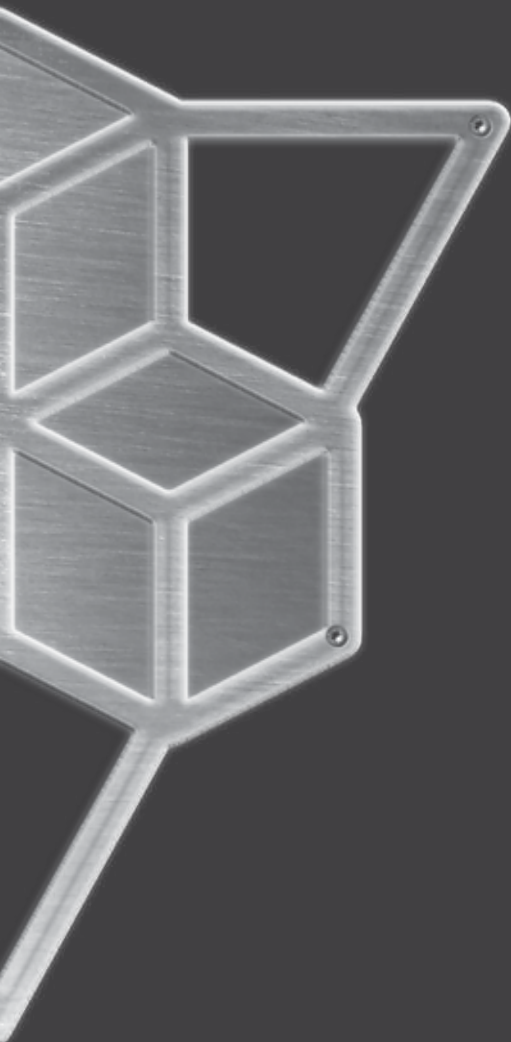


Rutas de la Educación Matemática



- Alicia Avila (coordinadora)
- Carmen Batanero
- Lorenzo J. Blanco y Janeth A. Cárdenas
- David Block Sevilla
- Leonor Camargo, Carmen Samper y Patricia Perry
- Luis Carlos Contreras y José Carrillo
- Bruno D'Amore y Martha Isabel Fandiño
- Alfinio Flores Peñafiel
- Juan D. Godino y Salvador Llinares
- Fernando Hitt
- Gelsa Knijnik
- Luis Moreno-Armella
- Núria Planas y Kaouthar Boukafri
- Luis Radford
- Teresa Rojano
- Noemí Ruiz-Munzón, Marianna Bosch y Josep Gascón
- Luz Manuel Santos-Trigo y Daniel A. Aguilar
- María Trigueros y Sonia Ursini



30 años de investigación en la revista *Educación Matemática*

Rutas de la Educación Matemática

- ❑ Alicia Avila (coordinadora)
- ❑ Carmen Batanero
- ❑ Lorenzo J. Blanco Nieto y Janeth A. Cárdenas Lizarazo
- ❑ David Block Sevilla
- ❑ Leonor Camargo, Carmen Samper y Patricia Perry
- ❑ Luis Carlos Contreras González y José Carrillo Yáñez
- ❑ Bruno D'Amore y Martha Isabel Fandiño Pinilla
- ❑ Alfinio Flores Peñafiel
- ❑ Juan D. Godino y Salvador Llinares
- ❑ Fernando Hitt
- ❑ Gelsa Knijnik
- ❑ Luis Moreno-Armella
- ❑ Núria Planas y Kaouthar Boukafri
- ❑ Luis Radford
- ❑ Teresa Rojano
- ❑ Noemí Ruiz-Munzón, Marianna Bosch y Josep Gascón
- ❑ Luz Manuel Santos-Trigo y Daniel A. Aguilar Magallón
- ❑ María Trigueros y Sonia Ursini



Sociedad Mexicana de Investigación y
Divulgación de la Educación Matemática, A.C.

30 años de investigación en la revista Educación Matemática

Rutas de la Educación Matemática. Primera edición. 2018

D.R. © Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, AC,
SOMIDEM, 2018

Domicilio: Guty Cárdenas 121-B
Guadalupe Inn,
01020, Alvaro Obregón, Cd. De México

Alicia Ávila, Coordinadora

D.R. © Alicia Ávila, Carmen Batanero; Lorenzo J. Blanco Nieto y Janeth A. Cárdenas Lizarazo;
David Block Sevilla; Leonor Camargo, Carmen Samper y Patricia Perry; Luis Carlos Contreras
González y José Carrillo Yáñez; Bruno D'Amore y Martha Isabel Fandiño Pinilla; Alfinio Flores
Peñañiel; Juan D. Godino y Salvador Llinares; Fernando Hitt; Gelsa Knijnik; Luis Moreno-Armella;
Núria Planas y Kaouthar Boukafri; Luis Radford; Teresa Rojano; Noemí Ruiz-Munzón, Marianna
Bosch y Josep Gascón; Luz Manuel Santos-Trigo y Daniel A. Aguilar Magallón; María Trigueros y
Sonia Ursini

Cuidado de la edición: Susana Moreno
Diseño de portada: Fabiano Durand
Corrección de estilo: Rosa María Rodríguez
Diagramación: Moisés Arroyo

Página web: www.revista-educacion-matematica.org.mx

Esta obra es propiedad intelectual de su(s) autor(es) y los derechos de publicación han sido legalmente transferidos a la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, SOMIDEM, por lo que se encuentra protegida por la Ley Federal del Derecho de Autor, su Reglamento y las leyes internacionales sobre la materia. Prohibida su reproducción parcial o total por cualquier forma o medio sin la autorización previa y por escrito de SOMIDEM.

ISBN: 978-607-98263-1-4

Índice

Introducción	7
--------------	---

PRIMERA PARTE

Educación matemática con enfoque socio-cultural

Competencia docente en el análisis de procesos instructivos y desarrollo de una “mirada profesional”. Aportes desde el interaccionismo simbólico <i>Juan D. Godino y Salvador Llinares</i>	19
--	----

Construcción de normas generadoras de oportunidades para el aprendizaje matemático <i>Núria Planas y Kaouthar Boukafri</i>	37
--	----

¿Dónde voy a hacer la compra? Educación matemática y otras preguntas, 21 años después <i>Gelsa Knijnik</i>	52
--	----

Relectura crítica de un artículo publicado en 2000: ¿qué queda?, ¿qué perspectivas se alcanzaron?, ¿qué metas son aún lejanas? <i>Bruno D'Amore y Martha Isabel Fandiño Pinilla</i>	63
---	----

Pautas para repensar el sujeto y el objeto desde una epistemología de solidaridad, en tiempos de una educación para el mercado y el consumo <i>Luis Radford</i>	83
---	----

SEGUNDA PARTE

Conocimiento, resolución de problemas y tecnología

De un marco teórico constructivista del aprendizaje de las matemáticas a otro sociocultural en ambientes tecnológicos <i>Fernando Hitt</i>	101
--	-----

De fractales y cónicas dinámicas: prácticas de enseñanza y mediación instrumental <i>Luis Moreno-Armella</i>	126
Resolución de problemas matemáticos: del trabajo de Pólya al razonamiento digital <i>Luz Manuel Santos-Trigo y Daniel A. Aguilar Magallón</i>	148
Actividad demostrativa: protagonista en la clase de geometría <i>Leonor Camargo, Carmen Samper y Patricia Perry</i>	168
Treinta años de investigación didáctica sobre el análisis inferencial de datos <i>Carmen Batanero</i>	186
La resolución de problemas en la formación de profesores de matemáticas <i>Lorenzo J. Blanco Nieto y Janeth A. Cárdenas Lizarazo</i>	200
El esquivo dominio del conocimiento del profesor de matemáticas <i>Luis Carlos Contreras González y José Carrillo Yáñez</i>	219

TERCERA PARTE

Investigación, currículum y práctica educativa

La investigación y el álgebra en el currículo de la educación básica: de los tiempos de la modernización educativa al presente <i>Teresa Rojano</i>	238
La importancia de la variable en el aprendizaje y la enseñanza del álgebra <i>María Trigueros y Sonia Ursini</i>	253
Nuevos elementos de respuesta a la problemática del álgebra elemental desde la teoría antropológica de lo didáctico <i>Noemí Ruiz-Munzón, Marianna Bosch y Josep Gascón</i>	273
La enseñanza de las matemáticas en la reforma curricular de 1993 en México. Algunas reflexiones 25 años después <i>David Block Sevilla</i>	293

Venturas y desventuras de la investigación sobre saberes no escolares y educación matemática de jóvenes y adultos <i>Alicia Avila</i>	312
<i>La feria de Pitágoras en su segundo cuarto de siglo</i> <i>Alfinio Flores Peñafiel</i>	330
Comité evaluador	363

Introducción

1. ORIGEN Y ORIENTACIÓN DEL LIBRO

Este libro ofrece a sus lectores 18 rutas de investigación trazadas por otros tantos investigadores esenciales de la educación matemática que se ha difundido en español. En él se analizan trayectorias iniciadas en la revista *Educación Matemática*, primera revista en lengua hispana dedicada a este tema. Estas rutas fueron construidas a lo largo de años de trabajo desde distintas regiones y desembocan en lo que hacen actualmente sus creadores. Recontadas en primera persona, ofrecen elementos valiosísimos para comprender el desarrollo y la actualidad de la educación matemática generada en Iberoamérica.

Se trata de un libro de celebración, de festejo por los 30 años de publicación ininterrumpida de *Educación Matemática*, importante vehículo de comunicación de la investigación en educación matemática que se difunde en habla hispana.

La idea que se expresa en el libro comenzó a tomar forma en una reunión del *Comité Editorial de la Revista* organizada para discutir el contenido de la publicación. Una sugerencia de nuestro colega José Luis Cortina nos decidió a orientarlo hacia la forma que finalmente adquirió. Fue una decisión acertada considerando el contenido final del texto, configurado a partir de una invitación a colegas que publicaron algún trabajo en los primeros 15 años de la revista, cuando era distribuida por Editorial Iberoamérica.

La solicitud planteada tenía como objetivo *Mostrar los inicios y el desarrollo de la educación matemática en Iberoamérica desde la perspectiva actual de los constructores del campo*. En función de tal objetivo, se les pidió discutir algún artículo de su propia autoría publicado en *Educación Matemática* entre 1989 y 2003.

A partir de los artículos iniciales, los diferentes autores exponen y analizan las rutas trazadas y los avances en educación matemática logrados. En este ejercicio de reflexión, es posible mirar el contexto académico en que se iniciaron los trabajos, los puntos de inflexión y las lecturas y conceptos que determinaron giros en las trayectorias de investigación. Todos los autores dejan ver la validez actual (a veces total, a veces parcial) de aquellas ideas iniciales miradas con las lentes del presente.

De este modo, el libro aporta un panorama de algunos aspectos de lo que es el campo hoy, con sus logros, inflexiones teóricas y metodológicas, fortalezas y tareas pendientes. Por supuesto, la educación matemática es un campo en movimiento y trans-

formación, por eso, en lo que aquí se lee hay también señales de nuevos horizontes de nuestra disciplina.

2. CONTENIDO DEL LIBRO

Es cierto que delimitar geográficamente las fronteras de la investigación es inexacto, puesto que algunos de los autores hoy forman parte de la comunidad anglo-sajona o la francófona, ya sea por su lugar de residencia, o por la relevancia que en esas comunidades han alcanzado sus trabajos. Sin embargo, con tal delimitación se quiere enfatizar la existencia de una comunidad de habla hispana interesada en la educación matemática desde las últimas décadas del siglo XX y a la cual debemos aportes importantes para la comprensión de los fenómenos a que da lugar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en nuestro contexto.

Las rutas descritas son múltiples y diversas, tanto en sus objetivos como en sus fundamentos teóricos y sus aproximaciones metodológicas. Sus raíces se hunden en la matemática, la psicología, la pedagogía, la sociología, la antropología, la semiótica, la filosofía o la lingüística... Los diferentes capítulos del libro muestran el desarrollo y la autonomía lograda respecto de estas fuentes originales. Dicha autonomía hoy conduce a diversos planos y nuevos horizontes, incluso a los linderos de la filosofía de la educación matemática, orientación que observo en los trabajos de Radford y su culminación en la teoría de la objetivación.

Una riqueza y un reto de la investigación en educación matemática, como han señalado ya algunos investigadores –Lerman, (2010), Prediger, Bikner-Ahsbahr, y Arzarello, (2008), o Godino y Llinares (en este volumen)–, es la pluralidad en sus enfoques y objetivos. En el conjunto de las rutas descritas en este libro se observan sin embargo rasgos que permiten identificar algunas vertientes de la educación matemática. Una de ellas tiene como rasgo principal su orientación socio-cultural. Esta vertiente asume ideas amplias sobre el conocimiento matemático: el sentido y los objetivos de la educación matemática (Radford), las relaciones que se entablan entre aprendientes y enseñantes, la relevancia de la interacción en la construcción del conocimiento (Godino y Llinares) y las normas socio-matemáticas que regulan la actividad en las aulas (Planas y Boukafri). También se incluyen aquí cuestionamientos a las políticas globales que privilegian la evaluación del aprendizaje de las matemáticas a través de pruebas estandarizadas (Knijnik). En estos trabajos interesados por lo social, la cultura y los contextos, se realizan además balances sobre lo que hace 20 años se suponía sería el desarrollo de la educación matemática y los avances reales logrados por la investigación (Damore y Fandiño).

Otra manera de indagar de larga data, y que ha generado una vertiente fundamental de la educación matemática, es la que da prevalencia al análisis de los procesos de aprendizaje desde un punto de vista cognitivo. Esta tarea se realiza hoy mediante

acercamientos lejanos de aquellos que dieron forma inicial al campo y que luego serían cuestionados porque –se decía– consideraban al sujeto aislado, como si aprendiera en solitario, en la interacción con los objetos matemáticos y de manera relativamente independiente de las condiciones didácticas que le rodeaban. En este tipo de trabajos sobresalen el papel de la computadora y los programas de geometría dinámica en el aprendizaje.

La vertiente constituida por las investigaciones de este tipo es transversal a los tópicos y procesos matemáticos. En geometría se consideran distintos temas y aproximaciones –los fractales, la geometría euclidiana, la geometría dinámica y la demostración– también se incluyen la resolución de problemas, la covariación y la inferencia estadística. El interés renovado por la cognición sin duda fue impulsado por el impacto de la tecnología sobre los procesos cognitivos en algunas áreas de la matemática y el desarrollo de ideas teóricas como la mediación instrumental. Como enfatiza Moreno-Armella (1994), las computadoras en la educación matemática son un instrumento que no solo permite “ver mejor lo que ya podíamos ver”, sino que permite “ver algo nuevo” gracias a las posibilidades gráficas del artefacto. Esta idea es reiterada por Camargo, Perry y Samper (en este volumen), quienes ven a los programas de geometría dinámica como “poderosas herramientas de reorganización cognitiva”. Para Batanero (también en este volumen) la potencia de la simulación, facilitada por la tecnología, ha proporcionado otras posibilidades didácticas para la estadística, lo que ha llevado a algunos autores a recomendar la sustitución de la metodología frecuencial por el re-muestreo.

Otra vertiente de la educación matemática tiene que ver con la resolución de problemas existiendo una estrecha vinculación de los trabajos anteriores con esta noción. Esta actividad tradicionalmente ha sido reconocida como la esencia del quehacer matemático (Santos y Aguilar, en este volumen) y el conjunto de los investigadores la considera en sus trabajos, aunque sea implícitamente. Santos Trigo y Aguilar abordan esta noción en tres ejes que no permiten duda sobre su centralidad en la educación matemática: el trabajo de los matemáticos que –como se dijo– identifica a la resolución de problemas como una actividad crucial de esta disciplina; los desarrollos en la educación matemática que enfocan la atención en el estudio de los procesos cognitivos de los estudiantes; y la presencia y uso sistemático de las tecnologías digitales (especialmente los sistemas de geometría dinámica) y su influencia en las formas de razonar, de formular y de resolver problemas.

La resolución de problemas se vincula también con los profesores pues, en palabras de Blanco y Cárdenas (en este volumen), es una tarea esencial a la vez que un desafío en la formación y la acción de estos profesionales. Desde los años noventa, Blanco (1996) colocó la resolución de problemas en el centro de la formación de los docentes, eje que ha guiado su ruta de indagación hasta hoy día.

Otra vertiente de la educación matemática desarrollada ampliamente en este siglo también trata de los profesores; implica el escrutinio de su conocimiento, pero en tér-

minos más amplios: el conocimiento que el profesor necesita y pone en práctica para enseñar adecuadamente esta disciplina en sus clases (Blanco y Cárdenas, en este volumen). Es lo que Ball y sus colegas (Ball, Hill, y Bass, 2005) llamaron *Conocimiento matemático para la enseñanza* (MKT), formulación que –nacida en la Pedagogía gracias a L. Shulman (1987)– vendría a romper la idea arraigada por mucho tiempo de que, para enseñar bien matemáticas, basta con saber matemáticas. En este libro, Contreras y Carrillo hacen un amplio recorrido sobre el tema. Los trabajos de estos autores –en su examen de los conocimientos necesarios para la enseñanza– parten en los años noventa de la idea de “concepciones de los docentes” (tema muy estudiado en esa época) y sus desarrollos concluyen en una propuesta cuyo objetivo es ajustar el modelo de Ball en algunos de sus rubros.

George Steiner, en un artículo auto-biográfico (Steiner, 1998), recurre al Executive Committee del ICMI, para caracterizar a la educación matemática como “un campo de estudio y práctica” (p. 232). En un sentido similar, Lerman ha descrito la naturaleza de la investigación en educación (y en educación matemática), utilizando la metáfora siguiente: “Tiene una cara mirando hacia la teoría y otra mirando hacia la práctica” (Lerman, 2010, p. 107). Esta doble naturaleza está presente en distintos grados y desde distintos ángulos en las rutas delineadas en este libro: en cada investigación, en cada tema, son constantes y cada vez más las referencias a las aulas, a los estudiantes, a los profesores y al cómo éstos pueden integrar las situaciones e ideas novedosas producto de la investigación en su trabajo; también hay reflexiones y expresiones de preocupación referidas a cómo puede preparárseles para que lo hagan exitosamente.

Todos los escritos incluidos en el libro muestran interés sobre la práctica de la educación matemática, pero en algunos este interés es esencial: los que hacen referencias específicas o abordan la docencia, elaboran planteamientos curriculares, examinan la puesta en práctica de innovaciones y reformas educativas, o se orientan a la elaboración de recursos para la enseñanza, todo ello con el soporte de la investigación.

Al respecto, es interesante la forma en que Carmen Batanero reconoce el vínculo teoría-práctica. Lo hace refiriendo la utilidad de dicho vínculo en tanto que investigadora, pues considera su trabajo de docencia como una fuente de identificación de dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos y la relevancia de ciertos temas, todo lo cual originó sus preocupaciones y proyectos iniciales de investigación.

Otras rutas de la educación matemática que forman parte de este libro desembocan en un vínculo directo con la acción educativa mediante propuestas curriculares. Son los desarrollos de la investigación sobre la comprensión del álgebra, tema que tradicionalmente ha ofrecido grandes dificultades a los estudiantes y, por lo mismo, ha constituido preocupación de muchos colegas desde los inicios de la indagación en educación matemática. Las rutas sobre el tema trazadas en este libro se iniciaron mediante estudios diagnósticos realizados por Trigueros y Ursini y por Rojano en la década de 1990. Rojano comenzó sus trabajos al reconocer las dificultades que los alumnos enfrentan

en el paso de la aritmética al álgebra reportadas por muchos investigadores en la década de 1980. Tal reconocimiento la llevó a proponer la ampliación del espacio curricular para esta área de la matemática escolar e iniciar su estudio más tempranamente. En el cierre de su escrito, esta autora ofrece elementos explicativos de la propuesta curricular que hoy entra en vigor en México donde, dice, se buscó equilibrio entre el aprendizaje de conceptos, métodos y técnicas, y se incluyeron elementos de pensamiento algebraico (álgebra temprana) en la educación primaria.

Por su parte, Ursini y Trigueros orientan sus análisis y sus acciones a la educación secundaria y niveles educativos subsecuentes. Desde sus primeros trabajos, estas autoras ponen de relieve el papel que juega el “carácter multifacético” de la variable en la comprensión del álgebra. Enfatizan el desarrollo de un modelo teórico (3UV) en el que se precisan los usos de la variable y aquellos aspectos que intervienen en su comprensión y aplicación en la resolución de problemas. Adentrándose en la práctica educativa, Trigueros y Ursini ofrecen evidencia del potencial del modelo 3UV como herramienta de análisis en la investigación y de diseño en la didáctica.

Distinto es el acercamiento al álgebra iniciado por Bosch y Gascón con su artículo “Cómo se construyen los problemas en matemática educativa” (Gascón, Bosch y Bolea, 2001). En él plantean las que consideran limitaciones del enfoque cognitivo y proponen un acercamiento a partir de un *enfoque epistemológico* que constituye una ruptura con el enfoque cognitivo, al tomar la actividad matemática como objeto primario de investigación. En continuación de tal orientación teórica, en el escrito incluido en este libro (Ruiz-Munzón, Bosch y Gascón) se delinea una propuesta para la enseñanza del álgebra ubicada en *el programa epistemológico* el cual postula la necesidad de modelizar explícitamente los diferentes ámbitos de la actividad matemática mediante los modelos epistemológicos de referencia (MER). Ruiz-Munzón, Bosch y Gascón ven en este dispositivo un instrumento fundamental para rebasar ideas arraigadas en las escuelas que limitan los problemas que se plantean en el álgebra escolar.

Muchos de los autores de este libro han contribuido a diseñar propuestas educativas en matemáticas. Pero la investigación ha ido más allá y se han desarrollado rutas que analizan las formas que han tomado en la práctica reformas curriculares de gran escala nacidas con el fundamento de la investigación en didáctica (Block) o que, a falta de ella (Ávila), impulsaron la indagación sobre los aspectos implicados en la innovación y su puesta en marcha.

Como se ve, la educación matemática es un mosaico de contenidos y metodologías en el que también se incluye un trayecto sobre el teorema de Pitágoras y la funcionalidad, uso y evolución que los recursos elaborados para promover su comprensión han tenido durante 25 años de experimentación (Flores-Peñañiel). Esta ruta nos recuerda que la educación matemática, además de mirar hacia la práctica, también tiene por objetivo generar y experimentar recursos y situaciones de aprendizaje y enseñanza para mejorar esa práctica al favorecer una mejor comprensión de los temas en los estudiantes.