NOTAS DE CLASE

Educación Matemática
Vol. 10 No. 2 Agosto 1998
pp. 102-120

Visualización y creatividad

Fecha de recepción: Mayo, 1997

Inés del Carmen Placencia Cruz, Ma. Candelaria Espinel y José Ángel Dorta
Facultad de Matemáticas, Universidad de la Laguna
C., Avenida Francisco Sánchez s.n La Laguna, Tenerife. Islas Canarias
incruz@ull.es; mespinel@ull.es; jadorta@ull.es

Resumen. *Este trabajo tiene como finalidad reflexionar sobre el papel que juegan las imágenes mentales y la visualización, en el pensamiento matemático. El estudio de la visualización ha resurgido en los últimos tiempos, y es objeto de numerosas investigaciones, en parte debido a los medios de comunicación y al influjo del ordenador.*
Las ideas que aquí se recogen son consecuencia de nuestra propia formación matemática, experiencia docente y reflexiones e inquietud en este campo. Mediante diversos ejemplos, tomados de la enseñanza de las matemáticas en Secundaria y Universidad, presentamos la relación que tiene la visualización con el razonamiento y la creatividad en matemáticas.
El artículo se presenta organizado en dos partes:
1. Imagen y creatividad.
2. La imagen como herramienta para la resolución de problemas y en la construcción de conceptos.

Abstract.
This paper has the aim of reflecting in the role that mental images and visualization plays in the mathematical thought. The study of visualization has been revived in the last few years, and now it is the object of several fields of research in part due to the mass media and the influence of the computer.
The ideas that are shown here are the consequence of our own mathematical training, teaching experience, reflections and anxiety in this field. Through various examples, taken from the teaching of maths in Secundary and University we present the relationship that visualization has with reasoning and creativity in maths.
The paper is divided in two parts:
1. Image and creativity.
2. Image as a tool for the solution of problems and the construction of concepts.

Introducción

Este trabajo tiene como finalidad reflexionar sobre el papel que juegan las imágenes mentales y la visualización, en el pensamiento matemático.

Las ideas que aquí se recogen son consecuencia de nuestra propia formación matemática, experiencia docente y reflexiones e inquietud en este campo.

Se presenta organizado en dos partes:

1. Imagen y creatividad.
2. La imagen como herramienta para la resolución de problemas y en la construcción de conceptos.

Comenzamos fijando el sentido de algunos de los términos que utilizamos en este trabajo.

Llamaremos imagen a la construcción mental de un objeto creado por la mente a través del uso de uno o más sentidos y en el que la mente tiene un papel activo, por ejemplo, rotar, trasladar y transformar la imagen (Solano - Presmeg, 1995).

Entendemos por visuaclización, desde el punto de vista de la Educación Matemática la habilidad para trasladar a imágenes visuales la informaciópn que está dada en forma simbólica, y relacionarlas entre sí; esta habilidad debe interpretarse como:

> ***"Una forma de actuar con atención explícita a las posibles representaciones concretas en cuanto desvelan las relaciones abstractas que al matemático interesan" (Guzmán, 1996).***

En lo que sigue utilizaremos indistintamente los términos imagen y visualización, dada la relación que existe entre ellos.

Sobre creatividad se han dado múltiples definiciones. Una persona creativa tiene como manifestaciones más frecuentes su originalidad, en el sentido de usar enfoques no comunes; flexibilidad de ideas, pensamiento aventurero, ...

Posiblemente la creatividad opera de forma muy diferente en situaciones distintas y es imposible unificar bajo un mismo criterio la creatividad en la ciencia y las matemáticas, y la creatividad en el arte.

En este trabajo consideraremos la creatividad como la habilidad para resolver problemas y/o "estructurar el pensamiento" teniendo en cuenta la naturaleza lógico-deductiva de la disciplina, y la conveniencia de los conceptos generados para ser integrado dentro del cuerpo de las matemáticas (Ervynck, 1991).

Analizaremos, por una parte, la interrelación entre la visualización y la **creatividad** en el pensamiento y la actividad matemática, y, por otra, estudiaremos la función que desempeña la visualización en la resolución de problemas y en la construcción de conceptos.

I. Imagen y creatividad

De una entrevista hecha al cantautor canario Pedro Guerra, reproducida en la prensa, hemos entresacado el siguiente párrafo:

> ***"Soy joven y los títulos de mis canciones responden un poco a eso: intentar decir algo y lo quieren hacer de una manera original... Peter Pan es una canción que habla sobre los hombres que van buscando la mujer ideal... yo utilizo imágenes infantiles para hablar de eso". "...Cuando tengo claro lo que quiere decir, me cuesta escribirlo pero enseguida lo visualizo..."*** *(Diario de Avisos, 22.4.96).*

Del libro "¿Qué importa lo que piensen los demás?", hemos extraído la siguiente frase:

> ***"Procuro acordarme de esto, sobre todo, cuando estoy enseñando alguna técnica esotérica, como la integración de las funciones de Bessel. Cuando veo ecuaciones, veo las letras de colores; no sé por qué. Al tiempo que hablo, veo imágenes vagas de las funciones de Bessel tomadas del libro Jahnke y Emde, con jotas de color sepia, enes levemente azul-violáceas, y equis marrón oscuro volando por allí. Y me pregunto qué infiernos de aspectos tienen que ofrecerles a los estudiantes"*** *(Feynman, 1988).*

En ambas citas, cantante y científico, confiesan la construcción mental interna que hacen de una situación. Para crear una canción, el cantautor, acude a una imagen mental de su niñez, y visualiza la canción que luego va a escribir. Para el científico, premio Nobel en Física, el concepto de función de Bessel evoca una representación visual de símbolos "esotéricos".

La mayoría de los matemáticos no parecen interesados en analizar sus procesos de pensamiento y no describen de qué manera conciben sus teorías, investigan, trasmiten y adquieren conocimientos. Sólo unos pocos, como Poincaré, Hadamard, etc., han expresado claramente los procesos aludidos.

Henri Poincaré, una de las mejores mentes matemáticas de todos los tiempos, mostró un claro interés por comprender la naturaleza del trabajo científico, y por la naturaleza de su proceso de pensamiento. Su testimonio es muy representativo:

> ***"Durante quince días me esforcé por demostrar que no podían existir funciones como las que luego llamé fuchsianas. Entonces era muy ignorante. Me ponía cada día a trabajar en mi mesa, probaba un gran número de combinaciones durante un par de horas y no lograba nada. Una tarde bebí una taza de café, cosa que no solía hacer, y no pude dormir por la noche. Las ideas surgieron a borbotones. Las sentía chocar unas con otras, por así decirlo, hasta que se engarzaron entre sí formando una combinación estable. A la mañana siguiente ya había determinado la existencia de una clase de funciones fuchsianas, las derivadas de la serie hipergeométrica. Sólo me faltaba poner por escrito los resultados, lo que hice en pocas palabras".*** *(Poincaré, 1995).*

Jacques Hadamard es uno de los científicos que ha insistido en la importancia del pensamiento visual; se consideraba a sí mismo como un matemático que pensaba básicamente utilizando imágenes, porque para él las palabras y las sentencias algebraicas ocupan un lugar posterior; es decir, que las palabras estaban ausentes de su mente y permanecían ausentes hasta que llegaba el momento de comunicar los resultados a otras personas, ya sea en forma oral o escrita (Hadamard, 1945).

Los ejemplos anteriores nos animan a reflexionar sobre el proceso creativo relacionado con las matemáticas y decir que éste no toma una forma intencionadamente deliberada: concibiendo primero y ejecutando después. Quizás el proceso de crear comienza por

"estar formados para ..."
"estar predispuestos a ..."
"estar estimulados, motivados, animados, ...".

Estas predisposiciones permiten construir nuevas asociaciones de ideas, (pensamiento matemático), en las cuales las imágenes juegan un papel relevante en el pensamiento. Este es el caso de Albert Einstein, quien en una carta a Hadamard escribió:

> ***"Las palabras o el lenguaje como son escritas o habladas no parecen jugar ningún papel en mi forma de pensamiento. Las entidades físicas que parecen servir como elementos en el pensamiento, son ciertos signos y más o menos claras imágenes que pueden ser voluntariamente reproducidas y combinadas. Estas combinaciones parecen ser la característica esencial en el pensamiento productivo, antes de que haya cualquier conexión con construcciones lógicas en palabras u otros tipos de signos que puedan ser comunicados a otros"*** *(Hadamard, 1945).*

Sorprende en las explicaciones autobiográficas de Poincaré, Hadamard y Einstein el alto grado de automatismo que atribuyen al acto creativo en sí mismo en el momento de hacerlo (de crear). Esta idea, Raymon Chandler (citado en Rosembert, 1996), la expresa sintéticamente así:

"cuanto más razonas, menos creas".

Por otra parte es importante dentro del proceso creativo la discriminación. Una persona creativa distingue las buenas ideas de las malas: reconoce cuando algo es prometedor, de manera que puede desarrollar y refinar las que merecen la pena; ha de estar especialmente dotada para reconocer el núcleo de la cuestión, ya sea la solución de un problema o la construcción de un argumento. En este mismo sentido Poincaré, argumentado sobre el proceso creativo, afirma que:

> ***"la creación matemática no consiste en hacer combinaciones nuevas con entes matemáticos conocidos; cualquiera podría hacerlo y la mayoría de estas estarían desprovistas de interés. Crear consiste en discernir, elegir aquellas pocas que son realmente combinaciones útiles"*** *(Poincaré, 1995).*

La persona creativa ha de estar especialmente dotada para reconocer lo que merece la pena y no actúa como lo haría un ordenador, que es muy bueno combinando al azar y produciendo mucho; sin embargo, la mayoría de estas combinaciones estarían desprovistas de interés.

A nuestro juicio podríamos concluir que la creatividad, en la ciencia y en las matemáticas, participa de tres aspectos:

- Requiere ser una persona iniciada o experta en el tema.
- Tener capacidad para establecer asociaciones o relaciones.
- Ser capaz de seleccionar, de escoger, de sinterizar...

Sin entrar en un desarrollo exhaustivo de todas las cuestiones relacionadas con la creatividad, queremos resaltar, como se deduce de los párrafos anteriores, que las imágenes, o si se quiere, **el pensamiento visual tiene su espacio natural en la creatividad matemática**. Esta idea es compartida en cierta manera por Miguel de Guzmán cuando escribe:

> **"La visualización ha sido tónica general en el trabajo creativo de los matemáticos de todos los tiempos. Uno u otro tipo de imagen acompaña constantemente sus especulaciones, probablemente aún las más abstractas, aunque la naturaleza de esta imagen presenta una variedad de individuo a individuo mucho mayor de lo que sospechamos"** (Guzmán, 1996: El rincón de la pizarra, pág. 29).

En lo que sigue analizaremos algunos ejemplos elegidos de nuestro trabajo diario en los que la creatividad, junto a la visualización, jugaría un papel relevante.

Ejemplo 1:

Sobre la enseñanza de las inecuaciones.

Consultando un profesor, con suficiente experiencia docente en los niveles de Secundaria y Universitario, sobre su metodología en la enseñanza de las inecuaciones, más concretamente, frente al problema de encontrar el subconjunto de los números reales que verifiquen:

$$|x - 1| + |x + 2| < 5$$

razona y se expresa de la siguiente manera.

"Hay cambios de signos en 1 y −2"

El profesor considera la definición formal de valor absoluto y, a través de ella, estudia el comportamiento de los dos valores absolutos que intervienen en el ejercicio, y continúa:

"por tanto, tenemos tres particiones"

y escribe:

$$x \leq -2$$
$$-2 < x < 1$$
$$x \geq 1$$

A continuación realiza el estudio algebraico para cada una de ellas y concluye que la solución es el intervalo abierto (−3, 2).

Nos confiesa que normalmente no utiliza apoyo gráfico en sus explicaciones sobre este tipo de ejercicios, aunque a veces recurre a la recta real para aclarar ideas.

Pensamos que este método de enseñanzas de las inecuaciones, donde predominan exclusivamente herramientas algebraicas, y en el que las representaciones gráficas prácticamente no existen, es muy frecuente entre aquellos docentes que consideran prioritaria la exposición formal de la matemática sin otros recursos pedagógicos que pudieran derivarse de la parte visual e intuitiva de los conceptos.

Otros profesores, los menos, confiesan seguir un método alternativo: intuitivo, visualizador, apoyándose en construcciones gráficas y que no suele encontrarse en los libros de texto actuales.

Desarrollemos el ejemplo anterior utilizando un proceso plenamente visualizador:

La inecuación:

$$|x - 1| + |x + 2| < 5$$

es equivalente a esta otra

$$|x - 1| < 5 - |x + 2|$$

Resolvámosla siguiendo un proceso visualizador "paso a paso"

La secuencia sería la siguiente:

1. **Paso Primero.**
   – Se grafica el valor absoluto del primer miembro.

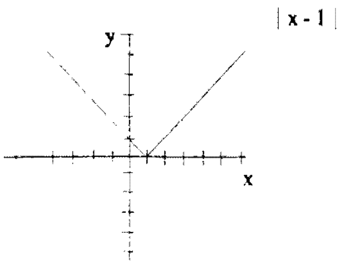

Fig. 1.a

2. **Paso Segundo.**
   – Se grafica el valor absoluto que aparece en el segundo miembro con signo positivo.

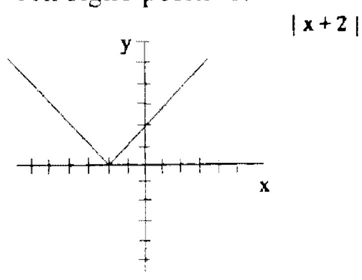

Fig. 1.b

3. **Paso Tercero.**
   – Se grafica la opuesta de la gráfica del apartado 2.

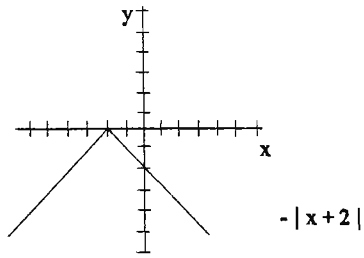

Fig. 1.c

4. **Paso Cuarto.**
   – Se suma 5 a la función resultante del apartado 3. (Traslación de vector (0,5)).

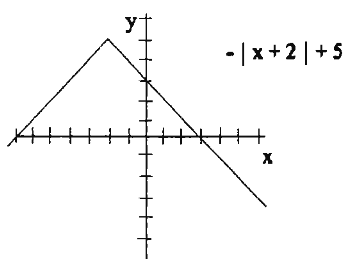

Fig. 1.d

5. **Paso Quinto.**
   – Se grafican, en un mismo sistema de ejes, las gráficas de los apartados 1 y 4.

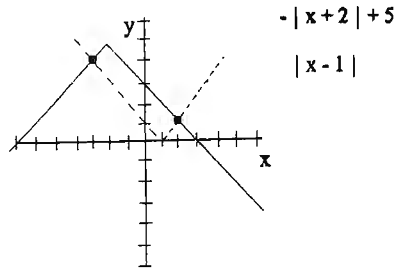

Fig. 1.e

6. **Paso Sexto.**
   – Se observan los puntos de corte, y se localiza en el eje de abscisas aquellos número reales para los cuales la gráfica del primer miembro de la inecuación "queda por debajo" de la gráfica del segundo miembro.

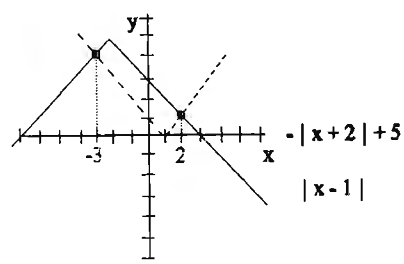

Fig. 1.f

Como se observa en la Fig. 1.f., la solución es $(-3, 2)$.

Contrastando los dos métodos de enseñanza se constata que el primero utiliza básicamente la definición de valor absoluto y procedimientos algebraicos.

En el método segundo hay que construir una inecuación equivalente a la dada, cuyos miembros sean funciones de trazado geométrico sencillo, para posteriormente conjugar las gráficas de:

a. La función $g(x) = |x + 2|$.
b. La función opuesta de la anterior: $-g(x)$.
c. La función trasladada de la anterior: $-(x) + 5$.

lo que nos permitirá combinar al mismo tiempo las de

$$f(x) y - g(x) + 5.$$

y extraer sus puntos de corte. Por último, se localizará la solución en el eje de abscisas.

En resumen, este último método conjuga varios conceptos matemáticos al mismo tiempo, **y es en esta combinación de ideas donde pensamos que existe creatividad.** Esta observación está ciertamente en consonancia con las reflexiones apuntadas anteriormente por autores como Poincaré, Einstein, etc., sobre el acto creativo.

Los profesores que hacen suyo el segundo de los métodos de resolución señalados entrarían dentro del grupo de profesores visuales, es decir, aquellos que utilizan fundamentalemente presentaciones visuales cuando enseñan matemáticas, entendiendo por ello **formas de enseñar donde predominan el uso de imágenes**, con o sin diagramas, incluso aunque se empleen complementariamente métodos o razonamientos algebraicos.

Según la investigación de Presmeg, las características manifestadas por los profesores visuales en su enseñanza podrían considerarse como asociadas a un tipo de mente que incluye aspectos de persoanlidad asociados con la **creatividad**.

En esta investigación los profesores utilizaron diferentes formas para presentar los conceptos y estuvieron más inclinados a potenciar diferentes métodos de solución de los problemas por parte de los alumnos. En contraste, los profesores no visuales fueron más propensos a presentar la materia desde el principio de una forma más rigurosa y lógica.

El ejemplo desarrollado anteriormente nos ha servido para reflexionar sobre **enseñanza**; a continuación, exponemos soluciones a diferentes niveles de creatividad de un problema matemáticamente sencillo lo que nos servirá para reflexionar sobre **aprendizaje**.

Ejemplo 2

Del álgebra al aprendizaje intuitivo.

Un rebaño de ovejas crece cada año 1/3 de su número y al final de cada año se venden 15. Después de vender las 15 del final del segundo año quedan 221. ¿Cuántas habían al principio?

Método 1. (Algebraico).

$x + x/3 - 15 = (4x - 45)\backslash 3.$

$(4x - 45)/3 \pm (1/3).(4x - 45)/3 - 15 = 221.$

Una vez resuelta la ecuación se llega a que $x = 144$.

La solución del problema, se obtiene a través de una ecuación algebraica. Solamente se necesita fijar la incógnita x, en nuestro ejemplo el número inicial de ovejas del rebaño y plantear correctamente la ecuación. El alumno finalizaría el proceso comprobando la solución.

Método 2. (Método Alternativo).

Mostrando la solución mediante una representación gráfica:

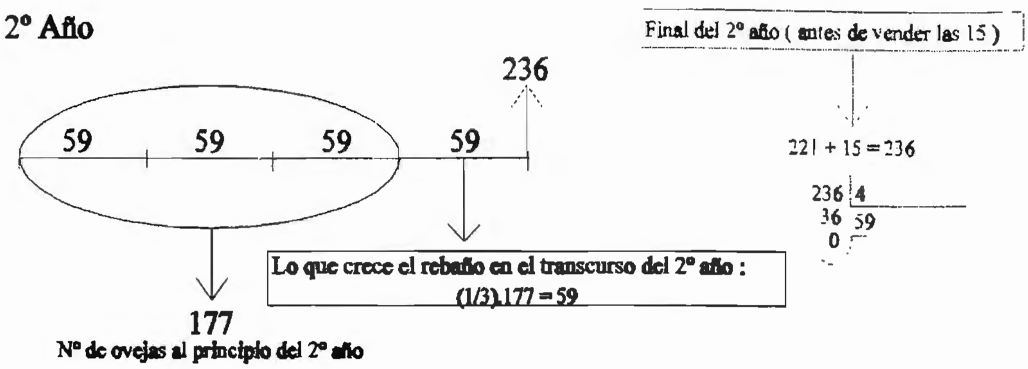

Fig. 2.a.

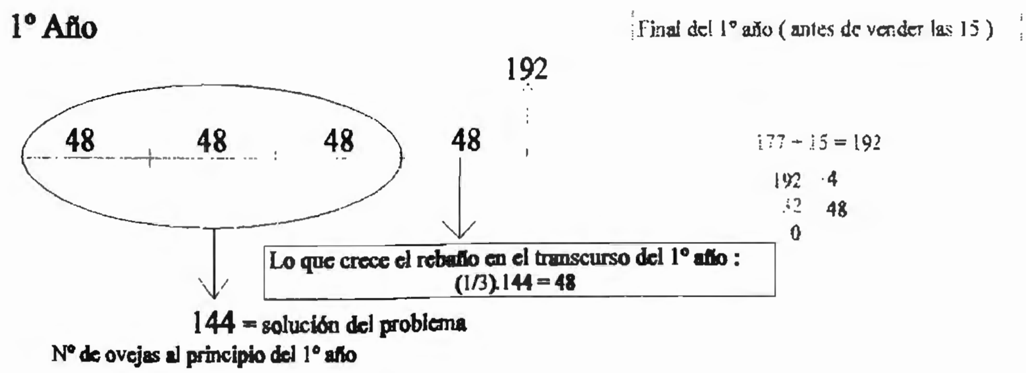

Fig. 2.b.

Los gráficos anteriores se corresponden con una solución, que se ha construido a partir de la situación final, para posteriormente, ir argumentando hasta llegar al comienzo del primer año.

Al final del segundo año y antes de vender las 15 habrá:

$$221 + 15 = 236$$

- El número 236 lo dividimos entre 4 para saber lo que crece el rebaño ese año, es decir, un tercio de las que habían al principio del mismo: 59. Por tanto:
- Al principio del segundo año había 59.3 = 177 (Fig. 2.a.). Reiterando el proceso, como se ve en la Fig. 2.b., se obtiene la solución 144.

En el primer método se plantea una ecuación que es como la traducción de un lenguaje a otro:

Expresamos con símbolos matemáticos una condición propuesta con palabras.

En el segundo nos concentraremos en el fin deseado, analizando la posición final y retrocediendo a posiciones precedentes; recurrimos a un modelo intuitivo aprovechando las características temporales del enunciado:

La mente visualiza los hechos y los representamos en diagramas secuenciales.

Este modelo intuitivo resuelve el problema de una forma genuina, pero haciendo uso de la naturaleza lógico - deductiva de la matemática.

Comparando los dos métodos utilizados para la resolución de este problema se observa que el primero de ellos es a "un bajo nivel de creatividad matemática", mientras que el segundo requiere un más alto nivel de la misma (Ervynck, G, 1991).

II. La imagen como herramienta para la resolución de problemas y la construcción de conceptos

Además de su papel en su pensamiento creativo, el uso de imágenes mentales puede ser una buena estrategia para resolver problemas matemáticos y construir y consolidar conceptos a distintos niveles de dificultad. Muchas veces la contrucción de una imagen puede ayudar a representar la esencia de un concepto matemático, y también ayudar a que surja una solución inmediata en la resolución de un problema.

Avalamos esta afirmación con algunos ejemplos.

Ejemplo 3.

Construyendo diferentes imágenes.

Un romboide de lados 10 y 4 cms, y ángulo agudo 30 grados gira en torno al lado mayor. Comprobar que el volumen del cuerpo engendrado es $40.\pi$ cm^3.

Para poder enfrentarse al problema es primordial **construir** una imagen del cuerpo engendrado. Este proceso de construcción es muy personal y algunos estudiantes han recurrido a imágenes de objetos concretos como cohetes espaciales, cohetes de ferias, cucuruchos de helados, puntas de lápices, plomadas, etc., las cuales les han ayudado a dar sentido al problema.

Una vez construida la imagen, ésta se puede **transformar** en un cilindro para encontrar la solución de una manera rápida (Fig. 3). Algunos estudiantes dicen:

> **"la punta de arriba es lo que se quita por debajo, así que sólo hay que calcular el volumen de un cilindro".**

En la búsqueda de la solución han estado implicados diferentes procesos como: construir, representar y tranformar las imágenes. Estos procesos han sido investigados con más detalle por Kosslyn (1983) y Wheatley (1990).

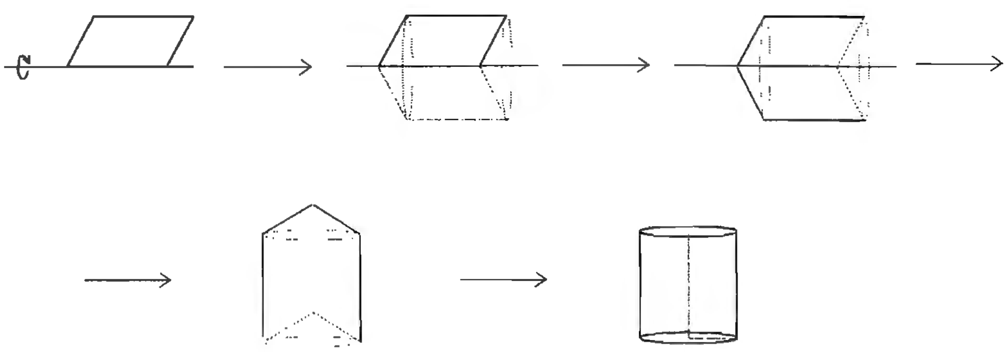

Fig. 3.

Ejemplo 4.

Oyendo a los estudiantes.

Calcular el área de la parte sombreada de la siguiente figura.

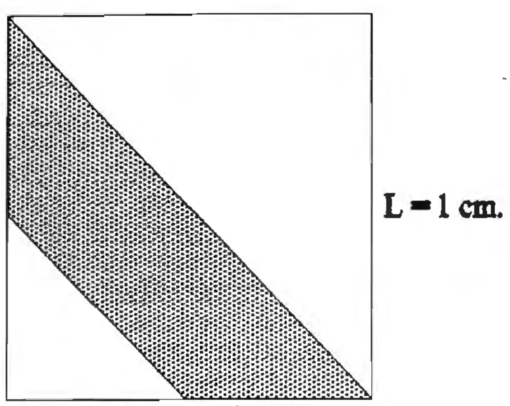

Fig. 4.a.

Una de las soluciones a este problema podría obtenerse por sustracción de las áreas de dos tríangulos, cuyas bases y alturas son conocidas.

Observando la figura, es fácil darse cuenta que el área pedida es:

"el área del triángulo grande (en blanco) menos el área del triángulo pequeño (en blanco)".

La solución es inmediata:

$$\text{Área} = \frac{1 \cdot 1}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8} = 0.375 \text{ cm}^2$$

Evidentemente es un problema que no ofrece excesivas dificultades, sin embargo, para algunos estudiantes sobre todo en los primeros años de Secundaria, no es fácil de resolver.

Un estudiante, llamémoslo estudiante A, vio la figura a estudiar como un trapecio, lo cual es correcto, pero esa imagen fue "tan fuerte" que le impidió ver cualquier otra posible estrategia. Intentó sin éxito encontrar el área del trapecio.

Otro estudiante, B, resolvió el problema de la siguiente manera: Dividió el cuadrado en cuatro partes y observó que tres de esas partes eran exactamente iguales, salvo algún tipo de rotación, como se observa en la figura 4.b y la figura 4.c.

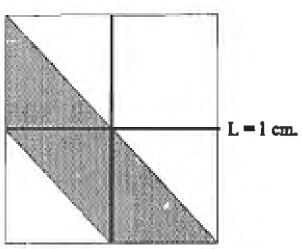

Fig. 4.b.

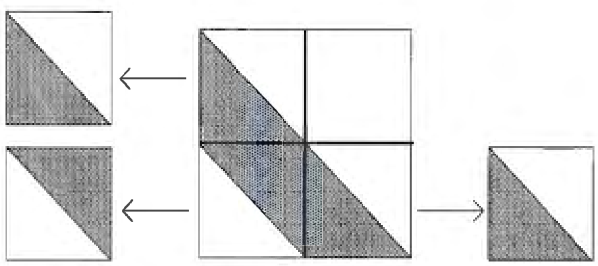

Fig. 4.c.

Una vez hecha esta construcción, rápidamente se dio cuenta de la solución del problema, argumentando que bastaría calcular el área de cada una de las partes (0.25 cm^2), dividir por dos (0.125 cm^2) y sumar tres veces esta cantidad (0.375 cm^2)[1].

Contrastando la actuación matemática de estos estudiantes, queremos hacer notar que en el caso del estudiante B, la contrucción de una imagen del proble-

[1] Estos resultados han sido entresacados de unas entrevistas que mantuvo uno de los autores de este artículo con estudiantes de Secundaria.

ma y su habilidad para visualizar, utilizando imágenes dinámicas (Presmeg, 1986), le permitió resolver el problema con éxito. **La imagen dio sentido al problema y permitió encontrar la solución.** Para el estudiante A la construcción de una imagen concreta (Presmeg, 1986) le impidió pensar en otras posibilidades, quedándose "atrapado" en un camino donde sus estrategias, sus conocimientos aún no suficientemente amplios, no le ayudaron a salir con éxito.

Trataremos más adelante algunos ejemplos donde la imagen conceptual en el sentido Vinner, puede crear algunos obstáculos en el pensamiento de los estudiantes.

Ejemplo 5.

Sobre la no completitud de Q.

Uno de los aspectos más significativos del Análisis Matemático es, sin duda, el relacionado con la completitud de ℝ. Cuando se introduce axiomáticamente el cuerpo de los números reales los profesores de Matemáticas ponemos especial interés en el axioma relativo a la existencia de extremo superior para subconjuntos acotados de R. Este axioma se enuncia de la siguiente manera:

Axioma de Completitud de ℝ:

"Todo conjunto no vacío de ℝ, acotado superiormente, tiene extremo superior"

Es evidente que la definición axiomática de ℝ plantea, fundamentalmente, el problema de demostrar la existencia de un conjunto que verifique "todos los axiomas" enunciados. Por otra parte, y desde un punto de vista pedagógico, tiene interés de investigar si algunos de los axiomas más representativos de R dejan de verificarse en ciertos conjuntos utilizados cotidianamente. En particular, es interesante analizar conjuntos que no cumplan el axioma de Completitud.

Tratemos de investigar esta cuestión desde una óptica visual, ya que la mayoría de los libros de textos no utilizan ningún tipo de imágenes a la hora de analizar estos conceptos.

Se sabe que uno de los conjuntos que no verifican el citado axioma es el de los números racionales; es decir, en Q existen subconjuntos no vacíos acotados superiormente, que no tienen extremo superior, y decimos que **"Q no es Completo".**

Utilicemos uno de esos subconjuntos para profundizar en esta situación desde un punto de vista en el que conjugaremoss aspectos analíticos, por una parte, y visuales por otra, apoyándonos en gráficos que permitan al alumno mejorar "las imágenes mentales" que este problema suscita.

Consideremos el subconjunto de los números racionales S definido de la siguiente forma:

$$S = \{x \in Q^+ \, U \, \{0\} \, / x^2 < 2\} \subset Q$$

Encontramos la representación del conjunto S en la figura adjunta (Figura 5.a.):

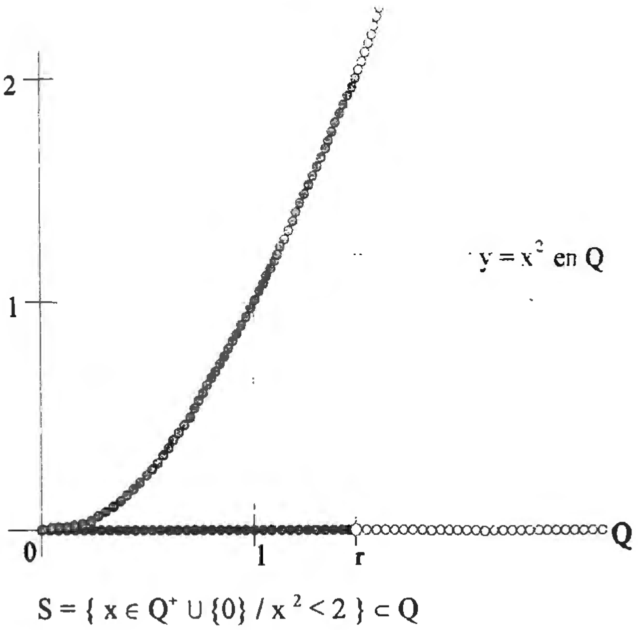

Fig. 5.a.

Veamos algunos ejemplos numéricos:

$0 = \frac{0}{1} \in Q$ y $0^2 = 0 < 2 \;\; 0 \in S$, $\qquad \frac{1}{2} \in Q \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.25 < 2 \;\; \frac{1}{2} \in S$,

$1 = \frac{1}{1} \in Q$ y $1^2 = 1 < 2 \;\; 1 \in S$, $\qquad 1.4 = \frac{14}{10} \in Q$ y $(1.4)^2 = 1.92 < 2 \;\; 1.4 \in S$,

$1.42 = \frac{142}{100} \in Q$ y $(1.42)^2 = 2.0164 > 2 \;\; 1.42 \notin S$ (1.42 es cota superior de S),

$1.5 = \frac{15}{10} \in Q$ y $(1.5)^2 = 2.25 > 2 \;\; 1.5 \notin S$ (1.5 es cota superior de S).

Estos ejemplos sencillos nos permiten fijar ideas sobre los elementos que pertenecen o no a S (Figura 5.b) y, al mismo tiempo, comprobar que S está acotado superiormente. Nótese que el irracional r = $\sqrt{2}$ estaría justo en la frontera de S, pero no podemos contar con él, ya que no se trata de un número racional.

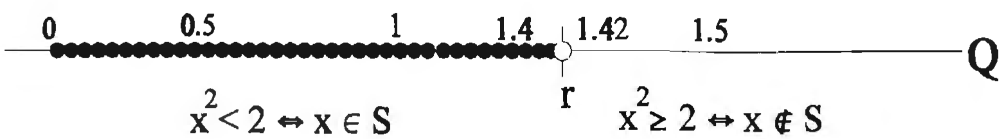

Fig. 5.b.

Hagámonos la siguiente pregunta:

¿ Tendrá S extremo superior ?

Es decir, de entre las infinitas cotas superiores de S,

$$\mu_1, \mu_2, \ldots\ldots, \mu_n, \ldots$$

¿ existirá una μ E Q que sea la menor de todas ellas ?

Supongamos que tal μ exista, o lo que es lo mismo, supongamos que $\mu = \mathrm{Sup}\,(S)$.

¿dónde se encontraría este extremo superior?

Existen dos alternativas:

a) Lo más lógico es pensar que a la derecha de r "muy próximo" a r, con lo que $\mu^2 > 2$ (ya que μ^2 no puede ser 2).

b) No podemos rechazar la posibilidad de que μ se encuentre a la izquierda de r (aunque parezca menos lógica) y, en este caso, se tendría: $\mu^2 < 2$.

Demostremos que para la opción A) siempre podremos encontrar un $k \in Q+$ tal que $(\mu - k)^2 > 2$ y, en consecuencia, μ no sería la cota superior "más pequeña".

De igual forma para el caso B) siempre podremos encontrar $h \in Q+$ tal que $(\mu + h)^2 < 2$, lo que nos dice que $\mu + h \in S$ y como $\mu < \mu + h$, por ser $h > 0$, μ no sería el extremo superior de S, contra los supuesto.

Si antes de pasar a las demostraciones visualizamos ambas posibilidades (Figura 5.c.), las imágenes conceptuales asociadas deben aclarar las ideas:

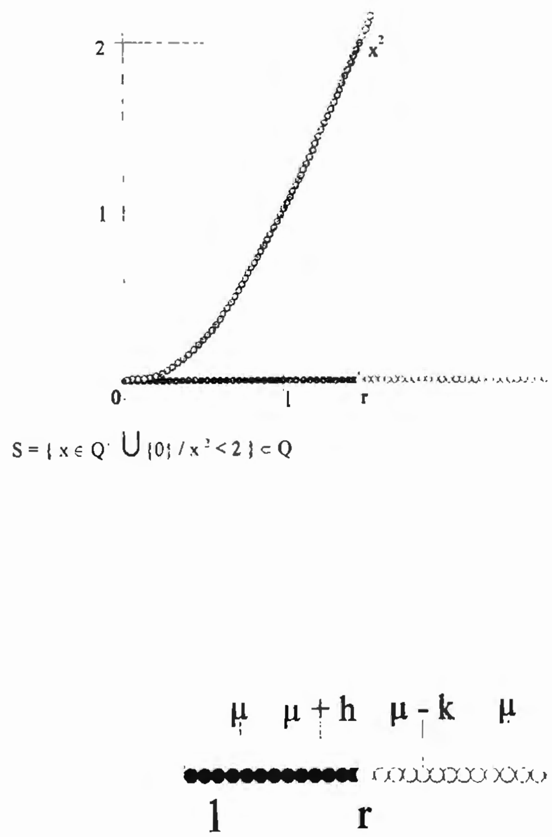

Fig. 5.c.

Analicemos en primer lugar B):

Si μ E S μ2 < 2; Si tomamos h E Q+ /0 < h < 1 y h < $\frac{2-\mu^2}{2\mu+1}$ se tendrá que (μ + h)2 <2.

En efecto:

(μ + h)2 = μ2 + 2μh + h2 < μ2 + 2μh + h = μ2 + (2μ + 1).h < μ2 + 2 – μ2.= 2

Analicemos ahora A):

Si μ E Q – S μ2 ≥ 2 μ2 > 2; Si tomamos k E Q+/k > 0 y k < $\frac{\mu^2-2}{2\mu}$ se tendrá que (μ – k)2 > 2.

En efecto:

(μ – k)2 = μ2 – 2 μk + k2 > μ2 – (μ2 –2) + k2 = 2 + k2 > 2

(Hemos tenido en cuenta que k < $\frac{\mu^2-2}{2\mu}$ equivale a –2μh > – (μ2 – 2)).

Hasta ahora hemos expuesto distintos ejemplos donde la imagen juega un papel primordial tanto para la resolución de un problema como para la construcción de un concepto. **Pero la imagen no siempre es la panacea**. Ilustramos con algunos ejemplos situaciones donde la representación gráfica de una idea puede inducir a confusiones.

Ejemplo 6.

Sobre la imagen de una función discontinua.

Del cálculo infinitesimal sabemos que si f es una función real de variable real definida en un intervalo [a, b], es decir:

f:[a, b] ℝ/x E [a, b] f(x) E ℝ

entonces, x0 E [a, b], se tiene el siguiente teorema:

"f derivable en x0 f continua en x0"

Esta proporsición es equivalente a su contrarrecíproca:

"f no continua en x0 f no derivable en x0"

Teniendo en cuenta esta segunda proposición y si analizamos las tres funciones definidas en el intervalo [1, 3], (véase la Figura 6),

fi: [1, 3] ℝ ℝ, i=1, 2, 3.

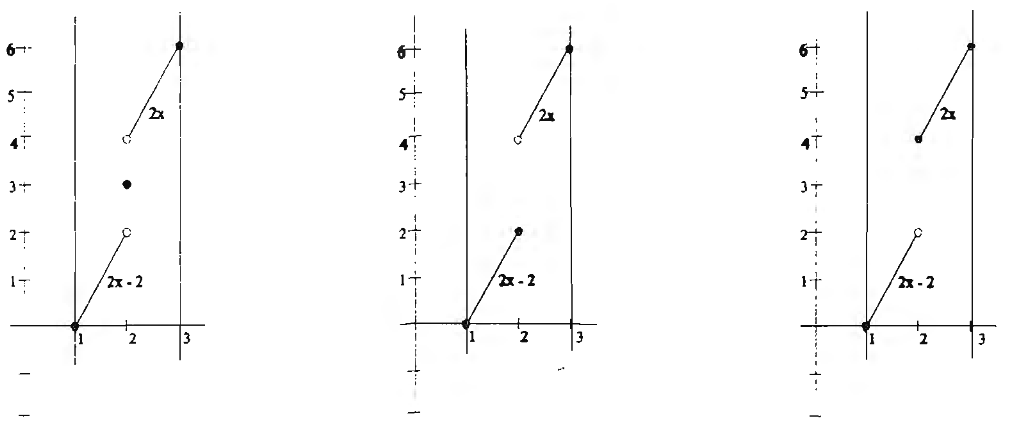

Fig. 6

$$f_1(x)=\begin{cases} 2x-2 & 1 \le x < 2 \\ 3 & x = 2 \\ 2x & 2 < x \le 3 \end{cases}$$

$$f_2(x)=\begin{cases} 2x-2 & 1 \le x \le 2 \\ 2x & 2 < x \le 3 \end{cases}$$

$$f_3(x)=\begin{cases} 2x-2 & 1 \le x < 2 \\ 2x & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

se observa que son funciones no continuas en el punto $x = 2$. Sin embargo, muchos estudiantes aseguran, "alegremente", que las tres son derivables en ese punto, argumentando que, como se ve en la imagen gráfica, las pendientes de las semirrectas tangentes a ambos lados del punto $x = 2$ (las derivadas laterales), son iguales. **La representación gráfica lleva a confusión.** Aquí la labor del profesor es estrictamente necesaria para hacerles ver que al utilizar las definiciones de las derivadas laterales como límite de un cociente incremental, el valor de la función f en el punto $x = 2$ juega un papel determinante. Nótese que las derivadas laterales correspondientes a las tres funciones son:

$$f'_1 \begin{cases} f'_1(2+0) = +\infty \\ f'_1(2-0) = +\infty \end{cases}$$

$$f'_2 \begin{cases} f'_2(2+0) = +\infty \\ f'_2(2-0) = 2 \end{cases}$$

$$f'_3 \begin{cases} f'_3(2+0) = 2 \\ f'_3(2-0) = +\infty \end{cases}$$

Este es pues un caso en el que **la imagen no es suficiente para dar la respuesta correcta;** y el apoyo del profesor es necesario para que el concepto quede consolidado.

Ejemplo 7.

Sobre la imagen conceptual de la diferencial.

Algunos conceptos del cálculo diferencial llevan implícitamente asociados ciertas representaciones gráficas, lo que podríamos llamar **"imágenes conceptuales".** Uno de esos conceptos es, sin duda, el de diferencial de una funsión real de variable real en un punto x de su dominio. En la Figura 7.a. damos una "imagen conceptual" de la diferencial de una función f(x) en un punto x, respecto de un incremento de x, y se puede observar en la misma, tanto el valor del incremento de la función en el punto, $\Delta f(x)$, como el valor de la diferencial en el mismo, $df(x)$, constatándose, sin problema, que el incremento de f en el punto **x es mayor** que la diferencial de f.

Cuando explicamos esto en nuestras aulas tal como aparece en la Figura 7.a. todo va bien, los alumnos lo asimilan correctamente, se realizan algunos ejercicios, etc. (**Nótese que la función elegida es creciente en un entorno de x, y el Δx es positivo**).

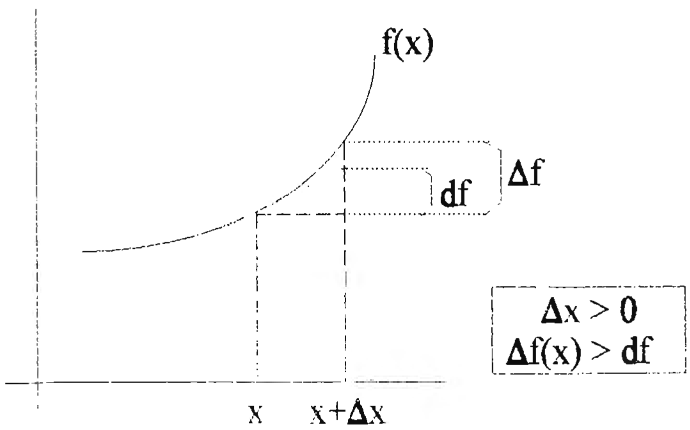

Fig. 7.a.

Ahora bien, la situación cambia si la función elegida es igualmente creciente en un entorno de x, pero su concavidad está orientada en sentido contrario y tomamos el Δx negativo: Figura 7.b.

Consultados, uno a uno, alumnos de primer curso de una Facultad de Ciencias, sobre qué les parecía mayor, si la diferencial de f en x o el incremento de f; **una gran mayoría** contestó que les parecía mayor el incremento de f en x, cometiendo, por tanto, un grave error suscitado precisamente por la representación gráfica conceptual. Este es otro caso típico donde el apoyo del profesor es determinante para consolidar el concepto estudiado.

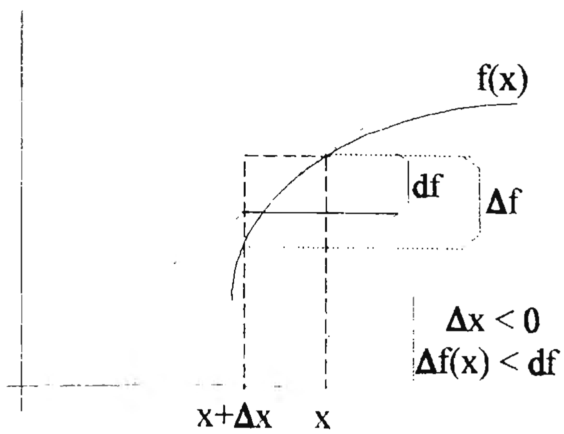

Fig. 7.b.

Reflexiones finales

¿Estimulamos los profesores la creatividad de nuestros alumnos?

¿De qué manera un profesor estimula la creatividad en sus clases?

¿Cómo podríamos diferenciar un razonamiento más o menos creativo?

¿Hasta qué punto los profesores somos conscientes de la diversidad de pensamientos en el alumnado?

¿Hasta qué punto los profesores anulan, potencian o estimulan el desarrollo cognitivo de los estudiantes?

A lo largo de este artículo hemos reivindicado la importancia y el poder de las imágenes y de la visualización, tanto en el pensamiento creativo como en la construcción de conceptos matemáticos, creencia que hemos desarrollado a través de diferentes ejemplos y situaciones.

En la actualidad y afortunadamente, hay cada día más personas en el campo de las Matemáticas, algunas de las cuales hemos mencionado en este artículo, que están convencidas de la poderosa herramienta que constituyen las imágenes en la construcción de las ideas matemáticas, imágnes que no ocultan a los ojos de sus estudiantes.

Una anécdota muy conocida tuvo como protagonista al famoso matemático Norbert Wiener. Se quedó atascado en el desarrollo de una complicada demostración y, rápidamente, se dirigió a una esquina de la pizarra, donde dibujó unas figuras que nadie vio pues quedaban ocultas por su espalda y, que le permitieron continuar la demostración sin problema hasta el final.
(Guzmán, 1996).

Los ejemplos que se exponen en este trabajo han sido elegidos, principalmente, del Análisis Matemático. Dos de los autores de este artículo impartimos Análisis a nivel universitario. Otros ejemplos han surgido de nuestras investigaciones con estudiantes de Secundaria y también a medida que profundizamos en el tema. La visualización tiene análogas implicaciones en otros campos de la matemática que pensamos desarrollar en futuros trabajos.

Coincidiendo con otros investigadores, como Artigue (1991), Presmeg (1991), etc., pensamos que hay mucha labor que hacer en esta línea desde la docencia, transmitiendo a nuestros estudiantes los procesos y destrezas visuales implícitos en el quehacer matemático, y valorando, potenciando y estimulando la realización de estos procesos, y la utilización de imágenes por nuestros estudiantes.

Asimismo, desde la investigación tenemos mucho que profundizar aún. Afortunadamente, hoy disponemos de los ordenadores, poderosas herramienta, y cuyo influjo y poder sobre el quehacer matemático se va dejando sentir en muchos terrenos, uno de los cuales es evidentemente la visualización. Huelga decir que las computadoras son un sistema de representación externo; las imágenes construidas con la computadora no son internas al individuo, pero no cabe duda de que la construcción de imágenes con el ordenador puede fomentar el diálogo interno que se constituye entre lo que pensamos y lo que representamos, y está por investigar si esa utilización favorece la construcción del concepto por parte del estudiante.

Nos gustaría concluir este trabajo con la frase de René Thom (1985):

"Comprender es Geometrizar".

Bibliografía

ARTIGUE, M. (1991). Analysis. En David Tall (Editor). *Advanced Mathematical Thinking*. (pp. 167-196) Kluwer Academic Publishers

ARTIGUE, M. (1996). L´enseignement des debuts de l´analyse: Problemes, epistemologiques, cognitifs et didactiques. *25 años de matemáticas en la Universidad de la Laguna*. (pp. 2753). Secretariado de publicaciones de la Univ. de la Laguna.

ERVYNCK, G. (1991). Mathematical Creativity. En David Tall (Editor). *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers.

FERNÁNDEZ VIÑA, J.A. (1976). *Lecciones de Análisis Matemático*. Editorial Tecnos. Madrid.

FEYNMAN, R. (1988). *¿Qué te importa lo que piensen los demás?* Alianza Editorial.

GÜERRA, P. (22.1. 1996). *Diario de Avisos*. Canarias. Tenerife. 16.

GUZMÁN, M. DE (1996). *El rincón de la pizarra*. Pirámide.

HADAMARD, J. (1945). *The Psychology of invention in the mathematical field*. Dover, New York.

PRESMEG, N. (1985). *The role of visually mediated processes in high school mathematics: a classroom intetigation*. Tesis doctoral (no publicada). Cambridge. England.

PRESMEG, N. (1986). Visualization in High School Mathematics. *For the learning of Mathematics*. 6(3), 42-46.

PRESMEG, N. (1991). Classroom aspects which influence use of visual imagery in high school mathematics. *Actas PME* 15. 191-198.

POINCARÉ (1995). Grandes matemáticos. Temas 1. Número especial de *Investigación y Ciencia*. 2-4.

ROSEMBERT, J.F. (1996). *Reflexiones sobre creatividad*. Conferencia del Profesor de Filosofía. University of North Carolina. Chapel Hill, NC.

SOLANO, A. PRESMEG, N. (1995). Visualization as the relation of images. *Actas PME* 19. Recife. Brazil.

THOM, RENÉ (1985). Diario *El País*. Madrid.

WHEATLEY, G.H. (1990). Spatial sense and mathematics learning. *Aritmetic Teacher*. 37(6), 10-11.

ZIMMERMANN W.- CUNNINGHAM, S. (Editores)(1991). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Whashington, D.C.: Mathematical Association of America.

Nota: Agradecemos al estudiante de la Facultad de Física de la Universidad de La Laguna, Carlos Nobrega Espeleta, por su colaboración en la presentación gráfica de este trabajo.