

---

# De la enseñanza de las ciencias matemáticas y físicas en las universidades y escuelas técnicas superiores<sup>1</sup>

(primera de dos partes)

SECCIÓN  
DE  
HISTORIA

*Educación Matemática*  
Vol. 10 No. 1 Abril 1998  
pp. 99-105

Félix Klein, Gottinga

---

Las observaciones que siguen se desprenden de las sugerencias que han sido publicadas por la Comisión pedagógica de la "Sociedad Alemana de Naturistas y Médicos", reunida recientemente en Meran. El lector puede entonces recurrir directamente al "Reporte"<sup>2</sup> redactado por el Sr. Gutzmer. Las sugerencias de la Comisión se refieren a la enseñanza de las ciencias matemáticas y naturales en las Escuelas Superiores, llamadas "de nueve clases" (*neunklassig*). Estas sugerencias no aportan, en sí mismas, nada que sea precisamente nuevo, sino que son, más que nada, la consecuencia del desarrollo constante que se produce desde hace tiempo en los medios escolares bajo el impulso de diversos factores de la cultura moderna. No obstante, han causado una emoción general en los diversos círculos de la enseñanza superior y universitaria, al advertir que, la adopción y la aplicación de las medidas propuestas, deben ocasionar modificaciones múltiples en la enseñanza superior y universitaria. De hecho, la Comisión, en el reporte y las conclusiones que debe presentar el año próximo, no podrá dejar de dar su opinión sobre las cuestiones tratadas aquí. Por otra parte, la Comisión sabe muy bien que ninguna de las propuestas que pueda formular tendrá algún valor si no está segura de antemano de buscar apoyo en muchos y diversos ámbitos dentro de los medios militantes de la enseñanza superior; asimismo, estas propuestas sólo encontrarán su verdadera formulación después de que hallan sido discutidas, fuera de la Comisión, un poco por todos lados. Es por esto que la Comisión ha encargado a dos de sus miembros interesados, en primer lugar como profesores —el Sr. Profesor Chun de Leipzig y yo mismo—, la tarea de someter las propuestas provisionales a los representantes de las diversas Escuelas Superiores y a invitarlos a examinarlas y a discutir las tan ampliamente como sea posible. El Profesor Chung se encargará sobretodo de lo que concierne a la enseñanza de la biología, mientras que yo trataré lo que toca a la enseñanza de la matemática y de la física. Quedan pendientes las consideraciones especiales relativas a la enseñanza de la química.

---

<sup>1</sup> Traducido del alemán por A. Dufour (Ginebra) de acuerdo al texto alemán publicado por *Jahresbericht der D. M. V.*, Octubre, 1905. [En donde se emplea el término "Escuela Superior" sin otro calificativo significa indiferentemente "Universidad" o "Escuela Técnica Superior", mientras que el término de "escuelas superiores" (*hohere Schulen*) se reserva a las escuelas que, inferiores a las Escuelas Superiores, preparan y conducen a ellas. N.T.F.]

<sup>2</sup> *Bericht der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforsteher un Aerzte über ihre bisherige Tätigkeit*, Leipzig, F. C. W. Vogel, 1905. [N.A.].

[Ver las Actas del Congreso de Meran, *L'Ens. Math.*, Año 7, pp. 487-488, 15 de noviembre de 1905. El reporte sobre la enseñanza de las matemáticas se encuentra reproducido *in-extenso* en las Notas y documentos del presente número. Redacción].



Quizás deba yo agregar que he aprovechado ya numerosas ocasiones para intercambiar puntos de vista e ideas personales con diversos colegas, sobre los asuntos que voy a examinar. Y, de entrada, quiero señalar dos objeciones que me han sido expresadas más de una vez respecto al reporte de Meran. ¿Cómo organizar los cursos iniciales (llamados *Anfangsvorlesungen*), destinados a jóvenes estudiantes con bagajes científicos muy diversos, aunque sólo sea por la heterogeneidad de la escuela de la cual provienen? y ¿dónde encontrar, más tarde, maestros capaces de proporcionar dentro de las escuelas de “nueve clases” una enseñanza específica como la que se propone? Estas dos preguntas aparecen con mayor o con menor fuerza en los dos problemas principales que me propongo tratar aquí y a los que dedicaré los dos capítulos (I y II) que siguen. En el capítulo I voy a hablar de los cursos de matemáticas y de física destinados a los estudiantes para quienes éstas sólo son ciencias auxiliares; más tarde, en el capítulo II, me ocuparé del método racional que debe emplearse para formar a quienes deberán enseñar las matemáticas y la física. En cuanto al apéndice (Capítulo III), su objetivo se define por la frase con la cual termina el capítulo II.

## I. Las matemáticas y la física consideradas como ciencias auxiliares

Para no perderme en generalidades, prefiero referir mis observaciones a dos cursos principales: El *curso de física experimental*, común en las universidades y en las Escuelas Técnicas Superiores, y el *curso de introducción a las matemáticas superiores*, tal y como se imparte en las Escuelas Técnicas a los futuros ingenieros; —es claro que lo que diga aquí se aplica también a los otros cursos de introducción, *mutatis mutandis* de acuerdo a sus objetivos—.

Hasta ahora, en estos dos cursos, no se han tenido en cuenta las diferencias en la preparación previa que existe entre los participantes. Estas diferencias se dan, sobretudo, con la admisión complaciente que no exige más antecedentes que los que trae el estudiante egresado del gimnasio clásico, y aún en los cursos de física experimental, se llega al punto de omitir mucha de la preparación matemática, a pesar de estar incluida en las clases superiores de este gimnasio.

Parto de esta última circunstancia que da una prueba característica de un hecho patente: la supuesta homogeneidad de la cultura previa, que se admite con complacencia y sin ninguna evidencia en la organización de los cursos iniciales de enseñanza superior, no existe en absoluto en los hechos. Junto a aquellos estudiantes que poseen su certificado de madurez completo después de haber tomado los nueve cursos reglamentarios, vienen a sentarse oyentes que ni siquiera tiene el certificado de segundo (*Untersekunde*)<sup>3</sup>. Entre más se esfuerce el profesor por ser útil a sus oyentes, más se ve obligado, consecuentemente, a poner su enseñanza a un nivel accesible para los estudiantes menos avanzados. Por otra parte y al mismo tiempo, numerosos gimnasios científicos (*Realgymnasien*) y escuelas reales enseñan la física, tanto teórica como experimentalmente, de una manera verdaderamente seria, que le sirve de

<sup>3</sup> Se me ha pedido que mencione lo siguiente: En las Escuelas Superiores Técnicas prusianas, se admitía a los jóvenes que contaban con un certificado de madurez primaria (*Primareife*). Por la ordenanza del 5 de julio de 1905, se ha establecido que, en adelante sólo podrán ser admitidos ahí como alumnos regulares, los estudiantes que cuenten con un certificado de madurez emanado de un gimnasio alemán, de un gimnasio “real” (*Realgymnasium*), o de una escuela real superior. En adelante, ellos serán los únicos admitidos en los exámenes. Los otros, en vista de que poseen los conocimientos científicos exigidos por el servicio militar, que se reducen a un año, serán admitidos como simples oyentes (*Hörer*). Pero no se harán acreedores a ningún diploma académico. [N.A.]



muy poco a quienes toman los cursos iniciales en las Escuelas Superiores; esta enseñanza presenta todas las ventajas debidas a la ejecución de un programa sistemático y completo (*geschlossen*) e incluye, en particular, la cultura matemática paralela correspondiente. Es por esto que los estudiantes provenientes de escuelas semejantes no adquieren nada, o adquieren muy poco, en los cursos universitarios tal y como se dan actualmente.

Para los lectores poco versados en los estudios físico-matemáticos, me permito señalar aquí que es absolutamente necesaria la adaptación del nivel de enseñanza de la rama de la que se trate, a la cultura previa de los estudiantes. Parece ser que es distinto en los cursos de naturaleza literaria o histórica, porque el oyente, aún el menos preparado, encuentra ahí abundante alimento intelectual y un impulso siempre provechoso para, con sus propios estudios privados, llenar gradualmente las lagunas existentes. Por el contrario, tanto en la matemática como en la física, los conocimientos sólo se edifican, por así decirlo, por peldaños sucesivos, y quien quiera llegar a la cima, debe escalarlos uno a uno. *La desigualdad en las culturas previas entre los oyentes, constituye entonces para los cursos iniciales del primer año, un inconveniente tan grande como real.*

Quizás sea oportuno señalar, clara y netamente este inconveniente. Pero lo que estas líneas tienen el propósito de resaltar, es que este inconveniente no podría ser resultado de las proposiciones de Meran, sino que *existe desde hace mucho tiempo y que habría que frenarlo en todo caso y a cualquier precio.*

En lo que resta, ¿haría falta entonces retardar el desarrollo específico de las instituciones superiores llamadas de nueve clases porque, como están, crean condiciones incómodas para la enseñanza en las Escuelas Superiores? Pongo aquí a propósito el acento en el término "específico". La reforma escolar de 1900 ha roto, de una buena vez, con la idea de una escuela única para todos (*Einheits-Schule*), que lleva, ya sea a desprestigiar importantes elementos de la cultura, a crear una uniformidad opresiva o, en fin, a rebajar el nivel común hasta llegar a una suerte de trivialidad enciclopédica. Sin duda, toda escuela específica es, en esencia, más o menos exclusiva y se mueve, podríamos decir, sobre un terreno y dentro de un ángulo limitado, sin embargo el principio de la universalidad se encuentra a salvo por la multiplicidad y existencia simultánea de escuelas diversas. Desde el momento que el joven frecuenta una escuela superior (*höhere Schule*) que responde a sus dones naturales y a sus planes futuros, se hace posible y deseable, tanto desde su punto de vista individual como desde un punto de vista general y social, abreviar, en la medida de lo posible, sus estudios superiores y especializados relativos a su vocación futura. Se ha dicho tan frecuentemente que no insistiré más en ello. Que me sea permitido solamente agregar que una instrucción especial como la que describo a continuación, no es una instrucción profesional en el sentido más elevado del término, sino una *instrucción general basada en materias especiales.*

Para salir del dilema señalado, hay una sola vía a seguir: Las Escuelas Superiores deben adaptarse al desarrollo científico de las escuelas preparatorias. Me agrada recordar, a este respecto, que la universidad atravesó, en las primeras décadas del siglo pasado, por una transformación semejante aunque mucho más completa que la que se impone hoy a las ciencias de las que nos ocupamos. Esto fue en la época de reorganización permanente de nuestros gimnasios actuales y del examen de salida a los que estos conducen (*Abiturientenexamen*). Toda esta enseñanza preparatoria, que hasta ese momento había sido la tarea principal de la Facultad de Filosofía, fue des-



de ese momento devuelta a los gimnasios; y la Facultad de Filosofía pudo aspirar a metas nuevas y más elevadas. Nadie podría dudar de que esos cambios fueron benéficos para la Facultad, tanto desde el punto de vista de su régimen interior, como de los servicios que presta. Que desde ahora se tranquilicen aquellos quienes, hoy que se van a imponer nuevas modificaciones, sólo quieren ver ahí una nefasta desorganización de las Escuelas Superiores.

Sin duda el asunto no es tan simple como los cambios que acabo de recordar: escuelas preparatorias muy diversas, las unas del mismo rango que las otras, tienen derechos indudablemente iguales. *Tal parece que es necesario que, al lado de los cursos de introducción, que presuponen el máximo de preparación específica, se instituyan otros cursos complementarios que, partiendo de un nivel inferior, conduzcan a un nivel superior a los estudiantes menos preparados.*

Entonces, que se complete el programa en un sentido análogo al de los cursos de latín y griego, que se organizan de aquí en adelante para los estudiantes cuya cultura filosófica previa deja mucho que desear. Los amigos de las escuelas reales han trabajado hasta encontrar estos últimos cursos en los creen que se cumple el interés de una igualdad de derechos. Yo creo que este punto de vista es absolutamente falso. *La meta a alcanzar debería ser, no la supresión de cursos, sino su multiplicación o, si puedo expresarlo así, su generalización.*

Sin embargo, para continuar en la misma línea, recomiendo una vez más la organización de cursos de instrucción que estén adaptados, separadamente, a los diversos estudios que seguirán los alumnos —es decir, algo parecido a lo que se hace en las escuelas preparatorias—. El desarrollo que han tenido las diversas ciencias es tal que entre más avancemos en el tiempo, menos provechosos resultarán los cursos generales de instrucción —o bien requerirían de un tiempo superior a aquel del que disponen los estudiantes, que deben, en un número dado de semestres, alcanzar una meta determinada según la profesión que persigan—. En cuanto a las visiones de conjunto de las disciplinas diversas, quienes desean acceder a una síntesis pueden introducirse a ella, ya sea mediante cursos públicos apropiados, o bien en los cursos superiores destinados a círculo restringido de especialistas.

Por lo que toca a la física experimental, la cuestión se simplifica por el hecho de que las proposiciones de Meran aparentemente fijan, en física, una meta un poco más parecida para todas las “escuelas de nueve clases” (*neunklassig*). Quedan entonces las modificaciones siguientes para los cursos de introducción:

- 1°) Instauración de un curso preparatorio especial para aquellos que, sin preparación suficiente en física, entran en la Escuela Superior;
- 2°) Organización de los cursos de manera que se adapten a las diversas metas profesionales que los estudiantes se proponen y a las diversas direcciones dentro de las cuales se proponen estudiar.

Sobre el segundo requisito, debo señalar, a título de ejemplo, que en la Universidad de Viena se dan cursos de introducción a la física experimental, destinados a los futuros profesores de matemáticas y de física y que, en estos cursos se insiste, muy especialmente, en consideraciones de orden matemático (*mathematische Formulierung*). Así es como me imagino los cursos de introducción destinados ya sea a los médicos, ya sea a los ingenieros, etc.: concebidos de manera diversa teniendo en cuenta los conocimientos útiles y necesarios para unos o para otros. En cuanto a la naturaleza y a la extensión de las medidas de ejecución del programa de estos cur-



sos, les toca a los especialistas formularlos. Para los profesores de física la tarea aquí será, ciertamente, ardua. Y sin embargo, hace falta emprenderla a cualquier precio, si no se quieren ver abatidos los niveles de los conocimientos necesarios, en materia de ciencias naturales, tanto para los futuros médicos como para los futuros ingenieros, bajo la presión creciente de las ramas más propiamente profesionales. Por otra parte, ¿haría falta entonces acortar, por no decir mutilar, los cursos de introducción a la física? ¿o haría falta confiarlos a médicos o a ingenieros y, entonces, a profesores que no sean físicos de carrera?

Estoy consciente de la oposición que encontrarán estas propuestas entre los especialistas y sólo deseo que se abra una discusión amplia. Hay algo que me parece claro: la física, en sí misma, se beneficiará en igual medida en la que se opere la organización y la multiplicación de los cursos previstos por la propuesta de Meran. Aunque yo mismo no soy físico de carrera, estoy convencido de ello, con la seguridad que me garantiza, por analogía, el camino seguido por *el curso de introducción a las matemáticas superiores*, tal como se dio y se da todavía ahora en las Escuelas Superiores Técnicas. El programa de estudios de los ingenieros en las Escuelas Superiores Técnicas alemanas, fue, hace varias décadas, calcado de las de las escuelas análogas francesas, en lo que respecta a las matemáticas. Pero en Alemania, los desarrollos subsecuentes han acertado, quitando pedazo por pedazo, la enseñanza matemática propiamente dicha en beneficio de la enseñanza técnica y práctica que, desde el inicio de los estudios, acapara cada vez más espacios. Las matemáticas superiores, ya sea el cálculo diferencial, el integral o la geometría analítica, se encuentran hoy reducidas a un simple curso de introducción que se sigue sólo durante los primeros dos o tres semestres. Adicionalmente, se enseña siempre de manera bastante completa, la geometría descriptiva en la antigua acepción del término. Pero ya en los cursos de mecánica aplicada o técnica, en otro tiempo de naturaleza profundamente matemática, se impulsa hoy al primer plano, como elemento principal, la experimentación directa sobre la máquina misma (o la inspección de las construcciones en sí mismas). Hago alusión aquí a los laboratorios grandiosos, destinados a los ingenieros, que en los diez últimos años, han sido agregados a las Escuelas Superiores Técnicas de Alemania.

Este desarrollo, que quizás no ha llegado a término, fue, después de todo, fruto de la necesidad. Responde a las exigencias actuales de la industria alemana que demanda una gran mayoría de ingenieros prácticos y sólo una minoría de teóricos. Esto está bien, conforme a los tiempos actuales que se apartan, cada vez más y por razones excelentes, de una cultura exclusivamente formal.

Pero la medalla tiene un reverso. Hemos, como se dice en alemán "*tirado al niño con el agua al vaciar la bañera*", en muchos casos que se presentan en la práctica, la cultura matemática sola puede elaborar la respuesta buscada, mientras que los conocimientos preliminares acumulados por los ingenieros no son suficientes. Podría citar aquí ejemplos típicos. ¿Dónde encontrar el justo término medio?

Es aquí que las propuestas de Meran se encuentran en una situación particularmente feliz. Ahora que la enseñanza matemática, ya en las clases del gimnasio, de entrada se enfoca a la intuición del espacio y a la noción de función y lleva de esta manera al estudiante al seno mismo del cálculo diferencial e integral, el curso introductorio a las matemáticas superiores en las Escuelas Superiores podría ser más nutrido que lo que fue hasta ahora. En particular, cuando ya en la escuela inferior se ha ejercitado la mente de los alumnos para considerar las relaciones entre la matemática teórica



y sus aplicaciones, entonces se producirá más fácilmente el paralelismo tan deseado con la técnica práctica. En pocas palabras, *la matemática se incorporará de una manera mucho más orgánica a todo lo que forma el horizonte intelectual del futuro ingeniero, y se impregnará ahí también de manera más permanente de lo que ha sido hasta ahora.*

Supongo, claro, teniendo en cuenta las consideraciones generales presentadas arriba, que, para aquellos que lleguen a la Escuela Superior sin la preparación matemática normal, tal como la demanda la propuesta de Meran, serán instituidos suficientes *Cursos preparatorios*.

Por otra parte, podría presentarse un atractivo aprovechable por los alumnos de las Escuelas Reales Superiores —siempre y cuando en estas escuelas, como lo recomienda la mayoría de la Comisión, la enseñanza sea dirigida a los elementos del cálculo infinitesimal—. Así los alumnos antes mencionados podrían ser dispensados de una parte del curso de introducción dado en la Escuela Superior, y entrar más temprano al dominio de estudios técnicos propiamente dichos. Evidentemente, estos cursos de introducción deberán fraccionarse de manera que faciliten la posible dispensa de la que hablé. De que esto es practicable y por qué medios nos da un ejemplo probatorio la Escuela Superior Técnica de Stuttgart: desde hace tiempo su programa está concebido en el seno de esta propuesta —y nadie se ha quejado jamás de que, en estas condiciones, el nivel medio de la cultura matemática de los ingenieros halla bajado—.

Pero basta del curso propuesto. Renuncio a hablar de la aparente importancia que podría tener la aplicación de las propuestas de Meran para la enseñanza de las Escuelas Superiores en materia de geometría descriptiva y de mecánica aplicada (técnica)<sup>4</sup>. Sin embargo, para avanzar en la dirección de la segunda parte de las consideraciones presentadas en esta memoria, tengo que formular otra demanda que se aplica seguramente también a los estudios de física: que, en las Escuelas Superiores Técnicas, se organicen, tanto en matemáticas como en física —en beneficio de quienes desean una cultura más completa—, *Cursos superiores (Spezialvorlesungen)* —mucho más numerosos y más completos que los que se han dado hasta ahora—. No estoy imaginando ninguno de estos cursos, se entiende, de naturaleza abstracta, sino cursos en los que se vincule la plena comprensión teórica con la comprensión práctica y se haga una sola de ellas, que, en una palabra, se penetren recíprocamente. Querer mostrar, aunque fuese mediante algunos ejemplos, cómo esta demanda se legitima en el interés mismo de nuestra industria y de sus exigencias crecientes, me llevaría demasiado lejos; que me sea permitido solamente señalar que la Asociación de Ingenieros Alemanes la ha presentado ya, de manera expresa, en 1895, en lo que se conoce como las “Resoluciones de Aquisgrán” (*Aachener Beschlüsse*). El punto de vista en el que me coloco aquí para retomarla por mi cuenta es que, sin estos cursos superiores, no les será posible a las Escuelas Superiores Técnicas participar, en la medida en que esbozaré más adelante, en la producción de fuerzas jóvenes para la enseñanza.

A este respecto, debo agregar algunas palabras sobre una cuestión mencionada de pasada más arriba (en lo que toca a la física experimental). Por el hecho de que, como lo muestra la experiencia, los matemáticos y los físicos no siempre son aptos para descubrir la significación práctica de la teoría, se tiene de nuevo que confiar

<sup>4</sup> Por lo que toca a la geometría descriptiva, véase, por ejemplo, la obra tan sugestiva del Sr. Schilling sobre las aplicaciones de la geometría descriptiva, en particular a la fotogrametría (*Ueber die Anwendungen der darstellender Geometrie, insbesondere über die Photogrammetrie*. —Leipzig 1904)—. Me parece que todavía no existe una exposición completa de los puntos de vista esenciales, en la época actual, para la enseñanza de la mecánica industrial; expreso aquí mi deseo sincero de que algún escritor competente no tarde en dotarnos de esta exposición. [N.A.]

los cursos, tanto en los estudios técnicos como en los de medicina, no a los teóricos sino a los prácticos. Es pasar de Guatemala a "Guatepeor": uno encuentra bastante bien la cultura práctica en estos últimos pero, muy frecuentemente, les falta la cultura teórica, y esta se adquiere muy difícilmente después de la época de estudios, es un hecho de la experiencia. Por otra parte, sólo podremos crear fuerzas de enseñantes, de una manera verdaderamente *sistemática*, cuando pongamos a los estudiantes lo más temprano posible en contacto, tanto en física como en matemáticas, con los problemas prácticos. Sin duda no todo está hecho cuando uno adquiere una *preparación* sistemática. Todo lo contrario, es altamente deseable que, en el caso de cualquier profesión, no sólo se busquen, en el futuro, competencias de alguna manera unilaterales, sino actitudes plenamente equilibradas, tanto en materia pedagógica como en materia científica.

*Traducción G. Waldegg*