Teoría de grafos. Aplicaciones al diseño arquitectónico

NOTAS DE CLASE

Fecha de recepción: Abril, 1997

Educación Matemática Vol. 10 No. 3 Diciembre 1998 pp. 109-127

Hernán S. Nottoli*
Facultad de Arquitectura, Diseño y Urbanismo
Universidad de Buenos Aires
Argentina
e-mail: postmaster@matydi.fadu.uba.ar

Resumen: *Muchos años han pasado desde que el gran matemático Leonard Euler presentara su trabajo Analysis Situs ante la Academia Rusa de San Petersburgo, donde se consideran establecidas las bases formales de la Teoría de Grafos.*
Esta rama de las matemáticas tiene la particularidad de tratar los problemas en forma topológica, es decir, según las mismas palabras de Euler, "del orden en que están dispuestas las partes, unas respecto de otras, prescindiendo de sus dimensiones".
Esta cualidad brinda una interesante herramienta para el análisis de interrelaciones entre elementos de un proyecto de diseño. Varios ejemplos muestran la asociación que es posible verificar entre un grafo y un plano de arquitectura, que es en esencia una representación de los vínculos que se establecen entre las partes de un edificio.

Abstract: *Many years have passed since the great mathematician Leonard Euler presented his paper Analysis Situs to the Russian Academy of San Petersburg. That paper is considered the formal base of the Graph Theory.*
This branch of mathematics has the particularity of studying the problems in topologic form, it means, according to what Euler said, "about the order in which the parts are disposed, ones related to the others, disregarding their dimensions".
This quality offers an interesting tool for the analysis of the interrelationship among elements of a design project. Several examples show the association that is possible to verify between a graph and an architecture plan, that is in essence a representation of the links that are established among the parts of a building.

En todo trabajo de teoría de grafos, es casi insoslayable referirse a uno de los orígenes más tradicionales de esta disciplina, que es el caso conocido como *problema de los puentes de Königsberg.*

El matemático Leonard Euler (*), según cuenta la historia, se vio abocado, por un pedido especial, a resolver el citado problema. Para entender su planteo se esquematiza a continuación un plano parcial de la ciudad de Königsberg, ubicada en la antigua Prusia europea, donde aparece el río Pregel que la cruza y la zona que dio origen a ese desafío a la imaginación (Fig. 1).

[7] El arquitecto Nottoli es profesor titular de Análisis Matemático I en la Universidad de Belgrano y profesor titular de Matemática en el Área de Tecnología de la Facultad de Arquitectura, Diseño y Urbanismo UBA. Ambas Universidades de Buenos Aires, Argentina.

Se observan en planta dos islas conectadas entre sí por un puente, y con las riberas por medio de otros seis puentes (4 para una de las islas y 2 para la otra).

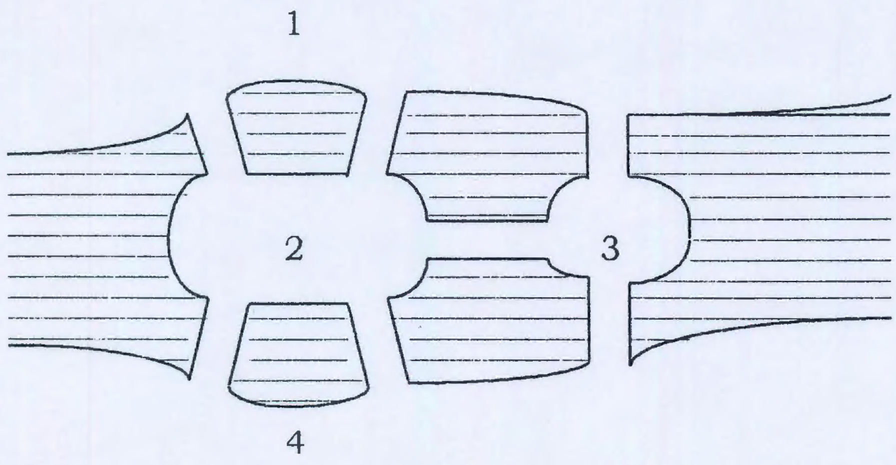

FIGURA 1

El problema planteaba la siguiente inquisitoria: ¿Es posible efectuar un paseo a pie, partiendo de cualquier posición en tierra firme y tal que utilizando una sola vez cada uno de los puentes se vuelva al punto inicial?

Euler desechó toda búsqueda de soluciones por prueba y error, y esquematizó el análisis del caso usando un grafo, donde cada isla y cada una de las riberas se representó como un vértice y donde las aristas representaron a los siete puentes.

De ello derivó el siguiente grafo de la figura 2.

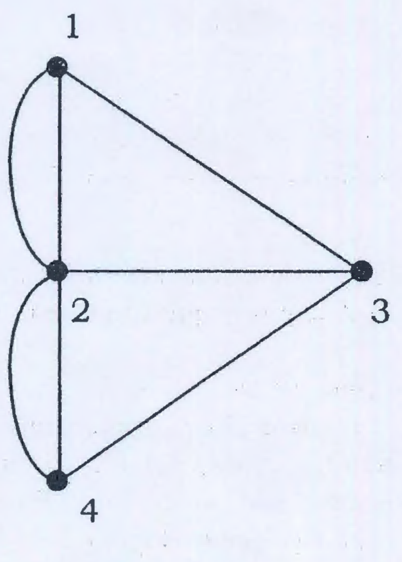

FIGURA 2

(*) Euler, Leonard (1707 - 1783): matemático suizo dedicado a la química, la física y la matemática. Son notables sus estudios sobre análisis matemático.

La acepción que se le da en este caso a ***grafo*** es simplemente una configuración consistente en un número finito de puntos, que son los vértices, y un número de aristas, que son segmentos rectos o curvos. Los vértices son los puntos extremos de las aristas y dos aristas cualesquiera, en los casos que se verán, carecen de puntos comunes excepto, quizá, vértices. Esta última condición le da al grafo la categoría de ***plano***.

Se usarán en los análisis a desarrollar a continuación, los conceptos ***de grado de un vértice***, que es el número de aristas que inciden en él. También ***grafo conexo***, denominando así a aquél donde todos sus vértices son alcanzables desde cualquier otro vértice a través de una o varias aristas adyacentes, es decir que poseen un vértice común.

Y retomando el caso de los puentes de Königsberg presentado en la figura 2, un planteo equivalente al original sería, dibuje este grafo de un solo trazo a partir de un vértice, sin levantar el lápiz, sin pasar dos veces por la misma arista y concluyendo el trazado en el mismo punto del que partió.

Se haya o no intentado resolver el problema por distintas vías, la respuesta segura es que es imposible hacer el recorrido pedido. Es más, ni siquiera existe solución para el caso similar, que exija las mismas condiciones, pero sin requerir la vuelta al punto inicial.

En honor a su investigador, este trayecto descripto previamente, se denomina ***recorrido euleriano.***

Se establecen dos versiones:

Recorrido euleriano	**General:**	Recorrido de un grafo conexo G a partir de uno de sus vértices, pasando exactamente *una vez* por cada una de sus aristas y volviendo al vértice inicial.
	Restringido:	Ídem anterior sin exigir la vuelta al punto de partida.

La respuesta general a los interrogantes que plantean estos recorridos es la siguiente:

> Es posible efectuar un *recorrido euleriano general* en un grafo conexo, si y sólo si el grafo carece de vértice de grado impar. Si hubiera vértice de grado impar, no hay solución al problema.

La justificación de esta condición es la que sigue: en cualquier vértice de grado impar, si se parte de él, ya se recorre al salir una de sus aristas incidentes. Quedan por recorrer en consecuencia dos más, una que permitiría volver y la última que exigiría volver a salir del vértice en cuestión.

Por lo tanto se verifica la imposibilidad de volver al punto de partida cualquiera sea el recorrido.

> Es pósible efectuar un *recorrido euleriano restringido* en un grafo conexo, si y sólo si existen únicamente dos vértices de grado impar. En este caso es necesario para realizar el recorrido, que éste se inicie en uno de los vértices de grado impar e inevitablemente la ruta terminará, para cumplir lo exigido, en el otro vértice de grado impar.

> Finalmente, si en un grafo conexo, no existe ningún vértice de grado impar, es posible recorrerlo por caminos eulerianos (general y restringido) partiendo de cualquiera de los vértices.

Ejemplo :

Posibilidad de efectuar un *recorrido euleriano.*

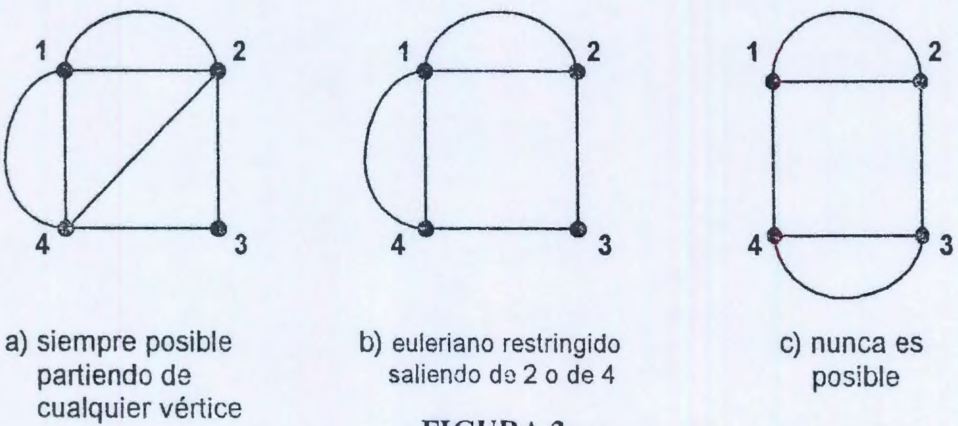

FIGURA 3

Pasando ahora al estudio de aplicaciones en el campo del diseño arquitectónico, se puede partir de un grafo parecido al de Euler; pero modificado, para que sea posible un recorrido euleriano (Fig. 4).

En la medida que es posible recorrer todo el grafo pasando una sola vez por cada arista, nos encontramos con una condición óptima para lo requerido en cierto tipo de edificios.

Por ejemplo en un museo, en una exposición con varias salas, o en casos similares, la solución ideal es poder transitar por todos los lugares sin tener que pasar necesariamente dos veces por el mismo.

Veamos como un diseñador puede generar un proyecto basado en el grafo de la figura 4.

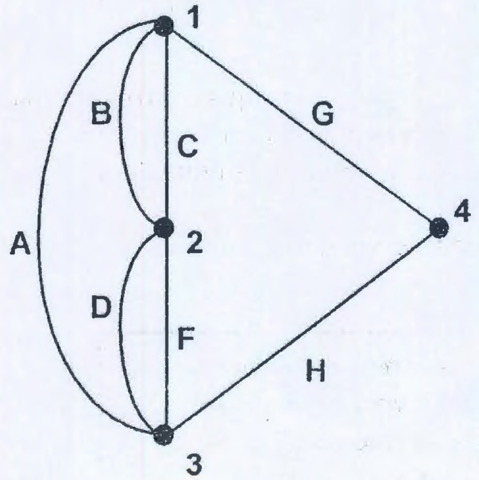

FIGURA 4

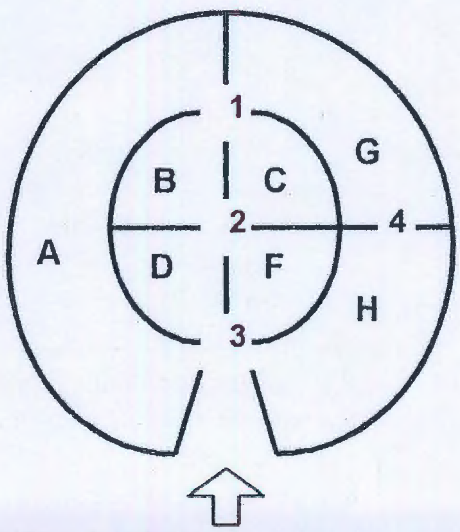

FIGURA 5

El plano de la figura 5 puede suponerse el de un stand de exposición representado en forma esquemática. Los puntos 1, 2, 3 y 4 (vértices del grafo asociado) son encuentros circulatorios y las salas A, B, C, D, F, G y H tienen su equivalencia en las aristas del citado grafo.

Si se ingresa al stand por el acceso indicado con la flecha, es posible comprobar la condición de poder recorrer todas las salas sin repetir ninguna y volver a salir por el punto de acceso.

Planteemos ahora el problema inverso como tema a resolver con el uso de un grafo, Se agrega un nuevo acceso simétrico al stand de exposición (Fig. 6). Los interrogantes son: ¿es posible ahora un recorrido euleriano; y si así fuera, de qué tipo resulta?

Para este análisis se puede adicionar un vértice que represente el espacio exterior y que enriquece la respuesta y el ejemplo.

Del estudio del grafo asociado a este caso (Fig. 7) es factible responder que un recorrido por todas las salas, sin tener que pasar dos veces por una de ellas es perfectamente factible. También se puede agregar que para satisfacer lo antedicho es imprescindible volver a salir por el acceso que se usó como entrada. Y que un recorrido euleriano en el grafo asociado es factible si se parte del vértice 1 o del 3.

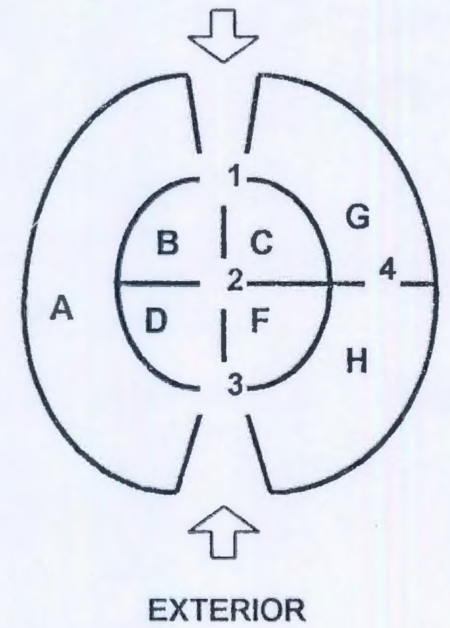

Figura 6

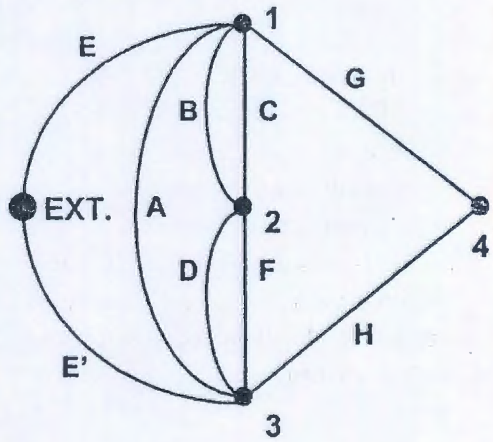

Figura 7

Para ilustrar los conceptos antes vertidos con un ejemplo de un edificio construido, mostraremos a continuación el plano esquemático (Fig. 8) de la obra del Pabellón Alemán de la Exposición Universal de Barcelona (1921) perteneciente al arquitecto Mies Van der Rohe (♣), donde este maestro del diseño introduce como novedad arquitectónica el tratamiento de espacios con muros que definen espacios virtuales, sin tener que cerrar cada ámbito con paredes y puertas.

(♣) Ludwig Mies van der Rohe (1886 -1969): arquitecto alemán, creador de grandes obras y en especial de las primeras "torres de cristal" en la historia de la arquitectura.

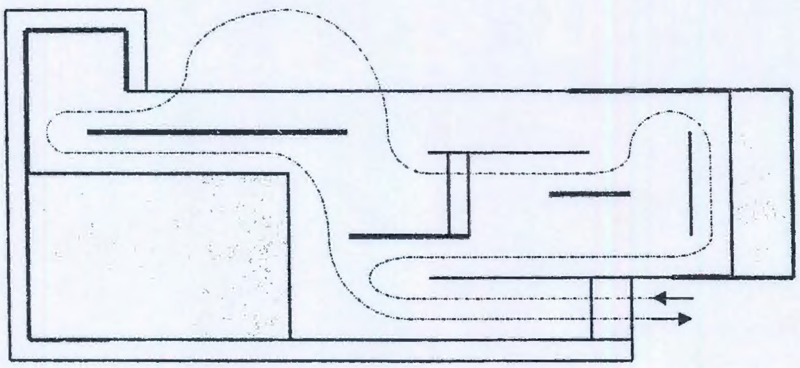

FIGURA 8

En el esquema las líneas en negro más gruesas son muros, las líneas finas son cerramientos de vidrio que pueden abrirse, los rectángulos grises espejos de agua y la línea punteada representa un posible recorrido por todos los espacios virtuales en que está dividido el edificio total (se incluye una salida al espacio exterior, y las pequeñas flechas marcan el acceso y egreso del edificio).

Puede verificarse la existencia de un recorrido euleriano general y se plantea como ejercicio a los lectores identificar espacios e hitos y generar un grafo asociado. También preguntarse si hay recorridos alternativos de igual característica al planteado.

Como puede observarse en los conceptos descriptos y en los ejemplos mostrados, la Teoría de Grafos es un aliado más en la interrelación entre la matemática y la representación gráfica de las ideas y, en el tema que nos ocupa, los recorridos eulerianos, el punto de vista topológico que brinda esta rama de las matemáticas permite un análisis distinto de las circulaciones, en el proyecto de los diversos hábitat.

Bibliografía

ALSINA, Claudi y TRILLAS, E.: ***Lecciones de Álgebra y Geometría***. Ed. Gustavo Gili, 1984

BROADBENT, Geoffrey: ***Diseño Arquitectónico***, Editorial Gustavo Gili, 1976

JOHNSONBAUGH, Richard: ***Matemáticas Discretas***, Grupo Editorial Iberoamerica, 1988

KASNER, Edward y NEWMAN, James: ***Matemáticas e imaginación*** (II), Ed. Salvat, 1994

NOTTOLI, Hernán: ***Grafos***, Editorial de Belgrano, 1997

SPINADEL, Vera y NOTTOLI, Hernán: ***Notas de Matemática***, FADUUBA, 1996

[7] El arquitecto Nottoli es profesor titular de Análisis Matemático I en la Universidad de Belgrano y profesor titular de Matemática en el Área de Tecnología de la Facultad de Arquitectura, Diseño y Urbanismo UBA. Ambas Universidades de Buenos Aires, Argentina.