Educación Matemática
Vol. 10 No. 3 Diciembre
1998 pp. 128-144

La verdad matemática y la realidad

F. Gonseth (Zurich)

Traducción: **Guillermina Waldegg**
Fecha de recepción: **Diciembre, 1998**

Ferdinand Gonseth (1890-1975). Matemático y filósofo suizo, Gonseth pertenece, junto con Piaget y Bachelard, al grupo de alumnos de Brunschvicg que desarrollaron en un sentido original su concepción de ciencia como producto de una razón creadora, y de la razón misma como creación permanente. Más filósofo que científico, Gonseth no se interesó en las raíces biológicas ni psicológicas de la ciencia y, contrariamente a Piaget, reiteradamente insistió en el carácter indisociable de la ciencia y de una filosofía que suponía "abierta". Gonseth se propuso poner en evidencia en sus trabajos de filosofía de la matemática la presencia de la intuición en la vanguardia de esta disciplina. Su noción de axiomática, sobre la cual Piaget se apoya en parte para sus trabajos de lógica, está en la antípoda de aquella que la mayoría de los matemáticos adoptan ahora. Los axiomas no son los fundamentos, son productos provisionales de una cristalización de la intuición.En cuanto a las matemáticas mismas, como Brunschvicg y contrariamente a Piaget, Gonseth la concibe en interacción con la experiencia de la realidad. Pero en oposición a su maestro que, desde el punto de vista de la psicología de la inteligencia tenía una intuición más fina del papel de las actividades del sujeto en la organización de la experiencia, Gonseth, en ocasiones, sostenía posiciones que evocan al positivismo de Comte o al empirismo de Spencer, por ejemplo, aquella que dice que la matemática es la ciencia del objeto cualquiera. Sin importar este punto delicado, no olvidemos que hay en la filosofía abierta de Gonseth un aspecto "etéreo" que no está equilibrado por el aspecto "concreto" que, por otra parte, sí encontramos tanto en Piaget como en Brunschvicg, quienes, al insistir sobre el carácter constructivo o creador de la actividad matemática, nos recuerdan las raíces prácticas y biológicas de ésta, y entonces de la verdad matemática.Entre los escritos de Gonseth citemos Los fundamentos de la matemática (1926), Las matemáticas y la realidad (1936) y El problema del tiempo, ensayo sobre la metodología de la investigación (1964).

Tomado de Ducret, J-J, Grzeskoviak, M. y Perruchoud, A. (1997): Jean Piaget. Cheminement dans l'oeuvre scientifique. *(CD Rom). Faculté de Psicologie et des sciences de l'éducation de l'Université de Genève. Trad. G. Waldegg*

Un tema como el de esta conferencia sólo puede ser abordado sesgadamente. Es por eso que comenzaré citando dos opiniones en las que la verdad matemática y la realidad están más o menos puestas en oposición. La primera es de Gauss, se encuentra en una carta a Bessel, y se resume brevemente así:

Vale más una sola de estas verdades eternas que los resultados de mil experiencias.

La segunda, es de Einstein y se encuentra en una pequeña obra titulada: *Geometrie und Erfahrun*[2] · No cito textualmente pero creo conservar el sentido bastante fielmente. Einstein separa en los axiomas de la geometría el lado puramente formal o puramente lógico del contenido intuitivo. Sólo las relaciones de lógica pura –dice– son de la incumbencia de las matemáticas, mientras que el contenido de los axiomas debe ser vinculado a la física. En cuanto a la verdad de las construcciones matemáticas, ésta no se condiciona a la realidad física, y recíprocamente.

Hace falta constatarlo: estos dos grandes genios no coinciden. El primero al parecer pone los resultados abstractos, a los que el matemático accede por el solo ejercicio de su mente, en el más alto grado de la escala de los valores científicos.

Y, si uno admite que existen verdades eternas, expresiones de necesidades superiores, trascendentes a nuestra inteligencia; si uno admite que, por ejemplo, la ecuación

$$2 + 3 = 3 + 2$$

es una verdad de este orden; si uno concibe un mundo ideal en donde la verdad es la última ley, ¿no tendríamos que admitir que Gauss tiene razón?

El segundo de nuestros grandes hombres al parecer hace bastante poco caso de esta verdad eterna. una vez que ha despojado a la geometría, y por extensión necesaria al conjunto de las matemáticas, de toda significación en el orden de lo real, las deja vivir una vida debilitada, como las sombras elíseas. En particular, la verdad matemática no puede dar garantía de una realidad en un mundo físico, *ninguna realidad puede ser demostrada por la lógica pura*, la idea de verdad se degrada y se ve expulsada del círculo de las proposiciones esenciales.

Y si uno admite que existe una realidad de tal manera concreta en la que se pueda distinguir sin equívoco lo que es el contenido de realidad de los axiomas o, en general, de la formulación de un hecho cualquiera, Einstein, al parece, tiene razón a su vez.

Les suplico advertir que los dos sabios de quienes hemos opuesto sus opiniones de ninguna manera pueden ser vistos como defensores de un punto de vista exclusivo. Se conocen bien los trabajos sobre geodésicas que Gauss emprendió al lado de sus investigaciones en matemáticas puras; se sabe que sus meditaciones sobre la posibilidad de una geometría no–euclidiana lo condujeron a verificar experimentalmente el teorema de geometría relativo a la suma de los ángulos de un triángulo. Y, por otra parte, sería verdaderamente absurdo querer afirmar que el creador de la teoría de la relatividad no aprecia en lo que valen los métodos matemáticos.

A pesar de estas circunstancias, no cabe la menor duda sobre la evidente divergencia de las opiniones; el matemático mantiene su mirada fija en su ideal de verdad, mientras que el físico pone la realidad física en primer plano –la verdad de las fórmulas que emplea le son, en el fondo, secundarias–.

---

[1] Conferencia pronunciada en la Asamblea Anual de la Sociedad Helvética de Ciencias Naturales, en Thoune el 16 de agosto de 1932. Reproducida en L'Enseignement Mathématique, año 31, 1932, pp 96-114.

[2] Gonseth se refiere aquí a la conferencia dictada por Einstein en la Academia Prusiana de las Ciencias, el 27 de enero de 1921, titulada Geometría y experiencia. Una traducción al inglés de esta conferencia está publicada en Einstein, A. (1954) Ideas and Opinions, N. York: Bonanza Books, pp 232-246. (N. T.)

No importa cuál sea el interés por confrontar las opiniones de dos sabios tan connotados como Gauss y Einstein, nosotros los hemos citado aquí como representantes de dos mentalidades diferentes. Detrás de Gauss uno puede ver a la gran mayoría de los matemáticos, desde la antigüedad hasta nuestros días. La casi totalidad de los matemáticos actuales suscribirían todavía sin titubear una afirmación como la siguiente: "Las verdades matemáticas son verdades absolutas, que jamás nadie vendrá a desautorizar". Los matemáticos no dudan que ellos han anclado su ciencia en el terreno de la verdad pura, y pocos son quienes no ven en ello una cierta preeminencia de su ciencia.

Las otras ciencias, aparentemente, no discuten esta posición de excepción. En tanto que ven sus resultados constantemente cuestionados, sus productos más convincentes a menudo amenazados y en ocasiones transformados, estas ciencias, al parecer, difícilmente se asombran de la seguridad de la que gozan los matemáticos. Pero –consecuencia inevitable– la especulación matemática les parece, *en su esencia*, ajena a sus preocupaciones habituales. Estas ciencias aceptarán usar el cálculo como un instrumento del que no hace falta discutir su eficacia. Sin embargo, el rasgo esencial, la búsqueda de la verdad abstracta, lo ignoran casi totalmente.

Aunque, por sus aplicaciones, la ciencia matemática impulsa sus ramas en las más diversas direcciones, su ideal de verdad la pone aparte –al margen– del resto de las ciencias. El orgullo más o menos legítimo que uno puede sentir en la cita de Gauss anima entonces la matemática actual. Y el resto de las ciencias comparte más o menos el fragmento de Einstein en lo referente a la búsqueda de "verdades eternas".

Señoras y señores, la discusión sobre nuestro tema surge así sobre una querella. Mi intención es bosquejar, en trazos bastante sumarios, en vista del tiempo relativamente corto del que disponemos, bosquejar cómo se puede buscar una conciliación, a partir de una posición intermedia, más próxima, a decir verdad, a Einstein que a Gauss. Pero que me sea permitido, para empezar, decir algunas palabras sobre el valor de una tentativa de esta naturaleza. No creo que, en lo referente a la oportunidad de hacer consideraciones tan generales como poco delimitadas, pueda contar con una aquiescencia unánime. Quizás alguien entre ustedes estará tentado a hacerme la siguiente observación: "La frase de Gauss que usted citó es sólo marginal a la obra del gran matemático y no agrega nada a sus méritos. Y poco importa que Einstein esté equivocado o tenga razón el lo que concierne al contenido y la forma de los axiomas. Es esta una opinión que no toca nada de lo esencial. El interés de su obra está en otra parte. La pregunta sobre la relación entre las nociones de verdad y realidad es una pregunta de los filósofos que sólo interesa a la ciencia de lejos". A esta objeción, se puede responder simplemente que es imposible de sustraerse a la necesidad de "filosofar". Lo quiera uno o no, se es prisionero de una cierta filosofía. Examinemos por ejemplo la noción de verdad. Es una de las nociones primitivas que es en vano querer definir. Pero no es inútil recordar cómo se ha constituido el sentido que le atribuimos. Nació de la especulación matemática y a continuación se expresó, se desarrolló y se hizo explícito en la Teoría de las ideas de Platón. Se transmitió casi inalterado en la tradición matemática. Por lo demás, las otras ciencias han también conservado esta herencia: el científico que todavía hoy dice "El fin último de la ciencia es la búsqueda de la Verdad" hace filosofía platónica, de la misma forma que M. Jourdain[3] hacía prosa.

[3] Gonseth se refiere aquí al personaje de Moliere en la comedia El burgués gentilhombre queno sabía que "hablaba en prosa" (N. T.)

Se puede entonces suponer que el ideal de verdad de los matemáticos pertenece al ciclo de la filosofía platónica.

Asimismo, la idea de cosa con la que la ciencia ha operado hasta ahora pertenece al ciclo aristotélico. Una cosa posee por sí misma, de acuerdo a esta idea, ciertas propiedades distintivas por las que puede ser aprehendida y clasificada.

No quiero decir que, del solo hecho de que estas nociones adquirieron su sentido en un ciclo de ideas anticuado, se haya perdido su eficacia. Por el contrario, mientras uno no se aleje demasiado de las condiciones iniciales que les dieron origen, estas nociones conservan un sentido suficientemente bien delimitado para que uno pueda utilizarlas con provecho. Pero sería un grave error llevar esta significación a un dominio muy alejado de esas condiciones iniciales, imaginando que esta significación está en sí misma dada de manera perfecta e inmutable. Es así que en la física del átomo, especialmente en la teoría cuántica, la noción ordinaria de objeto, al parecer, no es la más adecuada a las nuevas realidades que ahí se deben concebir.

De la misma manera, uno es, a sabiendas o no, euclidiano por la noción de espacio, cartesiano por la de razón, newtoniano por la de tiempo, etc. etc. En una palabra, uno no hace ciencia con independencia de la filosofía. El espíritu de quien rehuye las discusiones llamadas filosóficas en la actualidad, está vestido con retazos de la filosofía de la antigüedad.

Es por esto que no dudo en afirmar que la ciencia no puede sustraerse al deber de examinar las nociones fundamentales que utiliza, de ponerlas en concordancia unas con otras, de buscar cuáles son sus relaciones recíprocas... Todo este trabajo de reflexión y de puesta a punto, es el que uno podría llamar especialmente filosofía de la ciencia. Que ya han sido echadas las bases de una filosofía de este tipo lo prueban los trabajos de Helmholtz sobre los orígenes empíricos de la geometría y la aritmética[4].

Es entonces en el marco de referencia de esta filosofía, que puede situarse la tentativa de conciliación de la que voy a hablar. La tesis que formulo es entonces la siguiente: es posible bosquejar un conjunto de puntos de vista, que uno puede si se quiere llamar una filosofía, en cuyo seno las nociones fundamentales, como verdad, realidad, concreto y abstracto, cosa, espacio, tiempo, etc., adquieren un sentido adecuado a las necesidades actuales de la ciencia, y en la que, en particular, la oposición de la que partimos para abordar este tema desaparece.

❄ ❄

❄

[4] Heman Ludwing von Helmholtz (1821-1894). Fisiólogo, físico, matemático y filósofo alemán. Helmholtz es uno de los más gandes científicos alemanes del siglo diecinueve. Profundamente interdisciplinario, se le conoce primero por su descubrimiento de la energía y su conservación a través de las diferentes formas en las que se presenta (mécanica, química, eléctricidad, etc.). Helmholtz será igualmente uno de los primeros matemáticos en reconocer, desde 1868, la importancia de los principios de conservación, no sólo en el terreno de los fenómenos físicos, sino también en el de las matemáticas, y en todo caso en el de la geometría euclidiana (las diferentes geometrías pueden distinguirse considerando lo que se conserva o no en las transformaciones geométricas; lo que mostrará Felix Klein al dar una nueva definición de la geometría concebida como el estudio de los invariantes de diferentes grupos de transformaciones). Uno de los trabajos más importantes de Helmholtz en el plano de la filosofía de las ciencias, al que se refeire aquí Gonseth, es Sobre los hechos que sirven de base a la geometría de 1868. (N. T.)

Para alcanzar mis fines, debo, en primer lugar, dirigir mis ataque a lo que se puede llamar la farsa de la verdad absoluta, quiero decir, la infalible seguridad de la especulación matemática. Yo afirmo que si uno la examina de cerca y sin tomar partido previo, esta infalibilidad aparece más o menos vacilante. Como las otras ciencias, las matemáticas pueden ser el teatro de una conmoción que arruine toda una teoría. Para hacerlo ver, fijemos primeramente los rasgos esenciales de una revolución de este tipo. Elijamos, por ejemplo, la relatividad llamada restringida, que está de nuevo en todas las memorias: este ejemplo se ha vuelto tan clásico que nos serán suficientes unas cuantas palabras.

Se recordará que, antes del descubrimiento de Einstein, una cierta parte de la física albergaba contradicciones intolerables. Era imposible poner en concordancia la cinemática ordinaria y la teoría electromagnética. Para que las contradicciones desaparecieran, bastó substituir el esquema teórico de la cinemática ordinaria por un esquema que pudiera dar los mismos servicio; otra cinemática: la cinemática, precisamente, que es el objeto de la relatividad restringida. Estas dos cinemáticas, la ordinaria y la de Einstein, tienen, por otra parte, la misma relación que las dos geometrías la (pseudo)euclidiana y la no–euclidiana.

He aquí el esquema de este evento científico tan considerable. Vamos a ver ahora que las matemáticas –toda proporción guardada– ofrecen a un ojo agudo, un espectáculo absolutamente semejante. El albergue de la revolución que vamos a describir se encuentra en el dominio mismo que se consideraba un poco como el Santo entre los santos, la lógica. Desafortunadamente, no podré ir hasta el final tan directamente como en el caso del pasaje de una cinemática a la otra. No podré evitar remitirme a los fundamentos, y comenzar, por extraño que parezca, por una digresión sobre la noción de objeto, sobre la noción del todo ordinaria de cosa material, que posee forma y color y ocupa una cierta posición en el espacio.. Es esta una noción de las más simples cuyo sentido es de los menos problemáticos. Les suplico, sin embargo, no detenerse en esta indudable simpleza. La observación de los niños pequeños ha puesto fuera de duda que ellos no poseen, cuando nacen, el conocimiento de lo que es un objeto. En su primera infancia los niños no saben relacionar y coordinar las impresiones sensoriales que deberían pertenecer a *un solo y mismo objeto*. Estas impresiones, que varían cuando el objeto y el niño se desplazan uno en relación al otro, o cuando el objeto afecta sentidos diferentes, quedan dispersas en la conciencia, aún no asociadas. El objeto no se reconoce todavía como idéntico a sí mismo bajo estos aspectos diferentes, no está todavía individualizado, no es percibido como tal.

Por el contrario, hace falta un desarrollo físico y mental bastante largo para que las impresiones táctiles se unan a las visuales y se superpongan; para que la memoria de los ojos se ponga de acuerdo con la de los labios y los dedos. El niño entra poco a poco en posesión del mecanismo mental que le va a permitir hacer real la permanencia y la identidad del objeto bajo la multiplicidad de sensaciones, que le va a permitir concebir la unidad de lugar bajo la diversidad de imágenes.

Hay entonces, en el desarrollo del niño, un estado en donde no posee todavía la facultad de sujetar las sensaciones que lo asaltan. No tiene todavía a su disposición el sistema de normas; su memoria todavía no ha separado ni fijado los puntos de referencia que lo harán capaz de comprender el lenguaje de signos que captan sus sentidos. Estos referentes y estas normas constituyen la sustancia de lo que queremos llamar forma intuitiva. ***Las sensaciones sólo devienen objeto por proyección sobre esta forma, en relación al marco de normas y de referentes.***

Estas observaciones claramente ponen a la luz que lo que llamamos un objeto no es mas que un recorte más o menos esquemático de la realidad. El objeto no está dado directamente, como una realidad inmediata, en una intuición que lo tome en posesión de un solo golpe y hasta su esencia. Por el contrario, el objeto sólo es un esquema, alimentado por un mecanismo mental bastante complicado; es sólo una imagen imperfecta, podríamos decir que provisoria y superficial; imagen, no de una realidad en sí, sino resultante de las asociaciones y de las coordinaciones de las que esta realidad nos ha provisto en su momento.

Les suplico ahora establecer una comparación entre la manera en la que se forma en nosotros la representación de un objeto y la manera en la que el físico, por ejemplo, fija el aspecto de una o de otra de *sus* realidades. Hace falta, en primer lugar, un cierto número de observaciones que vendrán a reemplazar las impresiones sensoriales inmediatas. Estas impresiones sólo llegan a ser realidad sobre la base de un cierto esquema teórico, como el de la cinemática ordinaria o el la cinemática de Einstein, o también, para no ir más lejos, como el de la geometría ordinaria. *Este esquema teórico corresponde al que hemos llamado la forma intuitiva.* El acto de interpretación que, sobre la base de las observaciones, por una parte, y del esquema teórico, por la otra, construye una realidad, *corresponde al acto mental* que construye el objeto por la proyección de sensaciones sobre el conjunto de referentes intuitivos. Así entonces, en la percepción del más simple de los objetos, se puede ya distinguir los rasgos esenciales de toda investigación científica de la realidad, y en particular, esta *actividad interpretativa* que confiere un carácter netamente esquemático a todo nuestro conocimiento del mundo exterior.

Llevemos nuestra comparación un poco más lejos. El esquema teórico necesario para la interpretación de los resultados de la observación pone en relación las diferentes magnitudes físicas tales como la distancia, la masa, la velocidad, el potencial, etc. y sus relaciones son las *leyes* del dominio en cuestión. Si nuestra comparación es razonable, la forma intuitiva, en donde se origina la creación mental *"objeto"*, debe contener también las leyes del objeto, al mismo tiempo que las otras nociones que intervienen. ¿Existen realmente leyes de este tipo? Sin duda. La más simple es quizás la siguiente: *"Un objeto no puede estar a la vez presente y ausente"*. Por una ligera progresión dentro de lo abstracto, integrando, por así decir, la ausencia sobre toda la gama de localizaciones, se pasa de la ausencia al no–ser , y de la misma manera se pasa de la presencia a "el ser a secas", dejando caer en el olvido todo lo que es cualidad sensible.

Las primeras leyes del objeto se enuncian entonces así:

a) Para todo objeto se tiene solamente las dos posibilidades siguientes:
El objeto es o no es (se puede percibir en este enunciado la forma más primitiva del principio lógico del tercero excluido)

b) Las dos posibilidades anteriores se excluyen (es la forma primitiva del principio lógico de contradicción)
Se puede agregar el principio de identidad

c) Todo objeto permanece (antes o después de un desplazamiento) .

Las nociones que vendrán enseguida son las que se expresan mediante las conjunciones y y o, y que ponen en relación, en primer lugar, dos objetos cualesquiera. Una de las nuevas leyes que se obtendría inmediatamente sería equivalente, por ejemplo, a la regla de lógica siguiente:

Negar a o b es afirmar no–a y no–b

y así sucesivamente. no tengo, de ninguna manera, la intención de retomar todas las fórmulas de la lógica y mostrar que cada una de ellas corresponde a una ley del objeto. Lo que he dicho me parece suficiente para hacer ver que se puede imaginar una lógica desde un punto de vista donde la noción de verdad absoluta no interviene de ninguna manera. La lógica toma, por el contrario, la forma de un capítulo de la física, del primer capítulo, podríamos decir, de aquél que formula las leyes –empíricas naturalmente– de un objeto cualquiera. resumo esta digresión en la fórmula siguiente: *la lógica, bajo su forma más primitiva, puede ser concebida como una física del objeto cualquiera.*

Insistiré todavía en el hecho de que las leyes del objeto nos parecen ya sea de la más elevada evidencia o bien de la más grande banalidad, porque están inscritas dentro de la forma intuitiva en donde se fundamenta la noción de objeto. Pero es claro que esta evidencia es ahora del orden fisiológico, y no tiene nada que ver con el ideal de verdad absoluta. La seguridad con la cual las leyes de la lógica pueden ser empleadas no es más que la expresión de su eficacia, de la adecuación de la física del objeto a la realidad a la que apunta.

Ahora que hemos descubierto lo que podrían ser los orígenes empíricos de la lógica, no expondré cómo ésta se constituye en un esquema abstracto o teórico, cuyo campo de aplicación se aleja cada vez más de su objeto primitivo. El rasgo esencial de esta extensión consiste en *llevar* las leyes del objeto a la esfera de los *objetos mentales,* de los objetos del pensamiento.

Esta extensión es, por otra parte, totalmente natural, y también en la física, o en cualquier otra ciencia, sucede a menudo que una teoría, inventada para servir de explicación a ciertos fenómenos, se lleve más allá de su campo de aplicación primitivo. El ejemplo que he recordado de la cinemática ordinaria que no podía armonizar con el electromagnetismo es una ilustración de ello.

En la comparación que estamos haciendo, las analogías se vuelven cada vez más numerosas y cada vez más imperiosas. Pero –pensarán ustedes quizás– hay un punto donde esta comparación tendrá necesariamente que flaquear. Para quedarnos de manera adecuada dentro de la cinemática ordinaria, la extensión que se proponía más allá de su esfera de eficacia, que no sobrepasa un cierto decimal en su aproximación, esta extensión se enfrentó a contradicciones insuperables y ha sido necesario renunciar a ella; mientras que la lógica, en tanto que se respeten las reglas, no podrá jamás enfrentarse a la contradicción. Y bien, los hechos no respetan el esquema teórico de la lógica más que cualquier otra teoría. Desde hace tiempo se sabe que si uno pone una cierta obstinación, una cierta rigidez al aplicar las leyes de nuestra supuestamente infalible lógica, hay ciertas contradicciones que es imposible evitar. Estas antinomias, en su mayor parte, no son nuevas. Con justa razón no se les considera un verdadero peligro para las matemáticas. Son, por el contrario –según la expresión de Poincaré–, trampas en las que uno no cae si uno no lo quiere. Y sin embargo, en razón misma de su bondad, es profundamente irritante no poder deshacerse de ellas sin comprometer muchos resultados a los que uno no podría renunciar.

He aquí la forma ingeniosa que se puede dar a una de ellas: Hay una biblioteca de catálogos y, entre ellos, algunos que se mencionan a sí mismos y otros que no. Bien parece que las dos propiedades "de mencionarse" y "de no mencionarse" deben ser contradictorias en el sentido de la lógica ordinaria. Y sin embargo, si uno imagina "el catálogo de todos los catálogos que no se mencionan", las cosas no son tan fáciles. Si uno admite que este nuevo catálogo se menciona, se puede deducir inmediatamente que no se menciona, y recíprocamente. Las dos hipótesis de las cuales *una* tendría que ser exacta, conducen ambas a una contradicción.

Evidentemente, nada nos obliga a imaginar ese catálogo paradójico. Pero esa no es la cuestión. El hecho que cuenta es que la lógica no contiene ninguna regla que nos prohiba hacerlo y que pueda impedirnos razonar como lo hemos hecho.

Las clases de objetos que intervienen en la lógica clásica deben ser finitos. Sobre este punto, el dominio de las matemáticas, aun las elementales, desborda el dominio de la lógica puesto que la mayor parte de las clases de objetos que considera la matemática son infinitas, como la clase o el conjunto de los números enteros, o la de los números primos, o aún el conjunto de puntos de una recta o de un plano, etc. La teoría de conjuntos infinitos, que se puede considerar como una extensión de la lógica ordinaria a las clases infinitas, hace aparecer otras paradojas, que no nos será necesario precisar. Son especialmente estas últimas las que se ocupado fuertemente a los matemáticos, y sobre las que se han dado discusiones extremadamente vivas, aún en curso, relativas a los fundamentos de las matemáticas y la lógica.

Y bien, si uno busca los orígenes de estas paradojas, se descubre que ellos atienden las causas que tenemos aquí:

La lógica actual permite imaginar relaciones no solamente entre objetos diferentes, sino que admite también que un objeto pueda entrar en relación con él mismo. Ejemplo: un catálogo que se menciona a sí mismo. Por otra parte, la lógica no formula ninguna restricción relativa a incompatibilidades que puedan existir entre las diversas relaciones posibles. Ahora bien, sucede que se tienen demasiadas libertades a la vez. La lógica evitaría ciertamente paradojas como las que acabo de citar si pudiera renunciar, ya sea a la libre elección de las incompatibilidades o bien a hacer intervenir las relaciones que parten de objeto y llegan al mismo.

En fin, si se examina las antinomias a las que conduce la teoría de conjuntos, se descubre una causa de problemas todavía más profundos. Un conjunto se define –según Cantor– como una colección infinita de objetos que poseen una propiedad característica, según la cual cada uno de los objetos pertenece al conjunto como elemento.

De acuerdo a esta definición, los elementos de un conjunto son entonces objetos en el sentido que he llamado aristotélico, sentido según el cual los objetos se consideran como poseedores *a priori* y por sí mismos ciertas propiedades por las cuales pueden ser aprehendidos y clasificados. Se revela que esta manera de concebir el elemento del conjunto abre la vía a las contradicciones.

Hemos así llegado a un punto en el que podemos retomar nuestra comparación. De la misma manera que la hipótesis del tiempo absoluto o newtoniano, tal como interviene en la cinemática ordinaria, era la causa del desacuerdo con el electromagnetismo, la hipótesis del objeto aristotélico es la causa del desacuerdo con el resto de la especulación matemática.

Para que la comparación sea en fin concluyente, debe ser suficiente –nos parece– mostrar que la sustitución de una nueva noción de objeto es adecuada para restituir el equilibrio.

Este objeto es lo que yo llamo un *objeto puramente lógico*. Está, con los objetos materiales, en la misma relación de abstracción que la recta lo está a sus referentes físicos, como la trayectoria de un rayo luminoso o el borde de una regla de dibujo.

Estos objetos lógicos no tienen ninguna propiedad *a priori*. No tienen otra función que entrar en relaciones lógicas con otros objetos del mismo tipo, y no tienen otras propiedades que aquéllas que les confieren esas relaciones.

No pienso naturalmente en exponer en detalle las peculiaridades de la teoría de este nuevo objeto lógico[5]. Baste decir que:

a) al aceptar las reglas de la física del objeto cualquiera, en lo que concierne al ser y al no–ser, para los objetos lógicos;

b) al desterrar las relaciones que no se establecen entre objetos diferentes;

c) al decretar, en cuanto a las colecciones de objetos lógicos infinitos, ciertas reglas extremadamente simples y que no hacen más que expresar la libertad que siempre tenemos de imaginar nuevos objetos y ponerlos, o no, en relación unos con otros,

las paradojas son, de manera totalmente natural, arrojadas fuera de la lógica y fuera de las matemáticas. Así, línea a línea, hemos encontrado en el dominio que parecía el más resguardado, el esquema de una de estas revoluciones que, aparentemente, deberían perdonar a las matemáticas. La conclusión que me parece que se impone es la siguiente:

Si, sin dejarse detener por la simplicidad de las nociones fundamentales, se lleva la discusión hasta la esfera de la intuición, se puede poner al descubierto los orígenes empíricos de todo el edificio matemático, sin exceptuar la lógica.

Y ahora, si regresamos a las dos opiniones contradictorias que citamos al principio, no podrá satisfacernos, ni la una, ni la otra.

Para la de Gauss, en primer lugar, el asunto se clarifica inmediatamente. Al tener la lógica un origen empírico, al estar calcadas sus reglas de las de la física del objeto cualquiera, las verdades eternas de las que habla Gauss no son muy diferentes, en esencia, de las verdades experimentales.

Por otra parte, es igualmente imposible dar completamente la razón a Einstein, porque si la lógica, ella misma, tiene orígenes empíricos, si la lógica posee un contenido apreciable de realidad, ¿cómo hacer la partición entre lo que es, en las afirmaciones matemáticas, pura lógica y contenido de realidad?. Es esta una constatación que vendrá a confirmar un análisis más amplio y más profundo, que abarcará, al mismo tiempo que la lógica, los fundamentos de la aritmética y de la geometría: no es posible vaciar los axiomas de su contenido intuitivo o de su contenido de realidad. No existe lógica que pueda tratar los juicios y las proposiciones, los axiomas y los teoremas como esquemas absolutamente vacíos de sentido.

En el fondo, la idea de una lógica de este tipo es la hermana pequeña de la noción de verdad absoluta. Ambas pertenecen al mismo círculo de ideas. Ambas son insuficientes pero, de alguna manera, complementarias: una imagina que puede separar completamente lo abstracto de lo empírico y la otra, que lo abstracto puede deshacerse completamente de lo empírico.

5 F. Gonseth, "Sur l'axiomatique de la théorie des ensembles et sur la logique des relations". Commentarii matematici helvetici, Vol. 5, 1933, pp. 108-136 (N. A.)

En resumen, las nociones de verdad puramente abstracta y realidad puramente concreta son ambas demasiado esquemáticas, mutuamente excluyentes. Corresponden, ciertamente, en su oposición ideal, a una cierta oposición de hecho. Lo abstracto se opone ciertamente a lo concreto, lo racional a lo empírico, lo teórico a lo experimental. -Tanto, que uno podría imaginar que los dos términos de esta oposición podrían ser aislados uno del otro y realizados cada uno por su lado. La situación parece perfectamente clara y parecería que no esconde ningún engaño. Era ésta entonces una visión demasiado sumaria. Pero, *¿por cuál reemplazarla?* Es claro que el pensamiento no puede renunciar a nociones tan fundamentales. Éstas no pueden quedarse vacías de sentido. Y si no son actualizadas bajo formas nuevas, permanecerán bajo las formas antiguas. Hay entonces una imperiosa necesidad de encontrar una nueva fórmula de acuerdo, de recrear un nuevo *modus vivendi*. Pero, ¿dónde buscar un punto de apoyo?

Antes de pasar a la segunda parte de mi exposición, que se esforzará en responder a esta última pregunta, permítaseme intercalar aquí una observación. El camino que hemos seguido para hacer ver que muchas de las nociones fundamentales sobre las que se apoya la mente, y más generalmente lo que podría llamarse la ideología metacientífica, no corresponden ya a las necesidades actuales, este camino es ciertamente el camino del matemático. Incluso, quizás me haya yo apoyado más en la pregunta que tratamos y no suficientemente en el hecho, a pesar de que la jornada un poco matemática a partir de la cual la hemos aclarado, tiene una apariencia totalmente general. Esta ideología envuelve y penetra el pensamiento más específicamente científico; a menudo lo informa y lo orienta, y sería muy inquietante decidir cuándo termina la una y cuándo comienza el otro. Yo no quiero como prueba sino las dos citas que abrieron nuestro debate. Hay un punto donde el pensamiento más concretamente científico viene a enfrentar estas cuestiones generales.

Por otra parte, hasta aquí hemos hablado, sobretodo, de verdad y de realidad, pero que quede bien claro que de lo que se trata en el fondo es de las relaciones de toda teoría con su dominio experimental. Nos hemos detenido en la afirmación de que uno no puede aislar completamente las nociones de verdad abstracta y realidad concreta, pero hubiéramos podido decir perfectamente que lo teórico y lo experimental no pueden ser realizados aisladamente, no sólo en la práctica de la investigación científica, sino en su esencia misma. Y la pregunta que queda abierta es la de llegar a representarse cómo lo teórico y lo experimental se constituyen simultáneamente y cuál es la estructura que se imprimen, entre sí y a nuestro conocimiento. Apenas es necesario señalar que estas son preguntas que se plantean desde cualquier otra ciencia. En particular, los últimos desarrollos de la física ya las han abordado por otras vías.

Regresemos ahora a nuestro tema y resumamos la situación. Los hechos aparentemente muestran que, a pesar de la incomparable solidez del edificio matemático, la especulación matemática no es esencialmente diferente de cualquier otra especulación teórica, y que la verdad absoluta no la habita. Aun en el dominio de las matemáticas, la idea de verdad absoluta no es una idea demasiado simple.

Por otra parte, el significado de la palabra "realidad" es, también, problemático. No hay sensaciones completamente puras y que nos aporten una realidad toda hecha. Todo está inicialmente envuelto por el espacio y el tiempo que constituyen también la sustancia de lo que hemos llamado las formas intuitivas. La simple percepción de un objeto es el desenlace de una actividad mental esencialmente esquematizante. Y toda tentativa de penetrar más en la realidad de este objeto, a partir de los datos intuitivos o experimentales, necesita la creación de nuevos esquemas. La medida de las distancias, por ejemplo, está en función de una construcción geométrica subyacente que orienta, a la vez, las manipulaciones y los cálculos. Y, a medida que uno progresa en la descripción de la realidad, esta descripción exige conceptos cada vez más abstractos, para desembocar, por ejemplo, a las nociones de entropía o de probabilidad de existencia. Lo real no se deja encerrar sino con la ayuda de lo ideal y de lo esquemático. Regresamos siempre al mismo punto: lo abstracto y lo concreto, lo ideal y lo real, no tienen una existencia perfectamente autónoma, se definen uno en relación al otro. Pero una vez más, ¿cómo habrían de concebirse las modalidades de sus génesis simultáneas?

Señoras y señores, hace falta, en primer lugar, darnos cuenta de lo que estamos en posibilidades de exigir. Y, para tener un punto de comparación, quizás lo más simple sea examinar cómo ha podido surgir uno de los puntos de vista que rechazamos. Así, por ejemplo, la idea platónica o neo–platónica, según la cual la realidad no puede ser en su estructura sino la manifestación de la verdad –idea que, por otra parte, para muchos, todavía no pertenece al pasado–. Como he tenido ya la ocasión de señalar, la noción de verdad que existe por sí misma e independientemente de toda circunstancia, tiene su origen en el prestigio de la deducción matemática. La manera en la que la aritmética y la geometría se encuentran materializadas en las cosas debió golpear con fuerza un espíritu todavía inexperto. El éxito de la teoría racional de la música, sin hablar de las primeras explicaciones del sistema planetario, debió reforzar poderosamente la creencia de que el estudio de los números y de las figuras podría develar los últimos misterios. Esta idea debió perder enseguida su forma específicamente matemática y penetrar más o menos profundamente en todos los compartimen-tos del pensamiento. El punto para retener de este proceso es –me parece– el siguiente: las relaciones que se establecen entre verdad y realidad fueron percibidas directamente –al menos así se creyó– en un lugar particularmente adecuado. Una vez concebida, esta idea sirvió más o menos de esquema explicativo en un dominio más extendido.

La historia de una teoría que se rechaza puede ser una enseñanza preciosa. Para nosotros, lo primero por hacer es, igualmente, buscar una caso especial y particularmente favorable. Espero que nuestra tentativa no pierda el interés cuando diga que no es, de ninguna manera, necesario ir a buscar ese terreno favorable en las nuevas teorías, sino que la geometría elemental es perfectamente suficiente.

Como base de nuestra discusión, vamos a elegir simplemente la noción de recta tal y como se introduce en los primeros elementos. Cada uno encontrará en sus recuerdos la manera en la que esta noción le fue sugerida. Se le proponen al alumno diferentes ejemplos, donde se le pide percibir la noción por definir: la cima de un techo, el borde de una regla de dibujo, o, en un último análisis la trayectoria de un rayo luminoso, la línea de tiro. Se le pide abstraer de estos diferentes ejemplos algo que tengan en común, percibir en cada uno de ellos una cosa ideal, la recta geométrica. De la misma forma, se le pide imaginar un objeto más y más pequeño, más pequeño todavía que cualquier objeto que haya imaginado, para conducir su mente a la noción de lugar preciso, de punto geométrico. Se le pide de nuevo percibir en los ejemplos propuestos, las primeras propiedades de estos seres abstractos, las rectas y los puntos. Es éste un acto de verdadera creación mental que no se debe devaluar. Supongamos que este acto se ha realizado, supongamos que se han adquirido las nociones. Diremos entonces que los ejemplos, en donde por primera vez las hemos percibido son sus concreciones. Así entonces, la línea de tiro concretiza en lo fenoménico la noción ideal de recta, que, en sí, pertenece al mundo mental.

Destaquemos bien que este pasaje de la noción intuitiva, de la línea de tiro, a la noción ideal, la recta, es algo que no puede, en lo absoluto, ser descrito. Una vez que uno lo ha concebido, se le puede evocar. Pero nuestro poder de explicación no va más lejos. Hay ahí un hecho de una esencia a todas luces *sui generis*.

Naturalmente, no es asunto de decir que la recta *está* en la línea de tiro: se sabe bastante bien que no hay trayectoria perfectamente recta. Y el borde de un cuerpo tampoco puede suministrar una mejor concreción, puesto que si uno desciende a la escala atómica, la noción misma de borde se desvanece en lo indeterminado. Sin duda son concreciones físicas sugeridas por las nociones geométricas, pero se puede decir que es gracias a un conocimiento imperfecto de la realidad, a un feliz malentendido, que hemos aceptado esta sugerencia. Uno da cuenta, en parte, de estas circunstancias diciendo que la recta es una imagen esquemática de la realidad. En un esquema, la realidad no está representada en todos sus detalles, sólo son conservados ciertos rasgos, y evocadas ciertas relaciones. Un esquema no es, de ninguna manera, una representación fiel en un sentido absoluto: no es comprensible si no se posee la clave explicativa. Lo que uno expresará diciendo que la adecuación de un esquema a su objeto es simbólica. Todos estos caracteres se encuentran en el paralelismo que existe entre la noción de recta y sus concreciones. Es por esto que llamaremos "esquematización axiomática" al proceso mental del cual es resultado. Axiomática, porque las primeras relaciones que uno percibe entre los elementos de este esquema son los axiomas de la geometría.

No se insistirá nunca demasiado en el hecho de que esta esquematización axiomática se acompaña de una verdadera transmutación de las nociones que ahí participan. Diremos que, para pasar de un sentido al otro, es necesario franquear el umbral de la axiomatización. La axiomatización desdobla las nociones que le son sometidas en un abstracto y un concreto relativos uno al otro.

La noción ideal de recta geométrica ¿no ha sido bien protegida de sus orígenes intuitivos? Se puede hacer aquí un experimento del pensamiento tan simple como instructivo. Se pueden dar, de la geometría elemental (como también de las otras geometrías), modelos bastante diferentes unos de otros. Uno de los más simples se obtiene de la manera siguiente: Se llama recta a todo círculo que pasa por un punto fijo elegido de antemano, y ángulo entre dos rectas al ángulo que forman los círculos que les hemos hecho corresponder, y así sucesivamente. Se cambian los nombres de todas las nociones de la geometría y sucede que, si uno ha sabido escoger bien el disfraz, la geometría así enmascarada imita todos los gestos de la geometría primitiva. La geometría entera puede ser así transpuesta sin cambiarle una jota.

¿Hay razones para preferir unos de estos modelos sobre los otros? ¿en qué difieren y qué tienen en común? Es quizás más fácil descubrir primero lo que tienen en común. Para este fin, hace falta buscar lo que uno podría percibir de idéntico en uno y en otro. Esto no comporta dificultades extraordinarias. Veamos cómo se procederá:

Se van a considerar las nociones fundamentales, la recta, el punto, etc., bajo un aspecto todavía más descarnado. Se va a decir: sólo quiero retener de la recta el hecho de ser un cierto objeto de una cierta categoría, de la cual no quiero conocer de antemano ninguna propiedad. De la misma manera para el punto. Cuando una recta A contenga a un punto *a*, diré que A y *a* están en una cierta relación, que no tendrá ninguna significación intuitiva, es decir, una relación puramente lógica. Los axiomas indicarán por sí mismos cómo se van a tratar estas relaciones y cómo hay que combinarlas. La geometría completa es ahora un edificio de relaciones lógicas, donde interviene la relación J que corresponde a la incidencia de un punto y una recta, la relación P que corresponde al paralelismo de dos rectas, y así sucesivamente. Bajo este nuevo aspecto, dos modelos diferentes de nuestra geometría, naturalmente, no pueden distinguirse uno del otro. Lo que tienen en común es entonces la estructura lógica.

Pero no se si ustedes han observado un parecido bastante sorprendente entre lo que acabo de decir, del pasaje a las relaciones lógicas, y lo que decía hace poco del pasaje a las nociones de la geometría. Pedía que tuvieran a bien percibir una misma noción ideal, la recta; piensen en imágenes intuitivas diferentes, y ahora pido que se perciba una misma relación lógica en relaciones geométricas diferentes. pido que se tenga a bien hacer abstracción de ciertas diferencias que podemos distinguir para imaginar una identidad ideal, de un tipo más abstracto todavía.

Adivinan ahora a dónde quiero llegar: la introducción de las relaciones lógicas no es otra cosa más que una esquematización axiomática. Para pasar de la geometría a la lógica, hace falta franquear un nuevo umbral de axiomatización. Hace poco, la geometría era un abstracto en relación a lo intuitivo. Ahora, es un concreto en relación a la lógica. Abstracción hace un instante, es ahora una realización de un abstracto más sutil.

Al franquear este nuevo umbral de axiomatización, las nociones geométricas han perdido una parte de lo que se podría llamar su substancia, todo lo que es forma, todo lo que recuerda el mundo de los sentidos o de los fenómenos. En una palabra, son justamente los caracteres que uno está de acuerdo en llamar específicamente geométricos, y que no encuentran acceso en el dominio de la lógica.

Es dentro de lo que la axiomatización ha hecho desaparecer que hay que buscar la individualidad de uno u otro de los modelos. En consecuencia, si uno quiere saber dónde se funda la idea de lo geométrico, no es en el lado de la lógica que hay que buscar, donde ya no hay ninguna traza; es en la otra dirección, hacia lo intuitivo. La geometría tiene su esfera de existencia comprendida entre la primera axiomatización, que le pone una rostro abstracto frente al lado intuitivo de nuestro conocimiento, y la segunda, que le da uno concreto frente al lado puramente lógico. Es en este doble papel que se consume la significación de la palabra geometría. En resumen, las nociones geométricas son imágenes ideales apoyadas sobre lo real objetivo, representaciones esquemáticas cuyo sentido sólo es inteligible teniendo en cuenta las realidades a las que apuntan. No hay recta sin el conocimiento preliminar de ciertas materializaciones más o menos burdas; la idea de recta no puede ser completamente aislada de estas imágenes intuitivas. La distinción entre abstracto y concreto no es entonces un hecho que existe por sí mismo. Esta oposición es el resultado de un método de nuestra mente, cuando busca el conocimiento. Método que se tendría todo el derecho de llamar método axiomático.

Me falta todavía agregar un trazo al cuadro que estoy en vías de dibujar. Yo les mostré las nociones de la lógica que suceden a las de la geometría en el proceso axiomático que va hacia lo abstracto. Va de suyo que la geometría no es el único campo posible de concreción para la lógica, pero éste es un detalle sin importancia para lo que tenemos en perspectiva. El trazo que quisiera agregar se relaciona con las nociones intuitivas que preceden a las nociones de la geometría: las nociones de borde de un cuerpo, de línea de tiro, etc. Estas nociones pertenecen a lo que uno podría llamar la esfera del objeto, en el mismo sentido que aquéllas de, por ejemplo, casa o caballo. ¿Es posible distinguir, en la manera como se constituyen, un proceso que recuerde nuestra axiomatización? La respuesta está ya contenida en lo que he tenido la ocasión de decir de la noción de objeto en los niños pequeños: es claramente afirmativa. Todas las explicaciones que di en ese momento concurren a hacer ver que la noción misma de objeto se abstrae de un concreto, concreto representado por las diversas sensaciones dentro de las que de percibir una permanencia ideal, la del objeto.

Sucede lo mismo con conceptos como los de casa, planta o caballo, por ejemplo. El concepto de casa, que sólo escogimos de entre los otros para fijar ideas, no se define ciertamente en el sentido aristotélico, enumerando, sin olvidar ninguna, todas las propiedades distintivas que debe poseer la casa: que tenga muros y un techo, ventanas, una puerta al menos, etc. Una u otra de estas propiedades puede faltar, sin que la cosa descrita deje de ser una verdadera casa. En rigor, uno podría imaginar una casa sin puerta, a la cual se entraría por la ventana, y así sucesivamente. No, la enumeración de las cualidades supuestamente distintivas no es la vía por la que se forma el concepto. Al contrario, se puede admitir que, del conocimiento de tal y tal casa, la mente ha separado, ha abstraído un cierto *tipo*, con rasgos más o menos fijos, con una significación más o menos rígida. Un objeto es reconocido como casa, si es suficientemente coincidente con ese tipo, la apreciación de la coincidencia puede, por otra parte, variar según las circunstancias. El tipo es, en la esfera del objeto, la noción ideal, abstracta, y los individuos que han contribuido en al formación de ese tipo, o que le han sido reconocidos posteriormente como coincidentes, son sus materializaciones. Desde este punto de vista, la noción de tipo parece tomar, en las ciencias enumerativas o descriptivas, la misma posición de principio, la misma virtud explicativa que las nociones geométricas en las ciencias exactas.

Echemos ahora un vistazo sobre lo que acabamos de hacer. Hemos encuadrado la axiomatización que da origen a las nociones geométricas a partir de dos axiomatizaciones, una que la precede y que da origen a los conceptos de diferentes objetos, la otra que la sucede y por la cual las nociones de la lógica se constituyen en objetos autónomos de pensamiento. En tres etapas diferentes del pensamiento, hemos reconocido que lo que viene a inscribirse en nuestro conocimiento, no es ciertamente una reproducción directamente fiel del mundo exterior; lo que está inscrito en nuestra mente es, por el contrario, una sucesión de imágenes esquemáticas, sumarias y provisorias. En los tres casos, el conocimiento mismo de la realidad toma la vía marcada por las palabras: abstracción, esquematización y axiomatización.

Habíamos dicho: hace falta, en primer lugar, percibir sobre un punto favorable lo que podríamos poner en lugar de la idea demasiado simple que opone los dos términos: verdad y realidad. Es lo que acabamos de hacer: en tres asaltos. Y no creo que sea todavía necesario subrayar cómo el proceso de la esquematización axiomática, como lo acabo de exponer, rebasa el marco estrecho de las opiniones tradicionales. La formulación de un axioma no es, ni la expresión de una verdad trascendente, ni una definición arbitraria: es, por el contrario, una operación que desciende profundamente en la descripción de lo real y que, aprehendiéndolo, le da la impronta, a la vez ideal y provisoria, que conviene a la estructura de nuestra mente.

Y así como el dominio de la geometría quedará siempre vedado a quién se rehuse a imaginar las nociones fundamentales, a crear por su propio esfuerzo las imágenes que se le sugieren; así mismo yo no creo que una búsqueda sincera, sobre lo que pueda significar la palabra realidad, pueda evitar el esfuerzo que exige la concepción clara del método axiomático que acabamos de bosquejar.

Ahora por otra parte, el punto esencial está a la espera. El resto de nuestra tarea está señalado de antemano. Tendríamos que darnos cuenta si la idea recientemente adquirida debe quedar encerrada en el dominio que le ha dado origen, o bien si es pertinente también a otros dominios del pensamiento. Ahora bien, nada se opone a que nuestro método se extienda como una mancha de aceite. Las otras partes de las matemáticas pueden fácilmente situarse sobre la misma base. Se recoge así, de manera totalmente natural el punto de vista de Helmholtz sobre el origen empírico de la aritmética, al cual ya he hecho alusión. En cuanto a la lógica ordinaria, apenas nos referiremos a lo que hemos dicho ya. *Ver* en las reglas de la lógica una extensión de las leyes de la física del objeto cualquiera es, precisamente, dar el paso decisivo para engendrarla según nuestro método. Todavía mejor: el pasaje de la lógica ordinaria a la lógica modificada que permite evitar las antinomias es, rigurosa y estrictamente una esquematización axiomática a partir de la lógica de Aristóteles. la noción de elemento lógico es el abstracto cuyo correlato concreto es el objeto en el sentido de Aristóteles.

Nos dirigimos a continuación a la física siguiendo una pendiente natural. Nuestro método ha dado a las matemáticas elementales precisamente el aspecto de un capítulo de la física; a la lógica, el aspecto de una teoría del objeto; a la aritmética, el de una teoría de agrupamientos y permutaciones de muchos objetos; a la geometría, el de la teoría del espacio sensible o del espacio físico. Sobre la base de nuestro método, la vía se abre de manera totalmente natural a la comprensión de las geometrías no–euclidianas , que son también teorías del espacio. El hecho de que estas geometrías sean igualmente verdaderas desde el punto de vista matemático, es decir que sean igualmente no–contradictorias, no prejuzga, de ninguna manera, su mayor o menor eficacia para representar el espacio de los fenómenos.

Y puesto que acabamos de mencionar de nuevo la verdad matemática, que se me permita agregar un breve comentario. Las nociones de verdadero y falso se encuentran en la reconstrucción axiomática de la lógica ordinaria. Pero estas nociones han perdido su temible apariencia de absoluto: también ellas han tomado la forma de nociones ideales y esquemáticas, abstraídas de concordancias y discrepancias de la esfera intuitiva; viven ahora una vida disminuida, reducida a la escala humana.

Para regresar a la física, no hay más que dar un paso para transitar de la geometría a la cinemática, ya sea clásica o einsteniana. Las cinemáticas son, en efecto, teorías del espacio–tiempo, necesariamente como las geometrías son teorías del espacio a secas. Se podría continuar de la misma manera, pero también se puede inmediatamente percibir las cosas desde un punto de vista más general. De la misma forma que la geometría frente a nuestras relaciones intuitivas, toda teoría racional está frente al material de observación que la soporta, en la relación axiomática de un abstracto al concreto de sus materializaciones. De las ciencias llamadas exactas, se puede pasar a las ciencias especialmente descriptivas o enumerativas. La introducción de la noción de tipo, de la que ya he hablado, permite también percibirlas dentro de la posición axiomática.

El ciclo de encarnaciones de nuestro método todavía no está completo. Hay otro problema muy cercano al de la significación de las nociones matemáticas o, más generalmente, de las nociones científicas: es el problema de la eficacia del lenguaje, el problema de la adecuación de las palabras a las cosas. De nuevo aquí, las palabras son las abstracciones según el método de la esquematización axiomática. Y no es sin un cierto escalofrío que uno ve caer de su pedestal la noción misma del ser, en la multitud de nociones imperfectas y sumarias.

Así, poco a poco, se reconoce en todo lo que es expresión y objeto de esta expresión, pensamiento y objeto del pensamiento, conocimiento y objeto del conocimiento, el dualismo cuyo modelo hemos advertido en la geometría elemental. En todos los dominios y en todas las etapas, la actividad de nuestra mente cuando se acerca al conocimiento, permanece profundamente idéntica a sí misma.

Y finalmente, permítaseme observar que mis explicaciones no escapan a esta regla. Yo les suplico que no se dejen detener por las diferencias ciertas que hay entre la función del lenguaje ordinario y la del lenguaje de los símbolos matemáticos, o entre la formación de nuestros conocimientos intuitivos y el surgimiento de la teoría más elevada. Les pido que hagan abstracción de estas diferencias y que conciban una identidad que les sea común a todos... Reconocerán aquí mismo la imagen de la esquematización axiomática. No podría yo formular conclusión más contundente: *Aún las explicaciones que he dado, aportan su testimonio en favor de los puntos de vista que he formulado.*

Traducción: Guillermina Waldegg