
De la enseñanza de las ciencias matemáticas y físicas en las universidades y escuelas técnicas superiores¹ (Segunda y última parte)

HISTORIA
DE LA
EDUCACIÓN
MATEMÁTICA

Educación Matemática
Vol. 10 No. 2 Agosto 1998
pp. 133-139

Felix Klein, Goettingue

II. De los estudios necesarios para aquellos que se destinan a la enseñanza de las matemáticas y de la física

Como base de la discusión que sigue, sólo tomaré en cuenta el estado de cosas que presenta hoy la Alemania del norte (estado de cosas difícilmente comparable con el de la Alemania del sur). Adicionalmente, pondré siempre el acento, en primera línea en la cultura matemática de los candidatos a enseñantes, y esto no sólo porque esta cultura me atrae más que la cultura en materia de física, sino porque, en este tema, las dificultades parecen resurgir con un relieve excepcional.

Para empezar, algunas palabras sobre el desarrollo histórico. Como bien se sabe, desde hace sólo unos 75 años nuestros programas universitarios presentan una subdivisión especial en la instrucción de los estudiantes que serán enseñantes de ciencias matemáticas y naturales². Antes de ello, las exigencias eran tan modestas en cuanto al nivel demandado como numerosas por su extensión múltiple (naturalmente, abarcaban todas las ciencias naturales en sus múltiples disciplinas). La ciencia de alto nivel, como tal, tenía poco espacio en los exámenes de capacidad, cuando menos en lo que se refiere al contenido matemático. Prueba de ello es que ni Gauss, ni Dirichlet, ni Riemann formaron parte jamás de los jurados de examen, tampoco lo fueron Jacobi, Kummer, Weierstass o Kronecker.

A mediados de la década 1860-1870, se acentuó la tendencia hacia los altos estudios. Cada vez más los matemáticos de altura forman parte de los jurados de examen, y el programa de pruebas de 1866 exige candidatos en términos que no dejan lugar a dudas: "que hayan penetrado bastante adelante en el dominio de la geometría y del análisis superior y en el de la mecánica analítica, para poder librar ahí, con éxito, investigaciones personales". La elevación en el nivel científico que se produjo de inmediato se acompañó, naturalmente, de una delimitación del campo de estudios, en el dominio mismo de las matemáticas. La primera rama que sufrió las consecuencias fue la matemática aplicada, que, al menos bajo la forma de estudios de astronomía y de geodesia, habían jugado un papel considerable hasta entonces. Aún en las matemáticas superiores, el interés se concentró en tal o cual objeto,

¹ Traducido del alemán por A. Dufour (Ginebra) de acuerdo al texto alemán publicado por *Jahresbericht der D. M. V.*, Octubre, 1905. [En donde se emplea el término "Escuela Superior" sin otro calificativo significa indiferentemente "Universidad" o "Escuela Técnica Superior", mientras que el término de "Escuelas Superiores" (*hohere Schulen*) se reserva a las escuelas que, inferiores a las Escuelas Superiores, preparan y conducen a ellas. N.T.F.]. *L'Enseignement Mathématique*, Huitième Année, 1906, pp 5- 25.

² Ver mi memoria relativa a "Cien años de enseñanza matemática en las Escuelas Superiores de Prusia" en el recuento general de Lexis sobre la reforma de la enseñanza escolar superior en Prusia. Halle, 1902; reimpresso en el 13º volumen de *Jahresberichte der D. Math. Ver.*, pp 347-356. N.A.

según que ese objeto estaba dentro de las preferencias de tal o cual especialista (geometría moderna, teoría de invariantes, teoría de funciones, en particular de funciones elípticas, ecuaciones diferenciales lineales, etc., etc.). Los *Seminarios* universitarios, fundados en sus orígenes para formar instructores capacitados, se transformaron cada vez más en colegios destinados a la instrucción de gente dedicada a las investigaciones científicas.

Todo este desarrollo descansa, ya sea consciente o inconscientemente, sobre esta concepción fundamental, que la utilidad de los estudios universitarios para los estudiantes destinados a la enseñanza se debe buscar únicamente en su valor formal. Según esta teoría del *objeto* de los estudios matemáticos se trata exclusivamente de la *concentración* y del *esfuerzo* que se dedica a este objeto. Pero las experiencias que se han tenido en las escuelas con los instructores formados en este método, en general, no han sido favorables. De la misma manera, pronto lo hemos visto manifestarse en la enseñanza universitaria cuyas tendencias apuntan a una cultura matemática menos exclusiva, y a una atención mayor a las necesidades reales de las escuelas inferiores. Si hoy, en muchas universidades, se ofrece a los futuros instructores, mesas de lectura y de trabajo con ricas bibliotecas, si enseñamos la geometría descriptiva y otras ramas de la matemática aplicada, todos estos progresos fueron sugeridos por el deseo de hacer más fructífera, para las escuelas, la enseñanza matemática futura de los aspirantes a instructores, siempre guardando su carácter científico. Inútil insistir, son las cosas que, en los últimos años, se han puesto a plena luz en sus diversas facetas³. Ruego, sin embargo, a mis colegas que sean tan amables de hacerme saber si estas ideas se encuentran aplicadas por doquier de manera satisfactoria, y si, por así decirlo, se ha llegado a aplicar un programa *normal*, cuya naturaleza garantice la futura aptitud práctica de los estudiantes que se dedicarán a la enseñanza.

Admitamos que esta organización normal existe ya; no comparto menos la opinión de muchos de mis colegas: hace falta llegar a algo más⁴. Se ha podido caracterizar fácilmente el sistema actual de educación matemática como algo que a menudo sólo es un sistema que tiende a un "doble olvido". En la universidad, en efecto, se empieza por hacer de lado las matemáticas aprendidas en las escuelas inferiores, para hacer lo mismo después del examen de capacidad y la conquista

³ Sólo quiero mencionar aquí las más recientes memorias sobre estos temas que aparecen en los *Jahresberichte der D. Math. Ver.* Estas son: Staeckel, "Angewandte Mathematik und Physik an den deutschen Universitäten" (Vol. 13, 1904, 313-341). Gutzmer, "Ueber die auf die Anwendungen gerichteten Bestrebungen in mathematischen Unterricht der deutschen Universitäten" (ibid. 517-523). Holzmüller, "Bemerkungen über den Unterricht und die Lehramtsprüfung in der angewandten Mathematik" (Vol. 14, 1905, 249-274). Sería ciertamente deseable que se pudiera hacer obligatorio, para todos los matemáticos, un cierto grado de conocimiento de matemáticas aplicadas. No habría que presentarlas como algo extraño o especial, que existen al lado o por fuera de las ciencias matemáticas puras, sino como una rama que forma parte, de manera natural, de la cultura matemática normal. Es por esto que cursos introductorios semejantes me parecen tan útiles para los candidatos a la carrera pedagógica, cursos en los que los intereses de la matemática pura y los de las matemáticas aplicadas se condicionan y se compenetran. Es así como mi colega Runge ha dado, en el último semestre de verano y con el más grande éxito, un curso de cálculo diferencial e integral (3 horas de exposición y 3 horas de ejercicios prácticos), curso que continuará en el próximo invierno en forma idéntica. N.A.

⁴ Véase, por ejemplo, Stäckel, en el volumen 13 de los *Jahresberichte*, 524-530: Sobre la necesidad de los cursos regulares en las universidades de matemáticas elementales. —Yo mismo he dado cursos parecidos, bajo nuevas formas, en el otoño de 1904 y espero poder pronto publicar los detalles de los resultados obtenidos—. La propuesta de Stäckel no excluye, naturalmente, la posibilidad de ofrecer, en muchos cursos superiores, datos ocasionales sobre las ciencias naturales, sobre aplicaciones prácticas modernas, y sobre el desarrollo histórico del objeto tratado, así como ejemplos sacados de casos especiales. Todo esto no puede más que ser útil a la actividad escolar futura de la audiencia. N.A.

del diploma, con respecto a ¡los conocimientos superiores adquiridos en el intervalo! Al encontrar este estado de cosas nos preguntamos por los estudiantes que se destinan a la enseñanza de los *cursos especiales que establecen y dan luz sobre las relaciones múltiples y necesarias que existen entre las matemáticas superiores y el dominio de la instrucción escolar*, —cursos cuyos efectos bienhechores y durables no dejarán de manifestarse y de prolongarse en la actividad escolar futura de quienes los frecuenten. A estos cursos se vincularán fácilmente las consideraciones pedagógicas sobre la naturaleza y el propósito de la enseñanza matemática en todos los grados. Sin duda, hemos confiado la iniciación de los futuros instructores a los métodos escolares a los “*Seminarios prácticos*”, adjuntos en Prusia a las Escuelas Superiores desde hace unos quince años, pero esto no excluye la posibilidad deseable, de que nos extendamos dentro de los cursos universitarios, a las cuestiones *generales* que llevan a las matemáticas al punto de vista pedagógico, cuestiones que tienen naturalmente poco espacio en los cursos ordinarios de pedagogía, como los que dan en los colegios de la facultad de filosofía, que, naturalmente, conciben sus lecciones partiendo, principalmente, de sus propios antecedentes filosóficos.

Los candidatos en matemáticas que hayan encontrado en la universidad una educación como la que he tratado de definir bajo estas diversas faces, podrían, ciertamente, responder a las exigencias de la enseñanza matemática reorganizada conforme a las recomendaciones hechas a Meran. Ojalá que se quiera ver también, que estas recomendaciones tenderían a facilitar considerablemente la orientación en la enseñanza universitaria y politécnica hacia los lados prácticos de la carrera futura de los instructores. De hecho, su adopción suprimiría el abismo que subsiste entre las matemáticas escolares y las matemáticas superiores, ya que, desde ese momento, las mismas nociones que presiden la enseñanza de las segundas penetrarían en la enseñanza de las primeras. Hasta ahora, un curso de matemáticas elementales parece ser, en el ciclo de los cursos universitarios, un elemento singular y excepcional; desde este momento, sería posible relacionarlos con los otros elementos de este ciclo.

Consideraciones semejantes se legitiman en lo que concierne a nuestros candidatos a *la enseñanza de la física*. No podríamos dispensarnos de reclamar una extensión correspondiente de esta enseñanza (extensión que ya se ha cumplido en muchos lugares, o al menos se ha iniciado). Quiero hablar del camino que conduce a la demostración personal hecha por el estudiante; de los trabajos prácticos de laboratorio, concebidos en el sentido de la enseñanza ulterior que dará quién los desarrolle; de la fabricación personal de los aparatos más simples, - en fin, de los desarrollos muy generales sobre el método y la organización de la enseñanza de la física. Estos progresos, en lo que concierne a la enseñanza de la física, parecen menos arduos de realizar que los de las matemáticas, porque la enseñanza de la física jamás se ha separado de una cierta media, como, por el contrario, lo ha hecho, indudablemente, la enseñanza de las matemáticas.

No obstante, se plantea una *enorme pregunta*: ¿de dónde tomar los tiempos indispensables para esas ampliaciones a los programas de las Escuelas Superiores, por deseables que estas sean? Sin duda, se puede aumentar el número de profesores y multiplicar los locales necesarios, pero *la capacidad comprensiva de nuestros estudiantes tiene una magnitud de media constante, la cual, evidentemente, estamos obligados a tener en cuenta*.

Digámoslo de golpe, la eventual prolongación de la estancia en la universidad no merece ni siquiera que se le discuta. Si se le debe aligerar, es necesario que venga de otro lado. En Goettingue, donde están ricamente representadas las diversas ramas de la matemática y de la física, hace mucho tiempo que probamos el sistema "facultativo". Nosotros sólo reclamamos la unidad de cultura que es absolutamente indispensable y, por lo demás, dejamos la elección a cada uno, en cuanto a las posibilidades que le ofrece la variedad de cursos. En otras universidades, se preferirá quizás hacer predominar un plan de estudios determinado, lo que podría, muy bien, ser más beneficioso para el estudiante. Se podrá llegar también a fijar ciertas normas para las condiciones de obtención del diploma en matemáticas y en física. *Pero un entendimiento, después de una discusión razonada, entre especialistas de las diversas universidades me parece muy particularmente deseable.*

Se debe mencionar aquí una condición previa a esto, que resulta de una pregunta todavía más apremiante. Los mismos problemas que discutimos aquí, se presentan en cuanto a la preparación universitaria de los futuros instructores de ciencias biológicas y de química (y aún mucho más, en tanto que las propuestas de Meran prevén una transformación muy importante en la enseñanza de la biología en las escuelas preparatorias superiores, dicho de otra manera, de esa enseñanza en la esfera escolar). Sea en la línea matemático—física, sea en la línea biológico—química, parece indispensable una cultura especial (*fachmännisch*) del candidato. ¿Será entonces posible, en el futuro, conservar un vínculo común, así sea muy ligero, entre estas dos líneas de estudio o nos hace falta trabajar en el sentido de una separación completa, hermética, podría yo decir?

Yo no dudo en adherirme a este último partido. Si el estudiante en matemáticas o en biología, después de haber hecho honor a las ramas que le son lógicamente indispensables, conserva todavía un sobrante de energía disponible, que complete a su gusto y libremente su cultura científica. Por lo demás, semejantes complementos son de una utilidad claramente evidente. Algunos conocimientos de química (y de mineralogía) son indispensables para todo físico, así como cierta familiaridad con la física, para el químico. El biólogo debe tener ciertas nociones de higiene, así como el matemático debe conocer algo de astronomía. Y a cada uno, aún dentro de su propio dominio, un estudio de la filosofía, hecho desde el punto de vista de sus especialidad, será muy útil. Si hay lugar para agregar algo más a las ramas sobre las que trata el examen de capacidad, yo recomiendo, además del *propedéutico filosófico*, muy particularmente la *geografía* (porque se relaciona, con facilidad relativa, con los estudios matemáticos y de ciencias naturales)⁵.

Los consejos escolares, habituados a la amalgamación tradicional de las matemáticas y de las ciencias naturales, no se van a adherir, de propio gusto, a la separación sobre la que he argumentado, y sospecho hasta en el campo de los especialistas, tanto matemáticos como biólogos, se encontrará, aquí y allá, alguna oposición a la tesis que sostengo. Uno puede demandar que, como hasta ahora, el matemático adquiera lo que le es necesario, en lo que toca a los conocimientos

⁵ De esta manera, el biólogo podrá emplearse útilmente aún en el gimnasio clásico no modificado (lo que es muy importante en presencia de las resoluciones de Meran, que sólo reclaman una enseñanza de la biología demasiado avanzada para las clases superiores de las escuelas "reales", y acentúan, por otra parte, la necesidad de una cultura especial muy completa, profesional, podríamos decir, de los biólogos).

biológicos, para conquistar los grados inferiores en estas ramas, y que el biólogo haga lo propio en lo que concierne a las matemáticas y la física. En ese caso, yo recomiendo, en oposición a lo que se practica hoy día con resultados poco alentadores, un sistema que haga *más accesible* el "grado inferior". Los especialistas en matemáticas, en física, en química, y en las diversas ciencias, incluida la biología, deberán, en cada universidad, reunirse y ponerse de acuerdo en un programa de exámenes bien claro pero poco extenso. Es lo que, me dicen, acaba de pasar en Muenster. Deberán también atender a la organización de cursos y ejercicios prácticos que no sobrecarguen al estudiante más allá que lo estrictamente necesario. Se podría también pensar en ligar las pruebas a un diploma de grado inferior, a un *examen intermedio* destinado a quienes aspiran a conquistar el grado superior. Siempre me he declarado simpatizante de la creación de un grado intermedio de este tipo, y creo que el carácter científico de los estudios, a los que se incorporan los candidatos a enseñantes, sólo puede beneficiarse.

Renuncio a desarrollar más las posibilidades indicadas arriba. Prefiero bosquejar, en el apéndice, otras dos cuestiones igualmente apremiantes, la de la preparación razonada de los futuros instructores y profesores de matemáticas y de física en las Escuelas Técnicas Superiores, y la de la cultura adicional que podrían y deberían adquirir los instructores actualmente en ejercicio.

III. Apéndice

- A. Por lo que concierne a la educación racional en las Escuelas Técnicas Superiores de los candidatos a enseñantes, el reglamento prusiano de exámenes comprende, en los tres años de estudios requeridos, hasta tres semestres aprobados en estas escuelas técnicas. Así, los candidatos a enseñantes no reciben entonces su certificado de capacitación sólo de la universidad, y esta combinación ofrece un campo considerable a las influencias prácticas de la técnica. No obstante, los resultados conocidos demuestran que este sistema sólo ha producido frutos bastante ilusorios. La principal razón de ello es que, en las escuelas técnicas de Prusia, hasta ahora, no existen cursos ni ejercicios prácticos destinados especialmente a los candidatos a enseñantes y éstos se ven obligados a asistir únicamente a las lecciones ordinarias hechas para los futuros ingenieros. Por otra parte, sólo podría prosperar efectivamente alguna combinación especial para la enseñanza si se tornar posible y se adapta una verdadera unidad de estudios. Así cada vez más me convengo de la necesidad de crear, dentro de nuestras Escuelas Técnicas Superiores, un programa *completo*, dirigido a candidatos a la enseñanza de las matemáticas y la física. (Esto existe desde hace tiempo en las instituciones análogas de Alemania del sur, y es el objeto de un deseo constantemente expresado en Alemania del norte, por los círculos interesados). Y esto implica, necesariamente la participación de los profesores de las escuela superiores técnicas, que han sido encargados de instruir a los candidatos para las pruebas de capacidad que tendrán que sufrir estos últimos. Al solicitar la discusión sobre este punto, someto también los *considerata* siguientes:

- 1) El propósito de la combinación deberá ser el de valorar, mucho más expresamente, la significación propia de la técnica para nuestra cultura moderna. , en la educación universitaria de los candidatos, —mucho más expresamente, diría yo, que la sola creación de cursos de matemáticas y de física aplicada, como es generalmente el caso en las universidades.
 - 2) No se trata, como se ha expresado el temor, de introducir en las Escuelas Técnicas Superiores un elemento extraño, sino, muy por el contrario, de darle todo el relieve al papel científico.
 - 3) Parecería aún posible insertar dentro de su programa, aquellos cursos superiores de matemáticas y de física de los que he hablado en el primer capítulo, a un nivel más general.
 - 4) Al mismo tiempo, podría, en fin, florecer una rama hasta ahora bastante despreciada en la educación de candidatos a enseñantes; se trata de la preparación sistemática de maestros especiales y de carrera para numerosas escuelas técnicas medias (sin embargo, el desarrollo de este punto, a pesar de su capital importancia, no tendrá espacio aquí).
 - 5) Hace falta también considerar, que para el desarrollo deseado de la enseñanza matemático—física, el interés de los profesores de las ramas que se le relacionan, en cuanto a la tarea propiamente pedagógica reservada a las Escuelas Técnicas Superiores, llegará a ser más viva y más intensa que nunca.
 - 6) Aún las universidades, en el sentido más elevado, se beneficiarán de este progreso, por el hecho de que cierta competencia, en un terreno que hasta ahora les estaba exclusivamente reservado, les será más fructífera que un monopolio que nadie les disputaba.
 - 7) Es evidente que el progreso que reclamo no podría cumplirse sin el incremento correspondiente del personal de enseñantes en las Escuelas Superiores Técnicas.
- B.** Los cambios de método reclamados por las resoluciones de Meran, si de todas formas deben ser adoptados, no podrían esperar a que una nueva generación de maestros alcance la madurez; se trata, muy por el contrario, de ganar para las innovaciones requeridas aquéllos que están actualmente en ejercicio, principalmente los instructores de más edad. Uno puede reconocerle a la administración prusiana el haber resuelto una medida importante desde este punto de vista. Como el reporte de Meran lo menciona, esta administración ha estimulado, en diversos lugares, ensayos de experiencias conformes a las propuestas de la comisión, en lo que concierne a la enseñanza de la matemática y la física. Se proyectan igualmente ensayos análogos en cuanto a las reclamaciones de Meran, relativas a las ciencias biológicas. Esperemos entonces que, de esta misma forma, de diversos centros nos lleguen pruebas, para los círculos escolares, no sólo del carácter practicable de las reformas que reclamamos, sino aún de lo que estas reformas tienen de útil y de importante.

Las discusiones que se producirán, en las reuniones de profesores y de maestros, tanto sobre los resultados obtenidos como sobre las vías seguidas para alcanzarlos, darán a la cuestión mayores espacios y luz. Pero, a mis colegas de las Escuelas Superiores, me permito solicitarles que *tengan a bien, por su parte, tomar en consideración el movimiento que se delinea, al momento de organizar los cursos de vacaciones que darán, y, si hay lugar, organizarlos precisamente desde el punto de vista de este movimiento.*

Los cursos de vacaciones en el dominio de las ciencias naturales sirven, hasta ahora y con bastante utilidad, para mantener a los maestros e instructores al corriente de los progresos recientes de la ciencia. Esto es ciertamente muy importante, por poco que los resultados recompensen el esfuerzo, es decir, en tanto que uno logre hacerse comprender claramente. Pero, a un lado de esto, deberíamos, me parece, aplicarnos siempre más, dentro de los cursos de vacaciones, en hablar del alto significado que representan las partes nuevas y viejas de la enseñanza de las Escuelas Superiores para las vías que se deben seguir en las escuelas que desembocan en la universidad. Sin duda, hace falta también que dentro de esto, los profesores se mantengan, más que hasta ahora, al corriente de las condiciones y del estado de cosas que prevalecen en sus escuelas.

Es por esto que pienso que todos admitiremos que el término tan breve de los cursos de vacaciones, que no pueden actualmente considerarse más que una iniciación pasajera, deberán extenderse hasta constituirse en verdaderos *semestres de perfeccionamiento.*

No tengo dudas de que, sobre todos los temas tratados en la presente memoria, podrán haber sugerencias interesante y ruego encarecidamente a los interesados no guardarse para ellos sus opiniones y sus observaciones⁶.

Goettinguen, fin de septiembre de 1905.

Traducción G. Waldegg

⁶Estas observaciones podrán ser enviadas a la sección de esta Revista recientemente inaugurada bajo el título de "Reformas para llevar a cabo". Véase *L'Enseig. Math.*, 7e année, 382-387 y 462-472. N:R.