Educación Matemática

Vol. 11 • No. 3 • Diciembre 1999
ISSN 0187-8298

Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V.

Educación Matemática

Vol. 11 ● No. 3 ● Diciembre 1999

Contenido

Contenido

Grupos Colaboradores

EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Se publica en los meses de abril, agosto y diciembre
Vol. 11 · No. 3 · Diciembre, 1999 · Tiraje 2000 ejemplares
SUSCRIPCIÓN
anual, incluídos gastos de envío. En México: $ 100.00. Otros países: US$ 30.00
Envíe Cheque o giro postal o bancario a
Nebraska 199, Col. Nápoles, 03810 México, D.F. Tel. 5 23 09 94. Fax 5 43 11 73
Publicidad
Laura Morfín Chong
Envíe sus colaboraciones a la redacción, en la misma dirección.
Las opiniones expresadas en los artículos son responsabilidad de los autores.

ISNN 0187-82988. Impreso en México
Producción: Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.
Franqueo pagado publicación periódica, permiso provisional autorizado por SEPAMEX. Certificado de licitud de título No. 4243, de contenido No. 3459.

Editorial

Muchos de los esfuerzos en la investigación en educación matemática durante los últimos años han tratado de explicar las maneras en las que los estudiantes y los maestros visualizan, formulan y relacionan las nociones matemáticas y los elementos derivados de éstas. Una parte importante de este tipo de trabajos de investigación nos remiten a las creencias, concepciones, conocimientos y representaciones de los sujetos; su interés deriva del supuesto de que, a partir de este tipo de elementos, será posible explicar algunas de las acciones en el aula, tanto de los estudiantes como de los docentes.

Las representaciones desde la perspectiva de la psicología, y sobre todo en lo relacionado a los trabajos de Piaget, adquieren una connotación específica dentro de los procesos mentales de la construcción de conceptos. Desde una perspectiva sociológica, por otro lado, las representaciones son estudiadas en el plano de las creencias y de las concepciones.

Si bien los individuos actúan en función de sus experiencias y de sus estructuras cognitivas previas, no siempre ha resultado fácil establecer con claridad la influencia que estos elementos tienen en las acciones del sujeto. Dos individuos con ideas compartidas sobre una situación dada pueden reaccionar de manera diferente ante ella; no basta entonces analizar sólo las representaciones, es necesario analizar las relaciones entre éstas y el impacto que tienen en diferentes contextos. Por ejemplo, de los estudios sobre el razonamiento matemático o sobre el papel del razonamiento lógico, se sabe que, además de las concepciones previas del sujeto, el contexto y la atmósfera presente en las distintas situaciones adquieren importancia a la hora de explicar las expresiones que tienen los individuos ante diversas problemáticas.

Falta mucho por hacer en esta dirección; es un primer esfuerzo lo que se ha realizado, pero como podremos observar en muchos trabajos incluidos en este número, hay algunas orientaciones muy claras del papel de las representaciones en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

ACLARACIÓN

Por un error involuntario, en el Número 3 del Volumen 10 de diciembre de 1998, se omitió la introducción a la contribución de Juan José Rivaud, titulada "Jesús Alarcón (Papini)" (pp 5-7). Ésta debió decir: *La presente conferencia fue pronunciada en el marco del homenaje póstumo al Dr. Jesús Alarcón Bortolussi organizado por el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav.*
Ofrecemos una disculpa por esta omisión.

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

Representaciones de los profesores de la escuela primaria sobre las matemáticas y su enseñanza[1]

Fecha de recepción: Abril, 1998

Educación Matemática Vol. 11 No. 3 Diciembre 1999 pp. 5-24

Marie-Lise Peltier[2]
Institut Universitaire de Formation de Maîtres, Francia
Marie-Lise.Peltier@univ-roven.fr

Resumen: *El trabajo aquí reportado vincula la didáctica de matemáticas con la formación de profesores. Se analizan las representaciones metacognitivas acerca de las matemáticas y su enseñanza de un centenar de ingresantes a un Instituto Universitario de Formación de Maestros (IUFM); asimismo, se analiza la evolución que tales representaciones sufren en el transcurso de la formación recibida en el Instituto. Finalmente, a partir de un estudio de caso, se observan los vínculos y las rupturas entre las concepciones "teóricas" de los estudiantes y las decisiones que toman en las clases de matemáticas durante sus prácticas como profesores de escuela.*

Abstract: *Le travail présenté ici, lie la didactique des mathématiques à la formation des professeurs. D'abord, on analise les représentations metacognitives des mathématiques et leur enseignement sur une centaine de nouveaux élèves de l'Institut Universitaire de Formation de Maîtres (IUFM); pareillement, on analise l'evolution que des telles répresentations subissent au cours de la formation reçu à l'Institut. Finalement, à partir d'un étude de cas, on éxamine les liens et les ruptures entre les conceptions "théoriques" des étudiants et les décisions qu'ils prennent dans les classes des mathématiques pendant leurs pratiques en tant que professeurs d'école.*

Introducción

El equipo en el que se inserta la investigación que aquí reporto trabaja sobre las relaciones entre formación profesional en matemáticas y prácticas efectivas de los profesores de escuela. Para presentar sucintamente la relación entre estas preocupaciones y el marco teórico de la didáctica de las matemáticas, podríamos decir que el sistema didáctico se presenta como un conjunto de relaciones que vinculan los polos *maestro-alumnos-saber*. Este sistema es él mismo un polo del sistema en el que se inscribe la formación profesional en matemáticas para los profesores de escuela. Nuestra hipótesis

[1] Traducción: Alberto Carvajal Juárez.

[2] Marie-Lise Peltier trabaja actualmente en un equipo de investigación inter-IUFM, (Institutos Universitarios de Formación de Maestros de Francia) ligado al equipo de investigación DID IREM del IREM y de la Universidad de París VII, el cual fue iniciado por Aline ROBERT, profesora universitaria en el IUFM de Versalles; otros participantes en el equipo son Denis BUTLEN, Profesor de conferencias en el IUFM de Créteil, que prepara una *habilitación* para dirigir investigaciones; Pascale MASSELOT, profesora de matemáticas en el IUFM de Créteil, que prepara una tesis en didáctica de las matemáticas en el UFR DE Ciencias de la Educación de París V; Danielle VERONES, profesora de matemáticas en el IUFM de Versalles, que prepara una tesis en didáctica de las matemáticas en el UFR de Ciencias de la Educación de París V.

inicial es que el polo "maestro", y el polo "alumnos" (no alumno en singular, sino el grupo clase,) son verdaderas variables a tomarse en cuenta cuando se estudia el funcionamiento del sistema (didáctico).

Buscamos entonces, en un primer momento, si es posible detectar regularidades en las prácticas profesionales de los maestros principiantes, regularidades que ya no serían observables en maestros *confirmados*[3]; buscamos también si estas regularidades dependen de la disciplina enseñada, y del tipo de clase en la que el profesor enseña. E investigamos de qué manera la formación podría tomar en cuenta estos elementos para ayudar a progresar a los profesores principiantes.

Voy a presentar aquí algunos resultados relacionados con la dificultad de los profesores practicantes[4] en sus prácticas efectivas, para tomar en cuenta las aportaciones de la formación y su regreso a prácticas que reproducen las que ellos vivieron siendo alumnos, cuando se sienten en una situación de inseguridad.

I. LAS CONCEPCIONES DECLARADAS DE LOS PROFESORES PRACTICANTES

I.1. Referencias teóricas y metodología

Centré mi estudio en las representaciones meta-cognitivas de los estudiantes que ingresan al proceso de formación, a modo de intentar probar la hipótesis según la cual la formación recibida puede modificar, o al menos hacer que evolucionen estas representaciones.

El término de representación fue tomado de la psicología social. Me apoyaré en la definición ofrecida por J. C. Abric[5]:

"La representación es un sistema coherente y jerarquizado, organizado alrededor del núcleo de imágenes, la representación es una visión del mundo. Pero es una visión funcional y normativa que permite al individuo dar sentido a sus conductas, comprender la realidad a través de su propio sistema de referencia, y desarrollar una actividad de asimilación y de apropiación de esta realidad". Abric describe luego las características de una representación: "toda representación está constituida por tres elementos fundamentales: un núcleo central de un conjunto de informaciones, de actitudes y de creencias organizado alrededor de este núcleo central; y un sistema de categorización".

Si seguimos a J. C. Abric al postular una determinación de los comportamientos mediante las representaciones, debemos tomar en cuenta los procesos que hacen posible su evolución y su transformación. Citemos de nuevo a Abric[6]:

[3] En la didáctica francesa a los profesores que tienen muchos años de experiencia docente se les denomina «confirmados».

[4] A lo largo del artículo se llamará «profesor practicante» a los estudiantes de IUFM que realizan su estancia en escuelas primarias como parte de su formación. Esta estancia consiste en fungir como maestro de grupo, con la asesoría del maestro responsable (ya formado) y el apoyo de su maestro de prácticas (N. del T.).

[5] J. C. Abric (1987) Cooperación; competencia y representaciones sociales. Ediciones Delval. Página 64

[6] J. C. Abric. Idem página 74

"En la medida en la que estas representaciones son estados organizados, estables y relativamente equilibrados, cualquier transformación de uno de los elementos de la relación –sujeto o entorno– trae consigo una transformación de la representación en el sentido del restablecimiento del equilibrio así comprometido. Por esto, cualquier transformación de la representación se referirá prioritariamente a la *transformación de los elementos periféricos*, sin que el núcleo central sea puesto nuevamente en cuestión; ya que, volver a poner en tela de juicio al núcleo central traería una transformación completa de todo el sistema, un trastocamiento completo del universo de opiniones del sujeto. Evitar el volver a poner en tela de juicio, como principio de economía que rige la mayoría de los fenómenos cognoscitivos, prohibe entonces una transformación del núcleo central mientras los elementos nuevos pueden integrarse a costa de una transformación menor de los elementos periféricos. (...) Teniendo en cuenta el mismo principio, puede decirse que la transformación de una representación se operará intentando alcanzar y volviendo a poner en tela de juicio el más pequeño número posible de elementos de la representación inicial. (...) Entonces, la transformación real y efectiva de una representación sólo operará cuando sean los elementos del núcleo central los que vuelvan a ponerse en tela de juicio y no puedan mantenerse."

Por tanto, mi proyecto era intentar que emergieran algunos aspectos de las representaciones de los estudiantes sobre las matemáticas, su aprendizaje y su enseñanza, y estudiar si la formación recibida en el IUFM tiene alguna incidencia sobre estas representaciones.

I.2. Los estudiantes al inicio de la formación[7]

La metodología que adopté en esta parte del estudio, consistió en reunir las huellas directas de las representaciones de los estudiantes vía un cuestionario[8].

I.2.1. Presentación de la población estudiada

El perfil de los nuevos estudiantes que ingresan al primer año del IUFM para preparar el examen de oposición para obtener un puesto de profesor de escuela, ha evolucionado mucho en el transcurso de los últimos años.

Mientras que el concurso de contratación de los maestros de primer grado era abierto para quienes tenían certificado de bachillerato[9], frecuentemente los candida-

---

[7] La formación a la que se hace referencia es la que se recibe en los IUFM. Actualmente los IUFM se encargan de la formación de maestros de todos los niveles (N. del T.)

[8] Entre las cuestiones planteadas estaban, por ejemplo, las siguientes "Dé tres palabras con las cuáles usted pueda calificar a las matemáticas", o "Cuáles son las características de un buen profesor de matematicas", o "Las de un mal alumno en matemáticas".

[9] Inicialmente, el concurso de contratación de los alumnos institutores había tenido lugar al final de tercero. Los alumnos inscritos seguían una escolaridad en la escuela normal análoga a la de los liceos, hasta el bachillerato; luego recibían una formación profesional de un año. En 1972, los normalistas, siempre inscritos en segundo, permanecían en su liceo hasta el bachillerato, luego entraban otra vez a la escuela normal para un año de formación profesional. En 1979, la inscripción se reservó para los titulares de bachillerato. Entonces, varias modalidades de formación se encadenaron en un tiempo muy corto: dos años de formación, de los cuales se alternaba uno (cursos y prácticas); tres años, dos de los cuales se consagraban a la preparación de un Diploma de estudios universitarios generales (DEUG) superior.polivalente especial del primer grado, o más tarde para la preparación de un DEUG. En 1986, -la inscripción se fijó en el nivel DEUG. Los dos años en la escuela normal eran enteramente profesionales, pero estaban regidos por textos oficiales que imponían un programa en cada una de las materias, a veces relativamente alejado de los conocimientos en relación con la escuela primaria.

tos eran estudiantes que habían elegido ser maestros porque era su deseo personal, o porque esta vía les permitía continuar sus estudios sin tener problemas financieros ya que eran funcionarios desde su ingreso a la escuela normal. Esto permitía entonces que jóvenes de medios relativamente modestos accedieran a esta profesión.

Actualmente, sólo luego del quinto grado y después de la obtención del bachillerato es cuando los estudiantes se convierten en profesores practicantes y por ende en funcionarios. Evidentemente este aumento en el tiempo de estudio se traduce en una revaloración de la profesión, principalmente en el plano indiciario, pero es probable que paralelamente excluya a cierto número de jóvenes de medios desfavorecidos, quienes habrían podido desear realizar este trabajo, y atrae a otros estudiantes que al iniciar sus estudios superiores, no tenían *a priori* el interés y el proyecto de "entrar" en la enseñanza.

Estas reformas institucionales traen sin duda modificaciones importantes en la mayoría de los conceptos de los estudiantes en cuanto a la enseñanza en general, y en cuanto a las matemáticas y a su enseñanza en particular.

El estudio aquí presentado se refiere a un centenar de estudiantes que entraron al primer año del IUFM[10] de Rouen, en octubre de 1993, y a quienes apliqué un cuestionario anónimo. Mi propósito no fue realizar un análisis estadístico de la población que ingresa en el proceso de formación, sino delimitar las representaciones dominantes de esta población, a fin de compararlas con las de los estudiantes que egresan del IUFM dos años más tarde, al terminar su formación. Las eventuales evoluciones observadas constituyen no las evoluciones efectivas de las representaciones de un grupo constituido por individuos identificables, sino más bien tendencias. Recordemos que la población de fin del segundo año no corresponde exactamente a la que entra en primer año por varios motivos: por un lado, los fracasos en los exámenes, y por el otro lado, debido a la presencia de profesores practicantes que no llevaron la formación del primer año. Además, como el cuestionario es anónimo, no es posible seguir cada caso individualmente. Estas diversas restricciones y límites me llevaron a no intentar aplicar una metodología demasiado fina que condujera a resultados que correrían el riesgo de no ser válidos.

Finalmente es necesario señalar que la edad de los 98 estudiantes interrogados variaba entre los 20 y los 40 años, pero tres cuartas partes de ellos tenían menos de 25 años.

I.2.2. Imágenes de las matemáticas

Las matemáticas se caracterizan esencialmente por su naturaleza de ciencia del razonamiento y de la deducción; las considera como lógicas, abstractas y rigurosas casi el 60% de los estudiantes. De igual manera, son definidas muy frecuentemente por sus contenidos o por los objetos sobre los que trabajan.

Los tipos de actividades que las matemáticas necesitan: investigación, reflexión deducción, son mencionados por una cuarta parte de los estudiantes interrogados.

[10] A partir de 1991, la formación que se imparte en los IUFM consta de dos años. El primero de ellos es el año facultativo (no obligatorio) y el segundo año obligatorio. Ingresan estudiantes de ramas diversas del conocimiento. Al término del primer año facultativo, se realizan pruebas disciplinarias y didácticas, en tanto el segundo año se realiza bajo un control continuo y la validación de las estnacias que realizan los estudiantes. Al término de los estudios se sale como profesor de escuela.

Una proporción análoga de estudiantes expresa "estados de ánimo" u opiniones subjetivas, impresiones agradables o, claramente y con mayor frecuencia, desagradables. Son muchos los estudiantes que parecen tener un pasado matemático relativamente doloroso.

Los estudios previos de los estudiantes tienen quizá una incidencia en la elección de los términos citados, nos percatamos de algunas tendencias: los estudiantes que tienen una licenciatura en filosofía o en ciencias de la educación, son más numerosos que los demás al citar el aspecto de "ciencia del razonamiento"; aquellos que tienen estudios en lenguas vivas, de historia o geografía, prefieren caracterizar a las matemáticas por sus contenidos; quienes tienen estudios literarios y de arte mencionan con más frecuencia el registro de las emociones. Por el contrario, no encontré correlación entre las respuestas de los estudiantes y su edad, o sus experiencias profesionales.

I.2.3 Concepciones del aprendizaje de las matemáticas

El modelo de aprendizaje descrito por más de las dos terceras partes de los estudiantes interrogados, es naturalmente el muy tradicional modelo: "aprendo, aplico". De igual manera, el aspecto progresivo, la necesidad de ir de lo simple a lo complejo son puntos citados con frecuencia. La idea de comprensión en el aprendizaje, sólo es citada por el 8% de los estudiantes. La representación que los estudiantes se han construido, se apoya en sus experiencias de matemáticas como alumnos, y no parece haber sido alterada por el aporte posterior de informaciones que llegan a contradecir esta imagen.

La imagen dominante del aprendizaje de las matemáticas es aquella fundada en la imitación y el entrenamiento, imagen vehiculizada con mucha frecuencia en la sociedad.

I.2.4. Índices y factores del éxito y del fracaso en matemáticas

Los factores del éxito y del fracaso en matemáticas citados por los estudiantes, no siempre son opuestos. Por ejemplo, si 72% de los estudiantes considera que el factor dominante del éxito es una aptitud innata en el niño para razonar de manera lógica y para *"nadar en la abstracción"*, únicamente el 42% imputa el fracaso a una falta de lógica. Para el éxito, el trabajo se menciona ampliamente y con más frecuencia que la motivación, mientras que para el fracaso, es la falta de motivación la que viene justo después de la falta de lógica. Si se cita la ausencia de trabajo, ésta aparece como consecuencia de la falta de motivación, del desinterés o del desánimo.

Asimismo, si 13% de los estudiantes cita como factor de fracaso la calidad del maestro, sólo 5 veces (de entre 100) es citada como factor de éxito.

En esta lógica, el buen alumno es entonces caracterizado por sus aptitudes. Los índices de identificación del buen alumno se buscan en la calidad de sus resultados, así como en su actitud frente al trabajo. Ningún estudiante menciona la actitud de búsqueda, el placer de hacerse preguntas, la aptitud para analizar un problema y para construir estrategias para resolverlas. Estas respuestas confirman el modelo pedagógico de referencia de los estudiantes; parece que para ellos, no son los alumnos quienes construyen sus conocimientos, sino el maestro quien presenta los saberes. El papel del alumno consiste entonces en comprenderlos, memorizarlos, identificar su funcionamiento en ejercicios efectuados por el maestro, y en aplicarlos en ejercicios similares por imitación reflexiva.

Y el mal alumno se identifica con la falta de espíritu lógico, con su incapacidad para aplicar *"el buen método"*, eventualmente por aplicarlo al azar sin comprender por qué, y con sus malas notas. Es un alumno que no logra seguir el hilo, que se da por vencido, que se desanima y baja los brazos. También es un alumno que no hace esfuerzos por comprender, o que además no tiene memoria, o que no repasa sus ejercicios en la noche y que, por tanto, no tiene bases. Es quizá, en una palabra, un alumno al que *"le repugnan"* las matemáticas, que está *"bloqueado"*, y que por tanto no le gustan *"por principio"*.

Ahí constatamos además respuestas relativamente muy estereotipadas, que corresponden a la clasificación clásica de los malos alumnos en cierto tipo de pedagogía tradicional. Las dificultades de los alumnos se imputan o bien a su falta de aptitudes innatas, o bien a su falta de trabajo o de buena voluntad. Las cuestiones relativas al sentido de los conocimientos para el niño, al lugar de las actividades cognoscitivas en los aprendizajes, al papel del maestro y del grupo que forma la clase, prácticamente nunca son planteadas.

I.2.5. Conocimientos útiles para enseñar las matemáticas en la escuela

Para la gran mayoría de los estudiantes, los únicos conocimientos útiles para enseñar las matemáticas en la escuela son los saberes matemáticos de la escuela. Los estudiantes parecen pensar que hay que conocer sólo lo que se debe enseñar para enseñarlo correctamente, consistiendo el papel del maestro en mostrar "saberes" a los niños; para cumplir este papel, basta repetir a los niños lo que está escrito en su libro luego de haberlo comprendido.

Los demás estudiantes citan también la pedagogía (30%), la didáctica (12%), la sicología del niño (11%).

Para muchos estudiantes, la pedagogía no responde a un dominio de saberes, sino más bien es una aptitud innata: *"hay que tener pedagogía"*, dicen algunos. Por tanto, estos estudiantes no piensan en mencionar conocimientos en pedagogía ya que para ellos se trata de un comportamiento, de una capacidad, que se tiene o no, y que parece no poder adquirirse.

Estas respuestas llevan a enunciar una última observación: los estudiantes en su gran mayoría, al entrar al IUFM, no parecen haber reflexionado en los diferentes conocimientos que se hacen necesarios para enseñar en la escuela primaria.

I.2.6. Características de un buen maestro

Si los conocimientos *"de base"* en la disciplina son citados como útiles para enseñar las matemáticas en la escuela, son las cualidades más bien pedagógicas son el criterio de calidad dominante del maestro. En efecto, 75% de los estudiantes identifican a un buen maestro gracias a un comportamiento o una capacidad que responde a la pedagogía. Las cualidades humanas y relacionales del maestro son una prueba de calidad para un estudiante de cada cinco, aproximadamente. Unicamente 10% de los estudiantes interrogados escogen índices de la calidad del maestro en el ambiente de la clase, el comportamiento o los resultados de los alumnos. No notamos diferencias importantes en las respuestas de los estudiantes que ya han enseñado, son quizá un poco menos numerosos que los demás al describir al mal maestro, y nunca citan el comportamiento o los resultados de los alumnos como criterio para caracterizar la calidad de aquél, quizá debido a dificultades para asumir su propia experiencia profesional en este dominio.

Los estudiantes, en su gran mayoría, parecen pensar que si los conocimientos matemáticos son útiles para enseñar las matemáticas en la escuela, la calidad de estos conocimientos o el dominio que tenga de ellos el maestro, no son garantía de la calidad de la enseñanza que éste brinda. Sólo las cualidades pedagógicas, relacionales y humanas parecen caracterizar al buen maestro. Ahora bien, para ellos, estas cualidades no parecen susceptibles de ser objetos de aprendizaje, lo que hace pensar que estos estudiantes no tienen realmente expectativas precisas en el terreno de la formación profesional.

I.2.7. Conclusiones sobre los resultados de la aplicación del cuestionario

Este estudio somero de las respuestas de nuestros estudiantes al cuestionario presentado, nos lleva a hacer una observación relativamente severa sobre la imagen de las matemáticas y de su enseñanza que estos estudiantes han entretejido en el transcurso de sus estudios.

La mayoría de los estudiantes hace referencia a un concepto muy tradicional de la enseñanza: el maestro muestra, explica, partiendo de lo simple para llegar a lo complejo, y los alumnos deben aprender luego a aplicar, adiestrándose al imitar los modelos dados por el maestro. El buen maestro, en consecuencia, es aquél que explica clara, lenta y sencillamente sin desanimar a sus alumnos. Los alumnos tienen éxito esencialmente en razón de sus aptitudes innatas, lo que descarga al maestro de la responsabilidad de los fracasos eventuales.

Al entrar al IUFM, los estudiantes consideran que únicamente los conocimientos matemáticos son útiles para enseñar las matemáticas en la escuela primaria, e incluso sólo los conocimientos de la escuela primaria. Simultáneamente evalúan la calidad de un maestro únicamente con base en sus capacidades pedagógicas, capacidades que según ellos parecen no poder ser objeto de algún aprendizaje.

Este cuadro un poco caricaturesco, si no estuviera apoyado por el análisis preciso de las respuestas a este cuestionario, podría parecer a la vez simplista y pérfido.

Pero debemos tomar en cuenta este estado de cosas para comprender las perturbaciones y las desestabilizaciones que va a provocar la formación propuesta en el IUFM. Por una parte, estos estudiantes van a ser conducidos de nuevo a poner en tela de juicio el nivel requerido de conocimientos matemáticos ya que es necesario para la construcción de situaciones de aprendizaje. Van a tener también que revisar el estatus de los saberes matemáticos y los roles respectivos del maestro y del alumno. Sobre todo van a tener que pensar de otra manera el aprendizaje de las matemáticas, y este cambio de actitud, en relación con lo que quiere decir para ellos "hacer matemáticas", es particularmente difícil de efectuar.

Ahora delimitaré las modificaciones que se han operado en los conceptos iniciales de los estudiantes, e intentaré señalar si las evoluciones declaradas remiten a evoluciones efectivas en las prácticas, con el fin de probarlas y de elaborar hipótesis sobre su eventual perennidad.

I. 3. Los estudiantes al salir del IUFM

Reuní las respuestas de 145 practicantes en 1994, y de 208 profesores practicantes en 1995. La edad de los estudiantes que quisieron mencionarla, variaba entre 22 y 48 años. El promedio de edad era de 28 años en 1994, y 26.4 años en 1995; 30% en 1994 y 16% en 1995 de los profesores practicantes tenían más de 30 años, 80% eran mujeres.

Alrededor del 60% de los profesores practicantes tenían diploma literario, 20% diploma científico, 8% diploma en economía.

Los profesores practicantes estaban repartidos en 9 grupos cuyo alumnado variaba de 24 a 28 estudiantes.

I.3.1. Imágenes de las matemáticas e incidencia de la formación sobre estas imágenes

Los términos *"lógica, rigor, abstracción o razonamiento"*, son citados por el 80% de los profesores (practicantes). Se trata de un registro prácticamente neutro sobre el plano afectivo, cuyos términos tienden a caracterizar las matemáticas sobre el plano intelectual de manera relativamente racional. Notemos que el hecho de que los estudiantes mencionen términos de este registro, no informa absolutamente sobre los componentes afectivos de su imagen de las matemáticas. Ellos pueden, en efecto, agregar *"rigor" a "placer" o "angustia"; "lógica"* a *"necesario"* o a *"inútil"; "razonamiento"* tanto a *"investigación"* o a *"automatismo"!*

Un punto nos parece muy importante en los futuros profesores encargados de la enseñanza de las matemáticas: la imagen de las matemáticas es declarada como positiva por casi la totalidad de los estudiantes al final de su formación.

Si comparamos las respuestas cuando entran al IUFM y al final de su formación, notamos una disminución clara del porcentaje de estudiantes que citan términos con connotación negativa. Nosotros proponemos dos interpretaciones de esta disminución: ya sea que los estudiantes que habían citado términos en este tono han sido más numerosos al reprobar las oposiciones; ya sea que la formación recibida modificó la imagen negativa que los estudiantes tenían al llegar.

La formación en el IUFM parece (de cualquier manera) tener un impacto inmediato sobre esta imagen declarada de las matemáticas, ya que cerca de la mitad de los estudiantes perciben una evolución positiva.

He intentado delimitar los factores que podían considerarse en esta posibilidad de evolución en el IUFM. No parece que haya una clara correlación entre los estudios realizados anteriormente y la disposición de los candidatos a modificar su representación declarada de las matemáticas.

Los estudiantes de más edad parecen ser un poco más sensibles al impacto de la formación que los más jóvenes. Esto puede explicarse por el hecho de que sus estudios sin duda se efectuaron en la época de las llamadas matemáticas modernas. En este caso, es probable que la presentación actual de las matemáticas les parezca no solamente diferente, sino también más accesible, sobre todo si les atraía poco esta disciplina. Puede que simplemente sus recuerdos de las matemáticas no sean muy precisos, lo que quizá los induce a identificar una evolución positiva.

Pero si la edad no puede ser un factor totalmente desdeñable en la eventual evolución de la imagen de las matemáticas en los estudiantes, no obstante sería arriesgado considerarla como determinante.

Las diferencias registradas por grupos no permiten de manera clara llegar a la conclusión de la influencia del profesor formador de segundo año, ya que en grupos diferentes que siguen las enseñanzas del mismo profesor, los resultados pueden ser notablemente diferentes. Sin embargo, nos parece que es con mucho la formación recibida en el IUFM, más que la edad o los estudios previos, lo que lleva a los estudiantes a concluir sobre este punto.

Es interesante señalar los casos de respuestas negativas. Algunos apostaban a la formación para liberarse de su angustia por enseñar esta materia, y la formación no cumplió este fin. Los cursos dados en el IUFM no permitieron a otros sumergirse en la disciplina. La formación parece haber jugado un papel perturbador para estos últimos.

En conclusión, parece importante decir que los profesores practicantes al dejar el IUFM, afirman de manera muy marcada, tener una imagen positiva de las matemáticas, imagen que ya tenía aproximadamente la mitad de ellos, imagen que la otra mitad construyó (al parecer) gracias a la formación en su diversidad. Aparte de la naturaleza de la formación recibida (contenidos, profesores, forma), pocos factores parecen tener una influencia sobre las eventuales modificaciones de esta imagen declarada, o más exactamente, sobre la posibilidad o la capacidad para que los estudiantes acepten estos eventuales cambios de puntos de vista.

Por otro lado, si señalamos un impacto de la formación sobre las respuestas declaradas de los estudiantes, hay que estar vigilantes a cualquier forma de conclusión apresurada. En efecto, no tenemos ningún elemento para saber si la formación no tendrá un impacto diferido sobre la imagen de las matemáticas en los futuros maestros cuando se confronten a las realidades del terreno.

I.3.2. Concepciones de aprendizaje y de la enseñanza de las matemáticas.

La distinción "aprendizaje" y "enseñanza" no parece clara a muchos. El 17% de los estudiantes proponen respuestas que responden a un concepto "didáctico" actual del aprendizaje, digo "actual" porque es el preconizado, al menos en parte, por los textos oficiales, y "didáctico", porque se trata de un concepto que toma en cuenta varios conceptos obtenidos mediante el análisis didáctico de los procesos de aprendizaje y de las relaciones enseñanza-aprendizaje. Estos estudiantes parecen haberse apropiado, si no de este concepto, al menos del discurso sobre éste de manera bastante precisa y sin demasiada desviación. El 32% de los estudiantes da solamente algunos elementos de este concepto y olvidan muchos, y no de los más insignificantes. Son muchos los que, por ejemplo, no hablan de la necesidad de institucionalizar algunos saberes. Otras respuestas ponen en evidencia algunas desviaciones posibles: *"dejar que los niños aprendan a su ritmo", "no imponer nada".*

El 33% de los estudiantes describe una pedagogía activa o una pedagogía de proyecto. Aquí los niños juegan, manipulan sin finalidad aparente, son activos, disfrutan, el gran ausente es el saber matemático. A menudo estas proposiciones son una reacción contra la pedagogía que estos estudiantes recibieron cuando eran alumnos: *"abolir la pedagogía clásica que nos traumatizó".*

Unos pocos estudiantes (4%) describen una pedagogía relativamente cercana a la pedagogía tradicional de la escuela primaria, insistiendo en la necesidad de partir de las cosas simples y allanar las dificultades frente a los alumnos. Estos estudiantes son poco numerosos mientras que, en la práctica, es este concepto el que realmente van a poner más en práctica.

Por otro lado, se nota la importancia de la imagen que dan los formadores de sus propios conceptos del aprendizaje y de la enseñanza.

Incluso si los estudiantes han construido una concepción personal del aprendizaje/enseñanza de las matemáticas, son todavía muy prudentes en cuanto a su capacidad (¿o su deseo?) de ponerla efectivamente en práctica. Son muy pocos quienes dicen espontáneamente haberlo intentado en el curso de las estancias, son más quienes dicen que las condiciones del terreno no lo permiten.

I.3.3. ¿Qué significa el término "didáctica" para los estudiantes?

Los estudiantes ven la didáctica de las matemáticas, no como un campo de investigación sobre los fenómenos de transmisión de los saberes matemáticos en un contexto escolar, o como una teorización de estos fenómenos, sino mucho más como un discurso relativamente prescriptivo y por tanto en parte normativo de las prácticas de enseñanza, además de ser muy poco mencionada la especificidad de los saberes matemáticos. Los estudiantes asimilan más frecuentemente didáctica y pedagogía. La mayoría desea que la didáctica ofrezca métodos a seguir para enseñar bien, motivando a los alumnos. De hecho, quizá tengamos aquí elementos de respuesta a una pregunta importante para los investigadores, a saber: ¿el papel de la didáctica es proporcionar resultados que permitan mejorar el funcionamiento de la enseñanza de las matemáticas?, y si así es, ¿está lo suficientemente desarrollada para cumplir este papel?

I.3.4. La formación

La gran mayoría de los estudiantes (83%) dicen haber progresado en el curso del primer año de formación, esencialmente en matemáticas (han actualizado los conocimientos), y más particularmente en geometría. Pero, en cambio, solamente 40% de los estudiantes dicen que la preparación para el concurso les permitió formarse una imagen de lo que son las matemáticas y su enseñanza. Cerca de la tercera parte de los estudiantes consideran este año de preparación para el concurso principalmente como un año de curso intensivo para el concurso, y en el mejor de los casos de renovación de los conocimientos en matemáticas.

Luego de este estudio, estamos escépticos sobre la eficacia del primer año desde el punto de vista de la formación profesional. Es claro que desde el punto de vista de la actualización de conocimientos a nivel matemático, su eficacia es reconocida por la gran mayoría, pero varios señalan el desfase entre las matemáticas para el examen-concurso y las matemáticas para la escuela elemental. Por otro lado, si los estudiantes no consideran este año como un año de formación profesional, no sorprende que no encuentren suficiente la formación de segundo año para abordar su futuro trabajo.

Siguiendo los grupos, el segundo año en el IUFM es juzgado de manera radicalmente diferente y si, en total, 63% de los profesores practicantes dicen haber progresado en este año, los porcentajes varían de 8% a 100%.

Pero si la edad no puede ser un factor totalmente desdeñable en la eventual evolución de la imagen de las matemáticas en los estudiantes, no obstante sería arriesgado considerarla como determinante.

Las diferencias registradas por grupos no permiten de manera clara llegar a la conclusión de la influencia del profesor formador de segundo año, ya que en grupos diferentes que siguen las enseñanzas del mismo profesor, los resultados pueden ser notablemente diferentes. Sin embargo, nos parece que es con mucho la formación recibida en el IUFM, más que la edad o los estudios previos, lo que lleva a los estudiantes a concluir sobre este punto.

Es interesante señalar los casos de respuestas negativas. Algunos apostaban a la formación para liberarse de su angustia por enseñar esta materia, y la formación no cumplió este fin. Los cursos dados en el IUFM no permitieron a otros sumergirse en la disciplina. La formación parece haber jugado un papel perturbador para estos últimos.

En conclusión, parece importante decir que los profesores practicantes al dejar el IUFM, afirman de manera muy marcada, tener una imagen positiva de las matemáticas, imagen que ya tenía aproximadamente la mitad de ellos, imagen que la otra mitad construyó (al parecer) gracias a la formación en su diversidad. Aparte de la naturaleza de la formación recibida (contenidos, profesores, forma), pocos factores parecen tener una influencia sobre las eventuales modificaciones de esta imagen declarada, o más exactamente, sobre la posibilidad o la capacidad para que los estudiantes acepten estos eventuales cambios de puntos de vista.

Por otro lado, si señalamos un impacto de la formación sobre las respuestas declaradas de los estudiantes, hay que estar vigilantes a cualquier forma de conclusión apresurada. En efecto, no tenemos ningún elemento para saber si la formación no tendrá un impacto diferido sobre la imagen de las matemáticas en los futuros maestros cuando se confronten a las realidades del terreno.

I.3.2. Concepciones de aprendizaje y de la enseñanza de las matemáticas.

La distinción "aprendizaje" y "enseñanza" no parece clara a muchos. El 17% de los estudiantes proponen respuestas que responden a un concepto "didáctico" actual del aprendizaje, digo "actual" porque es el preconizado, al menos en parte, por los textos oficiales, y "didáctico", porque se trata de un concepto que toma en cuenta varios conceptos obtenidos mediante el análisis didáctico de los procesos de aprendizaje y de las relaciones enseñanza-aprendizaje. Estos estudiantes parecen haberse apropiado, si no de este concepto, al menos del discurso sobre éste de manera bastante precisa y sin demasiada desviación. El 32% de los estudiantes da solamente algunos elementos de este concepto y olvidan muchos, y no de los más insignificantes. Son muchos los que, por ejemplo, no hablan de la necesidad de institucionalizar algunos saberes. Otras respuestas ponen en evidencia algunas desviaciones posibles: *"dejar que los niños aprendan a su ritmo", "no imponer nada".*

El 33% de los estudiantes describe una pedagogía activa o una pedagogía de proyecto. Aquí los niños juegan, manipulan sin finalidad aparente, son activos, disfrutan, el gran ausente es el saber matemático. A menudo estas proposiciones son una reacción contra la pedagogía que estos estudiantes recibieron cuando eran alumnos: *"abolir la pedagogía clásica que nos traumatizó".*

Unos pocos estudiantes (4%) describen una pedagogía relativamente cercana a la pedagogía tradicional de la escuela primaria, insistiendo en la necesidad de partir de las cosas simples y allanar las dificultades frente a los alumnos. Estos estudiantes son poco numerosos mientras que, en la práctica, es este concepto el que realmente van a poner más en práctica.

Por otro lado, se nota la importancia de la imagen que dan los formadores de sus propios conceptos del aprendizaje y de la enseñanza.

Incluso si los estudiantes han construido una concepción personal del aprendizaje/enseñanza de las matemáticas, son todavía muy prudentes en cuanto a su capacidad (¿o su deseo?) de ponerla efectivamente en práctica. Son muy pocos quienes dicen espontáneamente haberlo intentado en el curso de las estancias, son más quienes dicen que las condiciones del terreno no lo permiten.

I.3.3. ¿Qué significa el término "didáctica" para los estudiantes?

Los estudiantes ven la didáctica de las matemáticas, no como un campo de investigación sobre los fenómenos de transmisión de los saberes matemáticos en un contexto escolar, o como una teorización de estos fenómenos, sino mucho más como un discurso relativamente prescriptivo y por tanto en parte normativo de las prácticas de enseñanza, además de ser muy poco mencionada la especificidad de los saberes matemáticos. Los estudiantes asimilan más frecuentemente didáctica y pedagogía. La mayoría desea que la didáctica ofrezca métodos a seguir para enseñar bien, motivando a los alumnos. De hecho, quizá tengamos aquí elementos de respuesta a una pregunta importante para los investigadores, a saber: ¿el papel de la didáctica es proporcionar resultados que permitan mejorar el funcionamiento de la enseñanza de las matemáticas?, y si así es, ¿está lo suficientemente desarrollada para cumplir este papel?

I.3.4. La formación

La gran mayoría de los estudiantes (83%) dicen haber progresado en el curso del primer año de formación, esencialmente en matemáticas (han actualizado los conocimientos), y más particularmente en geometría. Pero, en cambio, solamente 40% de los estudiantes dicen que la preparación para el concurso les permitió formarse una imagen de lo que son las matemáticas y su enseñanza. Cerca de la tercera parte de los estudiantes consideran este año de preparación para el concurso principalmente como un año de curso intensivo para el concurso, y en el mejor de los casos de renovación de los conocimientos en matemáticas.

Luego de este estudio, estamos escépticos sobre la eficacia del primer año desde el punto de vista de la formación profesional. Es claro que desde el punto de vista de la actualización de conocimientos a nivel matemático, su eficacia es reconocida por la gran mayoría, pero varios señalan el desfase entre las matemáticas para el examen-concurso y las matemáticas para la escuela elemental. Por otro lado, si los estudiantes no consideran este año como un año de formación profesional, no sorprende que no encuentren suficiente la formación de segundo año para abordar su futuro trabajo.

Siguiendo los grupos, el segundo año en el IUFM es juzgado de manera radicalmente diferente y si, en total, 63% de los profesores practicantes dicen haber progresado en este año, los porcentajes varían de 8% a 100%.

En algunos grupos, los estudiantes mencionan como elemento particularmente positivo el hecho de haber sido *"puestos en situación de investigación"*, lo que les permitió *"comprender mejor cómo pueden reaccionar los niños"*. *"Las puestas en situación reales permiten reflexionar en el acto de enseñar, herramientas y objetivos son hoy portadoras de sentido"*, dicen o incluso: *"las puestas en situación en clase dan ganas de enseñar las mate..."*.

Aquí establecemos un vínculo con las estrategias de formación que con frecuencia ponen en práctica los profesores de estos grupos, estrategias transposicionales[11], que permiten a los estudiantes efectuar un paso de lado, necesario para pasar de la posición de alumno a la de maestro.

I.3.5. Conclusión relativa a la evolución, en el transcurso de la formación, de las concepciones declaradas de los estudiantes sobre las matemáticas, su aprendizaje y su enseñanza

El primer punto relativamente sorprendente es la poca evolución global de la imagen de las matemáticas en el transcurso de la formación. Esto nos remite al resultado conocido relativo a la fuerte resistencia de las representaciones a los cambios, situándose el impacto de la formación –sin duda–, más al nivel de los elementos periféricos de la representación que al nivel del núcleo central. No obstante, si nos referimos a las diferentes características constitutivas del núcleo central presentadas por Abric[12], nos parece necesario aportar algunas precisiones a esta primera constatación. He distinguido dos componentes complementarios en la representación de las matemáticas elaboradas por los estudiantes. La primera remite sobre todo a características intrínsecas de las matemáticas, relativamente objetivas y compartidas por muchos, esto es un punto de vista más bien intelectual sobre esta disciplina, construido esencialmente a partir de normas y de valores sociales. La segunda componente está constituida por elementos afectivos, relacionales, morales o ideológicos.

En las respuestas obtenidas al principio y al final de la formación, hemos constatado cierta estabilidad de los porcentajes relativos a los términos que remiten más al primer aspecto de la imagen de las matemáticas que acabo de presentar, mientras que observamos una clara evolución de los porcentajes relativos a los términos que remite principalmente al segundo. Esta constatación tendería a mostrar que la formación no tiene impacto sobre el componente intelectual de la imagen de los estudiantes, sin duda porque en este terreno, dicha formación presenta un punto de vista de las matemáticas suficientemente cercano del que se han forjado, para ser asimilado sin provocar poner éste en tela de juicio. Por el contrario, la formación llevó a muchos estudiantes a modificar, al menos superficialmente, su relación afectiva con las matemáticas. Notemos aquí que esta evolución se da en el sentido de una mayor comodidad, para pasar de la fase de alumno con dificultad en matemáticas a la del maestro que enseña esta disciplina.

Los factores de esta evolución en cuanto a la imagen de las matemáticas, que he llamado afectiva, tiene que buscarse sin duda, en el hecho de hacer uno mismo matemáticas, encontrando en ellas cierta satisfacción e incluso cierto placer. En

[11] Al respecto puede verse A. Kuzniak, 1994.

[12] J. C. Abric (1987) "Cooperación, competencia y representaciones sociales. Ed. Delval. Página 69

efecto, varios estudiantes citan como punto positivo de la formación, las puestas en situación sobre problemas que les permiten "volver a vivir" las matemáticas de una manera diferente. La modificación de la imagen de estos estudiantes es tanto más profunda en cuanto que tienen la posibilidad de analizar su propia actividad, su propio comportamiento, de realizar un trabajo de elucidación de lo que es la actividad matemática, poniendo este análisis en perspectiva con los elementos teóricos concernientes a los aprendizajes, como es el caso de las estrategias de transposición puestas en práctica por algunos profesores.

Los estudiantes al ingresar al IUFM consideraban que sólo los conocimientos matemáticos eran útiles para enseñar en la escuela primaria y que se trataba de conocimientos "de base" –de hecho, los mismos de la escuela primaria. Simultáneamente, evaluaban la calidad del maestro únicamente por sus capacidades pedagógicas, capacidades que parecían no poder ser objeto de ningún aprendizaje. Al final de la formación, fue claro que la gran mayoría de los estudiantes tomó conciencia de la existencia de un conjunto de saberes necesarios para enseñar. En este sentido, podríamos decir que los profesores practicantes comprendieron que la enseñanza era realmente una profesión y no una ocupación remunerada o un arte. Por esto, la formación es juzgada más bien positivamente, ya que les permitió actualizar conocimientos en matemáticas (principalmente en el primer año para la preparación del concurso, y progresar en didáctica, abarcando con este término, al parecer para muchos, todos los saberes profesionales que no identifican con las matemáticas.

Las concepciones declaradas de los estudiantes sobre el aprendizaje de las matemáticas y sobre su enseñanza son bastante modificados con la formación. De una concepción prácticamente unánime de una pedagogía tradicional: "el maestro enseña, el alumno aprende y aplica", los estudiantes evolucionan hacia otra concepción, más de acuerdo con los modelos preconizados actualmente por la institución que se apoyan ampliamente en el constructivismo, y toman en cuenta los resultados de las investigaciones en didáctica. Este cambio de punto de vista podría *a priori* facilitarse por su cambio de posición en el "triángulo didáctico". De hecho, para muchos practicantes el cambio se acompaña de una desestabilización importante, que corresponde a una desestructuración de su representación inicial del aprendizaje y de la enseñanza. Esta desestabilización va a ser más o menos profunda y vivida de manera diferente por cada uno de ellos. Sin duda es en la reconstrucción de la nueva concepción, y en las negociaciones necesarias de los conflictos interpersonales para conseguirlo, que el impacto de los profesores formadores es más grande.

I.3.6. Ideales-tipo de estudiantes

Presentaré aquí algunos casos tipo, que permiten "esquematizar" las concepciones declaradas de los practicantes al final de la formación[13], y delimitar mejor la complejidad de la formación inicial en matemáticas de los profesores practicantes.

CASO 1

La desestabilización provocada por la formación es profunda porque el modelo propuesto por el profesor de matemáticas está demasiado alejado de los modelos reco-

[13] Aquí se trata de lo que B Charlot (1992) llama "ideal tipo". Por supuesto que las descripciones no corresponden a ningún estudiante real.

nocidos por el profesor practicante. El "pasado matemático" de éste último parece tener entonces una fuerte incidencia sobre las posibilidades de apropiación de nuevas concepciones. Consideremos algunos subcasos.

- El practicante es un "buen alumno" en matemáticas, que ha tenido bastante "éxito" con una pedagogía tradicional. El conflicto interior puede resultar entonces, o bien por un rechazo masivo a un enfoque didáctico de los fenómenos de aprendizaje-enseñanza (entonces el estudiante se adhiere completamente al modelo que le ha convenido como alumno), o bien por una apropiación entusiasta de cierto número de conceptos de la didáctica y una reconstrucción rápida de un modelo pedagógico personalizado.

- El practicante tiene un mal recuerdo de las matemáticas y piensa que definitivamente está fuera de este austero universo de cifras y de fórmulas mágicas. Cuando toma conciencia de que las actividades matemáticas pueden ser portadoras de sentido e incluso engendrar cierto placer, este practicante se encuentra en una situación de desequilibrio y de profunda inseguridad entre una pedagogía que lo tienta y lo seduce, pero que teme no poder dominar, y la pedagogía tradicional, que ha contribuido a alejarlo de las matemáticas –e incluso a bloquearlo– y a la que ya no se atreve a referirse.

CASO 2

La desestabilización es relativamente superficial porque el modelo pedagógico presentado en el IUFM no parece demasiado difícil de apropiarse. Es, por ejemplo, el caso si el formador presenta pedagogías centradas en los juegos y las manipulaciones de materiales. El estudiante puede entonces adherirse bastante fácilmente a esta forma de pedagogía activa que pone adelante la motivación del alumno, y algunas veces pasa al segundo plano los objetivos de aprendizaje. Pero si está atento a la articulación entre la adquisición de los saberes y los aspectos lúdicos, no rechaza verdaderamente la pedagogía tradicional, conserva de ella la estructura y piensa aderezarla con juegos y actividades lúdicas diversas que llegarán como una recompensa, luego de un aprendizaje del tipo "aprendo, aplico".

CASO 3

El estudiante no está desestabilizado en sus conceptos ya que se sumergió poco en la formación. Podemos examinar dos subcasos:

- El practicante siguió la formación como una aportación de saberes sobre el aprendizaje, y eventualmente sobre la enseñanza. Incluso domina quizá bien estos saberes en tanto saberes teóricos, pero no se plantea la pregunta de sus lazos con las prácticas efectivas. Hay entonces claramente modificación en los concepciones declaradas, pero es imposible decir si estas modificaciones tendrán o no incidencia sobre las elecciones efectivas del estudiante en su clase, es decir si estas modificaciones son profundas o superficiales.

- El practicante es escéptico respecto a la eficacia de una formación profesional que no corresponde al acompañamiento[14]. Este estudiante quizá escuchó el discurso de los profesores, pero son sobre todo los consejos de los maestros formadores durante las estancias, los que le han parecido pertinentes.

Este estudiante en general es muy receptivo a los "ruidos" de los salones de profesores[15], y desea de buena gana reproducir las prácticas dominantes que, según él, están legitimadas precisamente porque son dominantes.

El impacto de la formación y de los formadores sobre el discurso producido, debe tomarse en cuenta de manera extremadamente prudente en la medida en que contamos con indicadores de la no adecuación entre las declaraciones "teóricas" y las respuestas concernientes a las prácticas efectivas en las clases. El apartado siguiente va a permitirnos aportar nuevas luces sobre este tema. Mi objetivo era "probar" la resistencia y la solidez de las modificaciones que se operaron sobre los conceptos de los estudiantes durante la formación, intentando localizar sus huellas en situaciones profesionales, ya sea simuladas en trabajos escritos, ya sea efectivas a través de boletines de visita de práctica, y a partir de algunas sesiones efectivas en clase.

II. ANÁLISIS DE LOS EFECTOS DE LA FORMACIÓN SOBRE LAS PRÁCTICAS EFECTIVAS A PARTIR DE UN ESTUDIO DE CASO

Para contribuir al difícil problema de la evaluación de la formación, analicé diversos soportes metodológicos. Primero busqué huellas ocultas de las concepciones de los estudiantes en diversos trabajos escritos: elección argumentada de un proyecto de sesión entre varios, informe y análisis crítico de sesiones conducidas por el estudiante durante las prácticas en las que la responsabilidad es de él. Luego estudié las sesiones de clase de algunos estudiantes durante su estancia terminal en responsabilidad.

Tengo conciencia de todos los riesgos que trae consigo un estudio de caso, para el estudio de un fenómeno tan general como el de la evaluación de la formación en matemáticas de los profesores de escuela. Por tanto, tomé un máximo de precauciones en el análisis en sí y en la interpretación que hice de él. Pero el problema de la formación de maestros es tan complejo, que me parecía pertinente hacer estudios de caso para intentar identificar los modelos pedagógicos de referencia, las estrategias de enseñanza puestas en marcha, los modelos de aprendizaje retenidos. Estos estudios deberían de igual modo permitir identificar algunos factores que pueden influir en las tomas de decisiones de los maestros en su clase y relacionarlas con la formación recibida.

Las sesiones de clase estudiadas fueron llevadas por mis propios practicantes, lo que me permitió medir por un lado las eventuales distorsiones entre el discurso "teórico" que se tiene en el IUFM, y las puestas en práctica que "fluyen" sobre el terreno, y por otro lado las divergencias entre las producciones escritas de estos estudiantes en su expediente de prácticas y sus prácticas efectivas en clase. De igual manera pude tomar en cuenta las capacidades de estos estudiantes en matemáticas.

[14] En este caso «acompañamiento» se refiere al trabajo que desarrolla el profesor responsable del grupo, quien hace el papel de tutor y acompaña al estudiante en su formación en la práctica. (N. del T.)

[15] La expresión salones de profesores refiere a las salas que tienen las escuelas en Francia para que los profesores permanezcan en los tiempos que no están en clase. (N. del T.)

Quise estudiar sesiones de clase en maternal y educación elemental, a la vez que en clases con alumnos de medios sociales variados. Por otro lado no seleccioné las mejores sesiones, pues con ello se corría el riesgo de ocultar algunos problemas de formación.

II.1. Método

Estoy consciente del problema metodológico planteado por este estudio, ya que soy al mismo tiempo actor de la visita en tanto formadora y observadora en tanto investigadora. Por otra parte encontré numerosos obstáculos: dificultad de registro en razón de condiciones materiales difíciles, falta de tiempo o de espacios para realizar las entrevistas, etc. Sin embargo llevé a cabo el estudio porque los elementos obtenidos me parecieron interesantes.

Registré yo misma las sesiones de clase. Desafortunadamente las transcripciones no siempre fueron completas debido a problemas técnicos, o de algún ruido demasiado importante en la clase.

A partir de cada una de estas transcripciones, intenté hacer un estudio global de la sesión observada, enfocando mi mirada sobre varios puntos:

- *La naturaleza de las actividades propuestas.* ¿Se trata de situaciones susceptibles de conducir a un nuevo aprendizaje, o de actividades de entrenamiento o de refuerzo? ¿De qué manera las considera el practicante?

- *Los saberes en juego* ¿Se adaptan al nivel de la clase? ¿Son reconocidos por el maestro, percibidos por los alumnos? ¿Precisados o institucionalizados en cierto momento?

- *El reto de las actividades.* ¿De qué manera el maestro pone en escena las actividades? ¿Los niños pueden interesarse en el problema que se les plantea, meterse en él? ¿Tienen los medios para anticipar, verificar, validar?

- *La puesta en práctica por el practicante.* ¿Controla el desarrollo? ¿Cuál es la naturaleza de sus tomas de decisión? ¿Cómo toma en cuenta a los alumnos? ¿Provoca intercambios entre los alumnos, prácticas en común? ¿Cómo administra el tiempo?

- *La forma de pedagogía adoptada* ¿Es identificable en esta sesión? ¿A partir de que índices?

- *Los problemas de autoridad y de gestión de grupo* ¿Qué factores pueden explicar el deslizamiento hacia una clase agitada?

No tomé en cuenta las cuestiones en relación al dominio de la lengua.

Luego relacioné las observaciones realizadas de esta manera con la ficha de preparación[16] que se me presentaba, con el fin de ver si el practicante había

[16] Contrariamente a los profesores de los liceos y colegios, los maestros y profesores de escuela tiene que presentar (por reglamento) una ficha de preparación de la sesión que conducen a las personas que llegan a visitarlos. Recordemos aquí que los maestros y los profesores de escuela son maestros polivalentes, y por este hecho con frecuencia no son especialistas de la disciplina que enseñan. Improvisar una situación de enseñanza necesita de un verdadero dominio de los contenidos y un buen conocimiento de los alumnos. Por tanto, las improvisaciones exitosas son raras, sobre todo con los maestros principiantes.

manifestado en ésta la preocupación de confrontar a los niños con una actividad que realmente pusiera en juego saberes matemáticos, para ver si el desarrollo efectivo correspondía a las previsiones declaradas, y si a partir de la preparación es posible identificar los elementos o las carencias que permitirían comprender lo que efectivamente pasó en la clase.

Finalmente dirigí mi atención a las relaciones entre la sesión observada y la manera en la que el participante la había percibido y defendido en el transcurso de la entrevista.

II.2. Conclusión acerca del estudio de caso

Este estudio me llevó a caracterizar algunos perfiles de profesores practicantes al final de su formación.

Puse en evidencia el caso de los estudiantes que piensan en la formación únicamente en términos de acompañamiento. Para éstos, la incidencia de la formación sobre sus representaciones de las matemáticas y de su enseñanza, parece muy débil, al menos a corto plazo. Estos estudiantes esperan mucho de las prácticas en el transcurso de las cuales buscan reproducir el modelo del maestro de prácticas o del titular de la clase donde las realizan. No buscan poner en tela de juicio sus propias concepciones de la enseñanza, e incluso buscan fortalecer estas concepciones confrontándolas con las prácticas de algunos maestros. No creen en la necesidad, ni siquiera en la pertinencia de un análisis teórico de los fenómenos de aprendizaje y de enseñanza en la formación. Para ellos, sólo practicar es formador.

Luego identifiqué el caso de los estudiantes que no solamente esperan mucho de la formación, sino que además están preparados para "jugar el juego" de esta formación, aceptando con confianza y disposición los aportes de sus profesores. Estos estudiantes no dudan al intentar poner en práctica en su clase una forma de pedagogía inspirada en la que les fue presentada en el IUFM.

Las diferencias al nivel de la práctica de clase parecen ligadas entonces a, por lo menos, dos factores: al nivel del dominio en matemáticas del estudiante, y al tipo de clase en la que se desarrolla la práctica. Desarrollemos un poco estos dos puntos.

- Para poner en práctica situaciones de clase que permitan a los alumnos construir realmente conocimientos matemáticos, el practicante debe ser capaz de identificar bien los objetos matemáticos concernientes y tener cierta "familiaridad" con ellos. Parece que hubiera una especie de umbral de este lado donde los conocimientos del practicante ya no están disponibles ni suficiente ni rápidamente, incluso si es capaz de movilizarlos en ciertas situaciones, para permitirle tomar las decisiones que le convendría tomar "en el momento". Incluso quizá podamos emitir la hipótesis de que en algunos casos el practicante utiliza procedimientos de evitación para no verse confrontado con un conocimiento que domina mal[17].

- Por otro lado el estudio permitió evidenciar una realidad bien conocida de los formadores y de los formados. La formación no toma en cuenta suficientemente las dificultades de enseñanza en ciertas clases. Los prac-

[17] El procedimiento de evitación más utilizado consiste en dar ellos mismos la respuesta.

ticantes encargados de tales clases tienen que manejar problemas muy variados, de diferentes naturalezas, para los que no están verdaderamente preparados. Las cuestiones de gestión de grupo y de mantenimiento del orden se vuelven prioritarias. Entonces muchos estudiantes eligen aplicar una pedagogía "ultra tradicional" a base de ejercicios escritos sometidos a evaluación. Algunos juegan a aplicar las proposiciones del IUFM. Intentan aplicar situaciones más abiertas que requieren interacciones entre los niños, confrontaciones colectivas, de procedimientos, de puestas en común, que con frecuencia llevan a una situación de desinterés ¿Es posible que un joven practicante modifique un contrato de clase[18] por un corto tiempo teniendo el estatuto de suplente en clases con fama de difíciles, donde con mucha frecuencia la mayoría de los maestros "funcionan" a la usanza de la autoridad magistral? Cuando los estudiantes intentan, en vano, modificar el contrato, ¿cuáles serán sus reacciones a corto plazo y sus tomas de decisión posteriores? Podemos presentar dos escenarios: el practicante, completamente desanimado puede desear abandonar el oficio, o bien, piensa que todos los métodos pregonados durante su formación no valen nada y se vuelve entonces hacia una pedagogía tradicional conducida con una autoridad represiva.

CONCLUSIÓN GENERAL

Las concepciones declaradas de los practicantes sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en la escuela, evoluciona muy claramente entre el inicio y el final de la formación. En sus discursos los practicantes han abandonado el concepto tradicional, que tenían al llegar, de una enseñanza en la que el maestro muestra y el niño imita, en beneficio del modelo pedagógico, actualmente preconizado por la institución, centrado en la construcción de los conocimientos por el niño. Pero en realidad, el impacto de la formación sobre los concepciones "ocultas" de los estudiantes es claramente menor. La desestabilización provocada por la formación en los practicantes, no necesariamente conduce a éstos a poner en tela de juicio nuevamente sus concepciones iniciales y a apropiarse durablemente de una concepción diferente que sea perdurable.

El estudio que conduje al mismo tiempo sobre los boletines de visita y sobre las sesiones efectivas de clase muestran que, en su clase, los profesores practicantes dudan mucho para aplicar una pedagogía que tome en cuenta las aportaciones de la didáctica en el análisis de los procesos de transmisión de los saberes matemáticos, y de su construcción por los alumnos, y por tanto para proponer situaciones consistentes, portadoras de sentido y susceptibles de suscitar aprendizajes efectivos en sus alumnos. Se escudan tras los obstáculos del terreno, los hábitos de la clase. Con frecuencia reproducen una forma de enseñanza relativamente poco alejada de la que vivieron cuando ellos eran niños. Incluso si declaran que su concepción de la enseñanza de las matemáticas ha evolucionado, esta evolución sólo debió alcanzar las muy

[18] Contrato en el sentido de G. Brousseau, véase Brousseau; 1986.

superficiales capas de la representación construida desde la infancia. En situación de clase, el concepto inicial vuelve a surgir con frecuencia.

Podríamos decir que los conceptos iniciales de los practicantes juegan el papel de "obstáculos metacognitivos" en la formación profesional, obstáculos que he llamado "metacognitivos", tomando como modelo la noción de obstáculo subyacente en la teoría de las situaciones didácticas. G. Brousseau desarrolla la tesis según la cual los conocimientos se construyen contra otros, siendo los obstáculos constitutivos del conocimiento[19]. Entonces, una de las finalidades de la didáctica es intentar crear situaciones que permitan al niño enfrentarse a estos obstáculos para superarlos. El papel del maestro es esencialmente construir estas situaciones y asegurar la devolución a sus alumnos de tal manera que sea el medio[20]quien les envía sanciones y permita retroacciones. Si transferimos este modelo a la formación de profesores, podemos decir que, para construir conocimientos profesionales, los estudiantes deben enfrentar situaciones en las cuales puedan poner a prueba sus antiguos conocimientos, sus conceptos iniciales de aprendizaje y de la enseñanza.

Estas situaciones ideales de formación serían pues, de alguna manera, situaciones a-didácticas de formación. Pero aquí encontramos, según yo, un problema mayor que es la naturaleza del medio. En el caso de las situaciones de aprendizaje, el maestro puede actuar sobre el medio de tal suerte que los modelos implícitos de acción de los niños sean insuficientes. En situaciones ideales de formación, el medio sólo puede ser una clase de alumnos, de la que el formador no puede dominar ni las características, ni las reacciones. Por tanto, el medio no puede siempre jugar su papel corrector. Para que haya efectos "regreso", es necesario acompañar a los estudiantes en el análisis *a posteriori* de las sesiones efectuadas, de manera que se obtengan los índices pertinentes a tomarse en cuenta para evaluar la eficacia de la sesión y la autenticidad de los aprendizajes de los niños, lo que me parece es contradictorio con la noción de situación a-didáctica.

Aquí encontramos un punto ya planteado: varios conceptos que resultan de teorías relativas al estudio de los vínculos entre enseñanza y aprendizaje, no pueden transferirse tal cual al marco del estudio de los fenómenos de formación/enseñanza.

Sin embargo, si un gran número de practicantes dudan en aplicar lo que se les propone, nos parece importante investigar las razones profundas de esta elección.

Por supuesto que un factor esencial es sin duda la existencia de un contrato de clase ya construido en las clases donde se les asigna para realizar las prácticas, contrato que no siempre les es fácil notar rápidamente y que además es difícil renegociar con los alumnos. No obstante, me parece interesante estudiar varias pistas distintas:

- La primera concierne a la "comodidad" del practicante. El desequilibrio producido eventualmente por la formación en su concepción, ya sea del oficio, ya sea de las matemáticas, sin duda no es propicio para la necesaria confianza en sí mismo para "experimentar".

- La segunda está ligada, nos parece, el grado de dominio de la disciplina enseñada. Si éste es débil, es posible que la práctica profesional altere los conocimientos disciplinarios, los transforme y eventualmente los vacíe de su contenido.

---

[19] Al respecto puede verse Brousseau (1983).

[20] En todo el párrafo, en el sentido de G. Brousseau (1983).

- Una tercera concierne a la falta de consideración suficiente de poblaciones difíciles en el trabajo de elucidación de los mecanismos, y de las condiciones de aprendizajes durante la formación.

- Una cuarta es la duración de la formación. Parece que debajo de cierto umbral, los estudiantes no llegan a apropiarse de una nueva concepción, incluso, si se dicen muy seducidos y convencidos de su buen fundamento y de su eficacia. Es particularmente el caso de los estudiantes que, recibidos como candidatos libres en el concurso, muy preguntadores y muy receptivos, tienen más dificultad que los demás para transferir a sus prácticas lo que declaran en sus propósitos.

- Finalmente, una última pista sería quizá estudiar la legitimidad del discurso sostenido en los centros de formación. Muchos profesores formadores de maestros del primer grado, sin duda más que los formadores del segundo, parecen convencidos de la necesidad de transmitir "didáctica" en el curso de formación. Pero si por un lado, en matemáticas, estos profesores están en su conjunto seguros de lo que saben y de lo que transmiten, en didáctica se meten con "cosas" de las que no siempre están verdaderamente seguros, y a veces transmiten a los practicantes conceptos que, por el momento, son más herramientas para el análisis, que herramientas recomendadas para construir su propia enseñanza.

Además, los formadores encargados de evaluar las capacidades profesionales de los practicantes avalan con opiniones favorables la puesta en práctica de modelos pedagógicos derivados de los conceptos iniciales de los estudiantes, y de la resistencia del medio, a partir de que el practicante mantiene en su clase un ambiente de trabajo, y manifiesta seriedad por sus preparaciones y la calidad del trabajo realizado por los estudiantes.

Estas diferentes constataciones me llevaron a planear investigaciones sobre las condiciones y los medios de hacer evolucionar y enriquecer estas representaciones. Desde el punto de vista del formador, eso podría permitir a los profesores adaptarse a los distintos entornos que van a encontrar, y poder integrar, principalmente por la vía de la formación continua, las aportaciones de las investigaciones futuras sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

La cuestión de los saberes de referencia para la formación en matemáticas de los profesores de escuela, sea a propósito de los saberes matemáticos o de los saberes didácticos, siempre será de actualidad. Me parece particularmente importante que las investigaciones sobre estos problemas continúen y en varias direcciones.

Citaré aquí únicamente dos hilos conductores de mis actuales investigaciones:

En relación a la didáctica como tal: ¿Cómo asegurar la transposición de la didáctica en saberes a enseñar en la formación, (aquí se trata de la cuestión de la "didactificación de la didáctica")? En esta perspectiva pueden citarse ya los trabajos de J. Portugais[21], por ejemplo. Sobre este punto tales trabajos aportan una contri-

[21] Portugais, 1995

bución en el caso particular de los practicantes al considerar los errores de sus futuros alumnos en las operaciones aritméticas.

Esta cuestión está ligada a otra más general y específica de la formación de los maestros del primer grado. ¿Cómo definir mejor y articular los conceptos transversales que podrían "vivir" en las didácticas de varias disciplinas? Esta cuestión tiene importancia ya que los maestros de primer grado son enseñantes polivalentes.

En relación a la ampliación eventual de los saberes de referencia para mejorar las capacidades profesionales, a partir de la constatación del fracaso relativo actual: ¿Se puede, hay que concebir una teorización de las prácticas profesionales?

Un punto de partida consiste en hacer un estudio fino y preciso de las prácticas de los "buenos maestros", que la institución siempre ha reconocido más o menos como enseñantes "expertos" (consejeros pedagógicos en la secundaria, maestros formadores en la primaria). Este estudio debería contribuir a definir saberes prácticos, y eventualmente ayudar a plantear el problema de su transmisión.

Un segundo trabajo consiste en investigar si hay variables identificables y pertinentes en juego en las prácticas. En particular, ¿la naturaleza de la "clase" es una de esas variables? ¿El maestro cambia sus prácticas? ¿De qué manera y en qué medida según el grupo que tenga frente a él? En estas tomas de decisión, ¿hay continuidad o ruptura según las clases?

Este enfoque debería permitir alimentar la reflexión relacionada con la formación para trabajar en las clases difíciles.

Sobre estas diferentes cuestiones trabajamos actualmente en nuestro equipo de investigación.

Referencias bibliográficas

Abric, J. C. (1987). *Cooperation, compétition et représentations sociales*. Ed. Delval.

Brousseau, Guy. (1983) "Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques", en Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol. 4 Núm. 2 165-198.

Brousseau, Guy (1988). "Le contrat didactique: le milieu" en Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol. 9 Núm. 3. 309-336.

Brousseau, Guy (1986) Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques. Thèse de doctorat d'État.

Charlot B, Bautier E., Rocheix J. Y., (1992) *École et savoir dans les banlieus... et ailleurs*, Ed. Armand Colin. París.

Kusniak, A. (1994) Étude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maitres du premier degré. Thèse de doctorat. Université de París VII. Peltier, Marie-Lise (1996)

Peltier, Marie-Lise (1995) La formation initiale, en mathématiques, des professeurs d'école: "entre conjoncture et éternité". Étude des sujets de concours de recrutement et contribution à la recherche des effects de la formation sur les professeures stagiaires. Thèse de doctorat. Université de Paris.

Portugais, Jean (1995) *Didactique des mathématiques et formation des enseignants*. Ed. Peter Lang. Suiza

ARTICULOS
DE
INVESTIGACION

El aprendizaje del uso de signos en álgebra Una perspectiva post-vigotskiana[1]

Fecha de recepción: Febrero, 1999

Educación Matemática
Vol. 11 No. 3 Diciembre
1999 pp. 25-53

Luis Radford
Université Laurentiennc, Ontario, Canada
Lradford@nickel.laurentian.ca

Resumen: *Este artículo describe un programa de investigación en curso acerca del aprendizaje del álgebra escolar. En dicho programa, el aprendizaje del álgebra se concibe como la adquisición subjetiva de un sistema de signos socialmente objetivado e históricamente constituido cuyo sentidos y reglas de uso son ontogenéticamente elaborados como resultado de la participación diferenciada del alumno en actividades matemáticas específicas. Dentro de este contexto, los procesos de uso de signos y elaboración de significados son conceptualizados como procesos a la vez individuales y sociales que emergen en relación a otros sistemas de signos (por ejemplo, sistemas de gestos u otros más característicos tales como el lenguaje y los sistemas de representación gráfica) que ofrece la sala de clase vista ésta como espacio semiótico. En la primera parte del artículo se presenta un marco teórico en el que se sugiere una nueva conceptualización de la idea de signo diferente a la que ofrece el cognitivismo y la teoría de la información. La reconceptualización que se propone, que toma como punto de partida la semiótica Vygotskiana, incorpora ciertos elementos antropológicos que justifican, a nivel metodológico, el interés que toma el discurso y la acción mediada en el diseño, análisis e interpretación de actividades de sala de clase. En la segunda parte se presenta el análisis de un episodio en el que alumnos de 14 años de edad resuelven un problema de generalización algebraica de patrones numérico-geométricos. Se muestra que las acciones y verbalización de acciones emprendidas anteriormente a nivel numérico concreto ofrecen un soporte crucial al uso emergente de signos algebraicos y al sentido con que dichos signos son dotados. De forma más precisa, el análisis del episodio sugiere que la forma que toma la abstracción requerida en el acto de generalizar el patrón queda imbricada en la semiótica de las acciones concretas.*

Abstract: *This article describes an ongoing research program dealing with the learning of algebra. In this research program the learning of algebra is conceived as the subjective acquisition of a socially objectified and historically produced sign system whose meanings and rules of sign use are ontogenetically elaborated as students participate in specific mathematical activities. Within this context, the*

[1] Este artículo, que ha sido posible gracias a una subvención otorgada por *The Social Sciences and Humanities Research Council of Canadá*, grant # 410-98-1287, intersecta dos trabajos anteriores de corte teórico (Radford 1998a, Radford 1998b), y extiende un corto trabajo experimental (Radford 1999). Deseo agradecer al Dr. José Guzmán Hernández del CINVESTAV del Instituto Politécnico Nacional de México, por sus comentarios a una versión anterior del presente artículo. Deseo también agradecer a mis asistentes de investigación Rossella Dorigo, Chantal Filion y Lynn Landry por su valiosa colaboración y participación en este proyecto.

processes of symbolizing and meaning production are conceptualized as both individual and social processes emerging in relation to other sign systems (for instance, gesture systems or other more characteristic ones such as language and graphical systems) offered by the classroom itself seen as a semiotic space. In the first part of the article we focus on some of the points underlying our theoretical framework. We discuss the idea of signs according to Cognitivism and Processing Information Theory and suggest a different conceptualization of signs taking the Vygotskian semiotics as the starting point. At the methodological level, the insertion of some anthropological elements in our discussion leads us to pay attention to the students' and teacher's discourse in the design, analysis and interpretation of classroom activities. In the second part we present the analysis of an episode in which some students in Grade 8 (14 years old) solve a problem about the algebraic generalization of a numeric-geometric pattern. The episode suggests that actions and the verbalization of actions previously undertaken at a concrete numerical level offer a crucial support to the emergent use of signs and the production of meanings. More specifically, it is suggested that, in light of the analysis, the form taken by the abstraction required in the pattern generalizing act remains imbricated in the semiotics of the concrete actions.

Introducción

Es muy bien sabido que uno de los tópicos curriculares más difíciles de la matemática enseñada a principios del nivel secundario es álgebra. En particular, resulta muy difícil para el alumno alcanzar una competencia y maestría adecuada del complejo lenguaje simbólico. Refiriéndose a la inmensa dificultad que los alumnos suelen encontrar en tareas de traducción de problemas del lenguaje natural al lenguaje algebraico, Clement *et al.* decían, hace más de quince años:

> *Nos dimos cuenta de este problema en una serie de entrevistas filmadas [1] en las cuales pedíamos a estudiantes de college hablar en voz alta mientras trabajaban en problemas simples. (1981, p. 287)*

A raíz de esta constatación y muchas otras, una intensa línea de investigación ha sido llevada a cabo desde entonces, lográndose, en particular, detectar muchos de los errores que los estudiantes cometen al tratar de utilizar expresiones algebraicas y resolver ecuaciones (ver, por ejemplo, Matz 1980, Filloy y Rojano 1989, Gallardo y Rojano 1988). Sin embargo, quedan todavía por entender los procesos que permiten a los alumnos dotar de significados a los símbolos y a las letras del lenguaje algebraico. Poco se conoce de la influencia que tiene el discurso de los profesores en las discusiones de los alumnos y las ideas que éstos se van formando sobre el uso de símbolos.

El problema que estamos mencionado adquiere una importancia fundamental dentro del contexto educativo actual de Ontario. En efecto, el Curriculum de Matemáticas de Ontario cambió en septiembre de 1997. Como consecuencia, algunos tópicos curriculares son nuevos, mientras que otros ahora empiezan antes. Álgebra (un tema que tradicionalmente ha pertenecido al programa de estudios de la escuela secundaria), empieza en este nuevo curriculum en primer grado de primaria. Este cambio conlleva ciertas dificultades, pues no es posible enseñar el complejo lenguaje algebraico en primer o segundo grado, cuando los alumnos todavía no saben cómo leer y escribir. En términos generales, en lo que respecta al álgebra, el curriculum de primero a octavo grado ha sido dividido en dos grandes temas: (a) patrones y sucesiones y (b) ecuaciones. Del primero al sexto grado, el énfasis es hecho en el estudio de patrones y sucesiones. El estudio sistemático de las ecuaciones empieza en octavo grado. Dentro de este esquema educativo, dos de los problemas más urgentes que los profesores están enfrentando son:

(i) cómo enseñar álgebra sin usar letras y
(ii) cómo introducir el uso de signos-letras en octavo grado, dada la experiencia algebraica sin símbolos que los alumnos han ganado en los años previos.

Concomitantemente con este cambio de contenidos en el curriculum de Ontario de matemáticas aparece un cambio de naturaleza metodológica que se traduce por un énfasis marcado en el aspecto de la comunicación en el aula y que es sostenido por una visión más social del aprendizaje, esto es, una visión en la que el alumno es llamado a participar junto con otros alumnos y el profesor en tareas y proyectos en los que la parte discursiva adquiere una dimensión explícita en la elaboración del conocimiento.

En lo que sigue, vamos a describir un programa de investigación en curso en el que unos 120 alumnos y seis profesores se encuentran participando y que tiene como propósito general entender, desde una perspectiva post-vigotskiana, la forma en que los alumnos adquieren el uso de signos.

Primero presentaremos el marco teórico del programa de investigación. Luego presentaremos la metodología que hemos adoptado y en la última parte discutiremos un episodio que proviene de una de nuestras sesiones experimentales en sala de clase sobre el uso de signos en un problema relativo al estudio algebraico de patrones.

1. El marco teórico

1.1 La conceptualización de signos

► La búsqueda del lenguaje universal

El primer problema que hemos encontrado es el de la necesidad de reconceptualizar lo que queremos entender por signos. En efecto, a menudo los signos han sido concebidos como las vestimentas que portan las ideas. La concepción de signo como vestimenta está de hecho sumergida en una perspectiva más general que postula, desde el inicio, una clara dicotomía entre lo espiritual y lo material y que fue un pilar fundamental en la búsqueda, en los siglos 16 y 17, de un *lenguaje universal* que debía, por un lado, salvar al signo de las vicisitudes del efímero y ruidoso lenguaje hablado y, por el otro lado, colocarlo en ese lugar privilegiado contiguo al pensamiento. V.-David (1965) describe muy bien como el contacto Europeo con las "escrituras exóticas" que llegaron tanto de China como de México fueron estudiadas y entendidas en el marco de la búsqueda del "lenguaje universal" -proyecto que dichas escrituras ayudaron al mismo tiempo a definir mejor. Así, los misioneros jesuitas, que habían sido enviados detrás de las expediciones de descubrimiento y colonización, plasmaron los primeros resultados del estudio de esas lenguas en obras que se propagaron rápidamente en Europa, permitiendo comparar las escrituras europeas que traducen la lengua hablada con, por ejemplo, las pinturas o figuras mexicanas que, dado su carácter icónico, daban cuenta solamente de lo que en Europa se interpretó como "la substancia de las concepciones".

Siguiendo su propio camino, la idea de un lenguaje universal fue tomada por Frege dos siglos más tarde. Así, en un artículo publicado en 1882, Frege subrayó la importancia de un lenguaje capaz de escribir los conceptos sin pasar por el lenguaje natural, que él consideraba no lógico. Frege reconocía en la palabra escrita una permanencia que la palabra hablada no alcanza. No obstante dicha permanencia, Frege argüía, la palabra escrita hereda desafortunadamente el carácter ilógico de la palabra hablada, en particular, a causa de la ambigüedad que proviene de cierta variabilidad en la aceptación de diferentes sentidos que una misma palabra puede tener. Muy diferente es, según Frege, el caso de las fórmulas de la aritmética, un lenguaje en el que éste veía un claro ejemplo de lenguaje que enfrenta los conceptos y las ideas directamente -un lenguaje que llamó "*Begriffsschrift*" (de Begriff, concepto y Scrift, escritura), y que podría ser traducido como "*ideografía*". Frege dijo: "El lenguaje basado en las fórmulas matemáticas es una ideografía, pues expresa inmediatamente la cosa sin pasar por los sonidos" (del lenguaje hablado) (Frege 1971, p. 68).

Una de las ideas de base que caracteriza la búsqueda del lenguaje universal de la época es, pues, el supuesto ontológico de un lenguaje que extermina todas las ambigüedades del discurso y que es capaz de ser sometido a los implacables cánones de la lógica formal.

En su obra *De la grammatologie*, una obra que examina con detenimiento la idea de signo en la tradición occidental, Jacques Derrida dice:

> *La escritura, la letra, la inscripción sensible, ha sido siempre considerada por la tradición occidental como el cuerpo y materia externa del espíritu, del aliento, del discurso y del logos. (Derrida 1976, p. 35.)*

Dentro de las perspectivas teóricas (como las que ofrece el cognitivismo o la teoría de la información) en la que las ideas son concebidas como el resultado de procesos intracerebrales íntimos que ocurren dentro de los confines de la caja craneana y que el signo es visto como canal de comunicación o vestimenta de esas ideas, el signo queda confinado a un papel de poca (si acaso alguna) importancia epistemológica. Efectivamente, en dicho caso, el signo puede solamente ser visto como el *medio* que permite arrojar o expeler hacia el mundo externo los resultados de los procesos intracerebrales privados.

Sin embargo, si se toma una perspectiva diferente, en la que las ideas y las conceptualizaciones humanas son concebidas como el resultado de una empresa conjunta, multi-individual, entonces, la comunicación, el lenguaje, las palabras y los signos en general adquieren un papel epistemológico de primera importancia. Esta es la perspectiva que estamos adoptando en nuestro programa de investigación. De forma más específica, nuestro programa de investigación está sustentado por una perspectiva sociocultural post-vigotskiana que hemos desarrollado en un articulo previo (Radford 1998a) y una de cuyas premisas es que las conceptualizaciones del individuo son concebidas en inextricable relación con su modo concreto de vida, así como con los conceptos y modos de conocimiento (o *epistemes*, para usar la expresión de Foucault 1966) que la cultura pone a disposición de sus miembros.

Si la concepción de signo como vestimenta de la idea aparece pues claramente inadecuada a nuestra forma de ver el individuo y sus ideas, necesitamos, para poder seguir adelante, reconceptualizar el signo y decir cuál puede ser el papel que éste desempeña en una aproximación socio-cultural del pensamiento. A esta altura de nuestra discusión, debemos detenernos un momento y recordar rápidamente la idea del signo en Vygotsky.

► La idea de signo en Vygotsky

En este orden de ideas, se sabe muy bien que, inspirándose de la categoría marxista de labor, Vygotsky concibió el signo como una herramienta (ver, por ejemplo, Wertsch 1991, p. 28; Kozulin 1990, p. 115; Zinchenko, 1985) sugiriendo que así como los seres humanos usan herramientas de labranza para dominar la naturaleza, de la misma manera estos usan herramientas psicológicas para pensar y dominar el comportamiento.

La idea de signo como herramienta psicológica fue sugerida a Vygotsky por ciertos estudios llevados a cabo con animales, en particular en chimpancés, y el uso que los chimpancés hacen de las herramientas para resolver ciertos problemas. Uno de los investigadores que tuvo mucha influencia en Vygotsky a este respecto fue Köhler[2].

Köhler había observado reiteradamente que los chimpancés tienden a utilizar palos u otros instrumentos para alcanzar ciertos objetivos siempre y cuando dichos instrumentos queden dentro del campo de visión del objetivo mismo. Por ejemplo, en uno de sus experimentos, Köhler colocó un banano fuera de la jaula de un chimpancé. Tschego –el chimpancé en este experimento– alargó su brazo para alcanzar el banano; el intento fue infructuoso, pues el banano quedaba fuera del alcance del brazo. Köhler había colocado un palo en la jaula de forma que el palo y el banano podían ser vistos al mismo tiempo por Tschego. En este caso, el chimpancé tomó el palo y con el mismo alcanzó el banano. Sin embargo, cuando el palo fue colocado en una posición tal que el chimpancé no podía ver el banano y el palo al mismo tiempo, el palo no fue usado. Köhler dice:

> He usado todos los medios a mi disposición para atraer la atención de Tschego sobre los palos colocados en la parte trasera de la jaula (...) y ella ha visto directamente los palos; pero al hacer esto, ha girado y el objetivo le ha quedado a su espalda, y de esa forma los palos han permanecido sin sentido para ella. Incluso aun cuando la hemos iniciado, en uno de los tests

[2] La traducción al ruso del libro *Intelligenzprüfungen an Menschenaffen* de Köhler fue precedida por un prefacio del mismo Vygotsky; el prefacio se encuentra ahora traducido en el volumen 3 de *Collected Works of L. S. Vygotsky* (1997a).

> de esta mañana, a la forma de tomar y utilizar los palos, parece perdida en la tarde, a pesar que los palos no han sido movidos de su posición inicial y ella misma ha marchado sobre ellos en el curso de sus movimientos hacia adelante y hacia atrás y ha visto directamente hacia ellos. (1951, p. 37)

Refiriéndose a la estrategia de los chimpancés en los trabajos de Köhler, Vygotsky subrayó el hecho observado por Köhler que el proceso entero de resolución de problemas es esencialmente determinado por la percepción (Vygotsky 1978, p. 31). Por el contrario, Vygotsky observó que durante el proceso de resolución de problemas, niños de cuatro y cinco años hacen uso del lenguaje, y que en vez de ser superfluo o ser simplemente una "invaluable ayuda técnica" , como Köhler (1951, p 267) había sugerido, el lenguaje penetra el estrato de las acciones y se "amarra" a éstas. El lenguaje, Vygotsky notó, sirve primero para organizar las acciones de los niños, y luego adquiere un papel de anticipación que eventualmente resulta en el remplazo de las acciones concretas mismas. Así, Vygotsky tomó metafóricamente las palabras y el lenguaje (y otros objetos físicos) como herramientas psicológicas. Dichas palabras y objetos físicos son al ser humano lo que los palos y otros instrumentos son a los chimpancés en las tareas de alcanzar objetos lejanos.

Esto lo llevó a investigar cómo la percepción (así como la memoria y la atención) resulta profundamente modificada por el uso de herramientas, y lo llevó a la conclusión que mientras el chimpancé queda sujeto al campo sensorial, el niño percibe el mundo no sólo a través de sus ojos y manos sino a través del lenguaje también (Vygotsky 1978, p. 26; Vygotsky y Luria 1994, p. 109). En uno de los varios párrafos consagrados a la percepción, Vygotsky y Luria dicen:

> Las leyes naturales de la percepción mejor observadas en los procesos receptivos de los animales superiores atraviesan cambios básicos debido a la inclusión del lenguaje en la percepción humana (la que) adquiere así enteramente un carácter nuevo. (1994, p. 126.)

La idea de signo en Vygotsky (una idea claramente influenciada por la tradición von humboldtiana del lenguaje, y de pensadores como A. Potebnya y G. Shpet, como ha sido puesta en evidencia por van der Veer 1996) fue sostenida por dos eventos históricos mayores. Por un lado, el punto de vista evolucionista que fue frecuentemente adoptado a principios de siglo en las discusiones sobre la mente y la conducta humana que dio lugar a una aproximación comparativa entre cognición humana y animal.

Por otro lado, el papel predominante que desempeñó la tecnología de la época en el dominio y transformación de la naturaleza y los drásticos cambios que la tecnología indujo en los niveles sociales y económicos.

Mientras que el primero de los eventos mencionados indujo un paradigma de investigación en el que el individuo se define en términos de su especie y de su comparación con especímenes que se sitúan cerca de él en el proceso evolutivo, el segundo evento, que fue de hecho un elemento clave en la reflexión ofrecida por el marxismo, compromete a Vygotsky con una idea de ciencia (y de lo que son los conceptos científicos) propia al cientifismo marxista y al pensamiento moderno en general.

Aunque el contexto histórico brevemente mencionado explica las raíces de lo que podría llamarse un concepto tecnológico de signo en Vygotsky -y en general de lo que van der Veer y Valsiner (1991, p. 221) han llamado "psicotecnología"- Vygotsky pudo brindar dos aspectos sobre los signos que quisiéramos retener en nuestro programa de investigación. Dichos aspectos son los siguientes:

(1) los signos nos brindan un panorama del mundo que es en realidad más rico que el mundo mismo;
(2) los signos *no* son cognitivamente neutros.

Mientras que el primero de los dos puntos mencionados aparece claramente en la cita que hemos hecho arriba de Vygotsky y Luria, el segundo punto significa que, contrario a lo que asume la teoría de la información y su idea de signos como canales neutros de comunicación, al usar signos, los procesos cognitivos del individuo se modifican.

Al poner juntos los dos puntos mencionados y al llevarlos a una de sus últimas consecuencias, nos encontramos con que, en las perspectivas vygotskianas, la realidad puede coherentemente ser descrita como una construcción social (lo que sociólogos fenomenologistas como Berger y Luckmann (1967) que habían argüido ya) que (y es esto lo que aparece como completamente nuevo), a su vez, moldea nuestro funcionamiento mental.

Pero los signos, en la perspectiva de Vygotsky, desempeñan otro papel que tiene implicaciones fuertes en el estudio de la mente. Los signos son los artefactos que aseguran la construcción (o internalización) de la actividad interna sobre la base de la actividad externa, previa del individuo:

> La internalización de formas culturales de comportamiento conlleva la reconstrucción de la actividad psicológica sobre la base de operaciones con signos. (Vygotsky 1978, p. 57)

► Una reconceptualización del signo

La discusión anterior nos permite ahora describir, de manera más precisa, la forma en que en nuestra aproximación estamos conceptualizando el signo. Los signos no son vestimentas, ni meras herramientas auxiliares para pensar "mejor" o para superar convenientemente las limitaciones de nuestra memoria:

> *Concebimos a los signos como el resultado de la contracción semiótica de acciones previamente realizadas en el plano social.*

Evidentemente, con esto no queremos decir que la acción ocurrió necesariamente en la inmediatez temporal de la producción misma del signo. El signo es, en general, el signo de otros signos. Por ejemplo, la acción pudo haberse originado con el gesto que señala el objeto (primer signo) y que luego se reemplaza por una palabra sonora (segundo signo) que se convierte luego en palabra del lenguaje articulado (tercer signo) y que termina, al final de un largo ciclo, en un signo escrito. Tomemos como ilustración el caso de los signos numéricos utilizados en Mesopotamia en el período "arcaico" (un estudio más detallado lo hemos realizado en un trabajo anterior[3]).

[3] Radford, 1998b.

Entre los primeros signos utilizados se encuentran las llamadas "fichas" (*tokens*) de barro. Dichos signos provienen visiblemente de acciones de conteo previamente ejecutadas sobre los objetos mismos (ganado, por ejemplo) y que sin duda reemplazaron a otros signos como los de señalar el objeto (*pointing*) y las palabras del lenguaje de la época. Dentro del sistema semiótico de las fichas de cómputo, dos fichas corresponden al resultado de la acción sensorial de contar dos objetos. Estos signos dieron origen, más tarde, a otros signos, cuando las fichas fueron frotadas contra la superficie todavía húmeda de pequeñas vasijas de barro. El "signo impreso" aparece así como la contracción de las acciones concretas de conteo de bienes (ganado, en nuestro ejemplo) que luego es substituido por otros signos "escritos" (de tipo icónico respecto a los anteriores) con la ayuda de un cálamo con punta y que luego dan paso a un lenguaje escrito que reproduce el lenguaje hablado (el sumerio y luego el akkadiano).

Siguiendo con esta idea, los signos que un individuo utiliza cuando resuelve un problema no son pues, en nuestra perspectiva, accesorios a través de los cuales el pensamiento interno se manifiesta en el mundo exterior, sino *el pensamiento mismo materializado*. Dichos cálculos son pensamiento mediatizado, el único pensamiento posible, pues sin signos es imposible pensar. Piaget y Inhelder (1966, p. 21) decían que el pensamiento, "en tanto que sistema de significaciones manipulables independientemente de la percepción presente, tiene necesidad de significantes", y veían en el lenguaje la fuente principal (aunque no exhaustiva) de esos significantes en que el pensamiento queda anclado.

Lo anterior nos lleva a ver signos e ideas como las dos caras de la misma moneda -una "moneda de Moëbius" donde los lados se confunden y se vuelven uno solo.

Queremos insistir en que en nuestra aproximación el signo y la idea no aparecen enmarcados por la diferencia entre lo espiritual o etéreo, por un lado, y lo material o tangible, por el otro, sino como hilos entrecruzados en el tejido de una misma tela. Con esto abandonamos la diferencia tanto terminológica como conceptual entre significado (*signified*) y significante (*signifier*) que conlleva toda la carga teórica de oposición entre los polos de ideas y sus representaciones a la que nos hemos referido anteriormente. Tratando de seguir en la línea de nuestro trabajo anterior mencionado arriba, distinguimos entre signo y significante, entendido este último no como el *eidos* griego sino como la conexión genética de la actividad externa que retiene el signo (volveremos sobre este punto más adelante, en la Sección 4).

Una de las consecuencias de esta aproximación semiótica es que en vez de concebir las ideas como entidades moviéndose en los rincones internos de la cabeza, las ideas resultan *ser* y *estar* en el signo, de suerte, pues, que el signo no es el artefacto que repara una ausencia sino el artefacto a través del cual la idea es engendrada en el marco de la actividad y de las acciones en las que signo e idea adquieren vida y sentido.

1.2 Mediación semiótica

Ilyenkov es quizás quien ha expresado de la forma más clara la naturaleza propia del pensamiento como lo estamos concibiendo aquí cuando dijo que "El pensamiento no es el producto de la acción sino la *acción misma*" (Ilyenkov 1977, p. 35; las cursivas son del original).

Pero, añadamos, la acción (entendida como elemento co-substancial de la actividad en sentido de Leontiev 1984) es mediatizada de una u otra forma por signos

(Wertsch 1991, p. 19, 29 *passim*), por ejemplo, a través de objetos o de la palabra del propio lenguaje, pronunciadas para otros o para nosotros mismos (esto es, el lenguaje 'interno'). De allí que el pensamiento aparezca como acción mediatizada *a través de*, *por* y *en* el signo[4].

Dos importantes tipos de acciones que nos interesan particularmente en nuestro programa de investigación son:

(1) diálogo y
(2) escritura.

Diálogo y escritura aparecen como unidades de investigación para entender los procesos de simbolización y elaboración de sentidos en álgebra. Dichas unidades nos parecen constituir nodos potenciales para identificar convenientemente las configuraciones de las interacciones estudiante/estudiante y estudiante/profesor[5] y poder situar la manera en que los patrones de discurso[6] (como solicitudes, elicitaciones, invitaciones, consenso, acuerdos y desacuerdos) se *amarran* con los instancias de comprensión de profesores y alumnos (Edwards 1997) que, articuladas con las creencias que se tienen respecto a las formas aceptadas de conocimiento (Greeno 1989) y de la normatividad del discurso científico, dan lugar a configuraciones específicas de uso de signos.

1.3 El aprendizaje del uso de signos

El tercer elemento de nuestro marco teórico se refiere a la forma en que concebimos el aprendizaje del uso de signos.

Es claro que cuando entramos al mundo, nos enfrenta no sólo con un mundo de objetos y personas sino también con un mundo de signos e ideas, con sus propios esquemas y organizaciones (algo que Voloshinov y Bakhtin llamaban "ideologías"[7]). Como Leslie White dijo:

> El hombre crea con palabras un nuevo mundo, un mundo de ideas y filosofías. En este mundo, el hombre vive tan auténticamente como en el mundo físico de sus sentidos. (1942, p. 372)

Además, en este mundo, signos no son utilizados aleatoriamente sino de acuerdo con reglas implícitas o explícitas. Dichas reglas, por supuesto, están más allá del entendimiento del recién nacido. Vygotsky fue muy claro respecto a que los signos tienen primero que todo una dimensión social:

---

[4] Una pregunta que se plantea cuando se discute este tema, es la de saber si *toda* acción es mediatizada. Wertsch (1998, p. 25) parece suavizar su posición en su último libro, diciendo que "*casi* toda acción humana es acción mediatizada." Nosotros sostendremos que *toda* acción perteneciente a una actividad (y por tanto con objetivos sociales específicos) es mediatizada, de allí nuestra referencia a Leontiev y a su teoría de la actividad.

[5] Algunos formatos de interacción entre profesores y alumnos han sido puestos en evidencia por Voigt 1985, 1989, 1995 y por Bartolini Bussi (1995). Mencionemos, por ejemplo, formatos de interacción estudiados por Bartolini Bussi, inducidos por los profesores con el fin de apropiarse y reinventar nuevos problemas que sugieren los niños en el aula.

[6] "languaging" como dice Bauersfeld (1995) para subrayar el curso interactivo del discurso cuyos significados están siempre sometidos a una negociación por los propios participantes.

[7] Ver, por ejemplo, Voloshinov 1973.

> Al inicio, el signo es siempre un medio de contacto social, un medio para afectar a otros y solamente más tarde el signo se convierte en un medio para afectarse a uno mismo. (Vygotsky 1997b, p. 103.)

¿Cómo entonces aprendemos a utilizar los signos? Como sugirió Wittgenstein, viendo a otros usarlos[8].

Sin embargo, para disipar malos entendidos, conviene aclarar que lo anterior no quiere decir que aprendemos con solamente ver a los otros. Tenemos que aprender el juego, esto es, tenemos que participar. Los signos y las reglas de uso se adquieren a través de participación activa: "Aquí el término 'juego de lenguaje' significa enfatizar el hecho que hablar un lenguaje es parte de una actividad o de una forma de vida." (Wittgenstein 1967, § 23).

Desde su propia perspectiva, Mikhailov expresó la idea anterior diciendo que "El sentido real del símbolo es determinado por su uso, por la relación que la regla de uso guarda con otros símbolos del sistema" (1980, p. 212) e insistió en que "Los símbolos en sí, sin el sistema no tienen sentido; el sentido del sistema existe no sólo en el sistema sino también para el sistema." (*op. cit.* pp. 212-123).

Sin embargo, viendo el "sistema" o el "juego de lenguaje" de más cerca, nos damos cuenta que en realidad el mundo alberga diferentes juegos y sistemas semióticos, y el uso como el aprendizaje de muchos de éstos guardan relaciones mutuas. Así, por ejemplo, el complejo uso y aprendizaje de los signos aritméticos está supeditados al lenguaje hablado. La lengua natural, desempeña un papel privilegiado de sostén para la elaboración ontogenética de los otros sistemas semióticos (Duval 1995). Respecto al papel del lenguaje hablado en la adquisición del lenguaje escrito, Vygotsky notaba que:

La comprensión del lenguaje escrito se realiza a través del lenguaje oral, pero gradualmente la trayectoria es acortada, el lazo intermedio en la forma de lenguaje oral se desvanece y el lenguaje escrito se convierte en un símbolo directo tan comprensible como el lenguaje oral. (1997b, p. 142)

La palabra se vuelve un elemento semiótico clave en el desvanecimiento del lazo previamente mencionado que permite la emergencia de cierto grado de autonomía de los otros sistemas semióticos. De nuevo, Vygotsky notaba que:

> la palabra que significa el concepto aparece efectivamente primero desempeñando el papel de un indicador que aísla ciertos rasgos de un objeto, llama la atención sobre esos rasgos; sólo luego la palabra se convierte en un signo que representa esos objetos (...). El nombre o la palabra es un indicador de atención y una forma de acercamiento hacia la formación de nuevas ideas. (1997b, p. 172)

Baxandall enfatizó también el papel de las palabras y los nombres diciendo que "Todo nombre se vuelve un indicador selectivo de atención." (1971, p. 48)

Sin embargo, el nombre solo no es suficiente. Por ejemplo, en su libro *The Practice of Mathematics*, Solomon se opone a la idea que el aprendizaje ocurre como

[8] "Se aprende el juego viendo a otros jugarlo." Wittgenstein 1967, § 54.

consecuencia de la exposición del individuo al nombre de las cosas y a definiciones ostensivas. Refiriéndose a los supuestos implícitos en dicha idea de aprendizaje, Solomon dice:

> El proceso de aprendizaje mismo es asumido ser uno de definiciones ostensivas, esto es, se aprende un concepto como resultado de una exposición directa y repetida del objeto; por ejemplo, se aprende el concepto de "rojo" a través de la experiencia que consiste en etiquetar recurrentemente objetos rojos con "rojo" al señalarlos, etc. Sin embargo, este argumento es problemático; no hay una razón necesaria por qué una persona debería singularizar la particular cualidad de ser rojo y no otra". (Solomon 1989, p. 72)

La objeción de Solomon reposa en la idea que un objeto presenta, en general, diferentes cualidades a la vez; por ejemplo, si muestro un cubo rojo al alumno y luego otro más grande, no hay razón para que el alumno se detenga en la cualidad "rojo" en vez de la cualidad "cubo" (o "forma geométrica", si en vez de un cubo más grande le muestro, digamos, una esfera). Suponer la adquisición ostensiva del concepto "rojo", de acuerdo con Solomon, presupone, en efecto, la posesión previa de dicho concepto.

Las observaciones de Solomon nos invitan a ver el aprendizaje de signos y el uso de éstos como una empresa humana en la intersección de diferentes sistemas semióticos. Aunque el lenguaje natural permanece a menudo la institución *par excellence* en estudios culturales sobre la cognición, también hay otros elementos que desempeñan un papel importante. De hecho, el lenguaje natural no se mueve solo, de forma aislada. Estudios sobre la cognición humana han puesto en evidencia el hecho de que el lenguaje hablado se despliega acompañado y complementado por otros sistemas semióticos, por ejemplo, los sistemas de gestos producidos con las manos y los brazos (ver, por ejemplo, Leroi-Gourhan 1964). No hablamos solamente con el lenguaje sino con todo el cuerpo. Durante el despliegue de gestos, las manos pueden servir como productores de signos formando esbozos de objetos (Kendon 1993), mientras que en algunos casos, los objetos concretos pueden ser usados como metáforas de objetos ausentes (una estrategia instrumental utilizada por personas en general y que se convierte en un punto central en el desarrollo de los sistemas de signos de personas con deficiencias auditivas). Los gestos forman un sistema de signos con su propia sintaxis y sentido que permiten la producción de "textos". Como Goldin-Meadow dice, "El lenguaje no está amarrado a la boca y al oído; (el lenguaje) puede también ser procesado por las manos y los ojos." (1993, p. 63)

1.4 Los signos y el aprendizaje del álgebra

Dentro de la perspectiva en que se sitúa nuestro trabajo, concebimos el pensamiento algebraico como un tipo particular de pensamiento matemático genéticamente ligado a una nueva forma de uso de signos cuyos significados son elaborados por los alumnos y el profesor durante su participación en actividades matemáticas. Las actividades, por supuesto, no son cualquiera. Las actividades tienen objetivos (en el sentido de Leontiev 1984) que en este caso son específicas a lo que culturalmente reconocemos ahora como 'álgebra'. Por ejemplo, el estudio de la variables, la generalización de patrones, la investigación de funciones, la resolución de problemas a través de medios analíticos. De acuerdo a lo expuesto en las sub-secciones anteriores, el pensamiento algebraico no es visto como necesariamente un proceso mental interno. Lo vemos sobre todo como un proceso discursivo amarrado a los signos (escritos y verbales) a través de los cuales ocurre. En este sentido, el lenguaje algebraico resulta ser (como todo lenguaje) una forma (y no un medio) de pensar, actuar y comunicar.

Algunos aspectos metodológicos

La metodología general de nuestro programa investigación está orientada al estudio de la formación de reglas de producción y comprensión del uso de signos en alumnos que empiezan a estudiar el álgebra. La investigación consiste, en particular, en identificar la forma en que diferentes sistemas semióticos intervienen en la formación de reglas de uso de signos. Como lo mencionamos anteriormente, de acuerdo con nuestro marco teórico, estamos interesados en estudiar el uso de signos algebraicos y los sentidos con que los estudiantes los dotan, entendido dicho uso como un proceso que resulta de la confluencia del lenguaje natural y escrito sobre acciones que se producen en el sistema semiótico en que los problemas son planteados al alumno.

Dado que el proceso de formación de las formas de simbolizaciones que se generan en el aula es entendido aquí como proceso social en el sentido amplio, hemos preferido no utilizar estrategias experimentales de tipo "laboratorio" (por ejemplo, entrevistas o cuestionarios). En contraposición a "observar", hemos preferido emplear esquemas metodológicos etnográficos de *observación participativa* (Atkinson y Hammersley 1994). De esa cuenta, el profesor, el investigador y —en ciertas ocasiones, estudiantes del profesorado en período de "práctica pedagógica" — vienen de vez en cuando a discutir con los alumnos. Como la construcción del conocimiento es vista como una co- y reconstrucción social a través de la interacción semiótica mediada de los individuos, construcción que ocurre "a flor de piel" en un sentido que aclararemos más adelante, el papel del investigador y del profesor no se ve relegado al del observador neutro que habla tan poco como puede para no influir a los alumnos[9].

Nuestra metodología parte del diseño de secuencias de enseñanza para alumnos de 8°, 9° y 10° grado (14, 15 y 16 años de edad, usualmente). En lugar de tomar estudiantes en cada uno de esos grados, estamos interesados en un estudio longitudinal en el que seguiremos cuatro clases de 8° grado por tres años. Así, en este primer año los estudiantes se encuentran cursando el 8° grado; el próximo año, trabajaremos con esos mismos estudiantes cuando estén en 9° grado y luego, un año más tarde, cuando estén en 10° grado. En el diseño de esas secuencias intervienen los profesores, el investigador y los asistentes de investigación. En la segunda fase se procede a la implementación de las lecciones, las cuales son filmadas. En la tercera fase, las video-grabaciones son discutidas, transcritas y analizadas. El análisis de las transcripciones es llevado a cabo a través de un análisis de discurso interpretativo inspirado de los trabajos de Fairclough 1995, Moerman 1988 y Coulthard 1977. La interpretación de resultados da cabida a una retroalimentación que sirve para el diseño de las próximas unidades o secuencias de enseñanza.

---

9 El lector interesado en críticas corrientes contra el objetivismo científico podrá consultar los textos clásicos de Feyerabend, por ejemplo, "Contra el método" 1979 o "Adiós a la razón" 1989, o bien el libro de Latour y Woolgar 1979.

Las lecciones que hemos diseñado están basadas en diferentes sistemas semióticos (por ejemplo, material concreto, gráficas, fórmulas, etc. en las que los problemas que hemos escogido encuentran una formulación precisa). En cada uno de estos sistemas semióticos, los problemas y tareas son tratados a través del sistema semiótico dado o, eventualmente, otro elaborado por los propios alumnos, y esquemas discursivos generados por alumnos y profesores que originan procedimientos de uso de signos.

Uno de nuestros objetivos es el de proveer *descripciones* que muestren el encajamiento de los modos de significación empleados por los estudiantes en términos de los sistemas semióticos y los formatos discursivos con los correspondientes procedimientos de uso de signos. Que ciertos encajamientos puedan repetirse en diferentes contextos y situaciones, puede ser cierto, pero no es ese nuestro problema. No estamos buscando una realidad escondida detrás del discurso sino la realidad que el discurso construye. De esa cuenta nuestra metodología no reposa sobre la verificación experimental de hipótesis con la ayuda de tests estadísticos que asegurarían que el comportamiento de los estudiantes ante tal o tal pregunta sigue una curva normal de media μ_1 y no μ_0. Al contrario, nuestra aproximación es interpretativa.

En la próxima sección daremos un ejemplo relativo al uso y producción que hacen los alumnos de signos en actividades centradas en la generalización de patrones geométrico-numéricos. Se trata del análisis de un episodio tomado de los discusiones que tuvieron lugar en uno de los cuatro grupos de 8° grado, durante una de las lecciones de introducción a los conceptos de patrones y sucesiones que se ubican al interior del programa de álgebra. El análisis del episodio ilustra ciertos temas generales que nos interesan en nuestro programa de investigación, como:

(a) el aspecto asimétrico del discurso y la relación conocimiento/poder que éste induce y mantiene;
(b) el pensamiento como proceso extra-cerebral;
(c) los mecanismos de objetivación mediada y
(d) los esquemas discursivos dentro de la cultura del aula.

El propósito de ofrecer el siguiente análisis no es el de derivar resultados definitivos. Se trata de ilustrar cómo los temas señalados emergen en el curso de la actividad discursiva, sensual y mental de los alumnos cuando éstos se lanzan a participar en una actividad cuyo propósito es brindar un espacio de construcción del lenguaje y pensamiento algebraico en alumnos sin experiencia algebraica previa.

3. Un ejemplo en 8° grado

Es conveniente mencionar que el curriculum de matemáticas de Ontario está dividido en cinco dominios: (1) numeración y sentido del número, (2) probabilidades y análisis de datos, (3) geometría y sentido del espacio, (4) modelización y álgebra y (5) medida. Para asegurarse que los profesores no se detengan solamente en aquellas partes del curriculum que les interesa, el consejo escolar al que pertenece la escuela de la que proviene el episodio que discutiremos, ha adoptado la política de una enseñanza cíclica, lo que significa que cada mes los cinco dominios deben ser enseñados, retomándose cada dominio en el punto en el que se dejó el mes anterior.

Nuestro episodio se sitúa en el segundo mes de clases. Los alumnos habían sido introducidos a los conceptos básicos de patrones y sucesiones el primer mes. Durante ese mes, habíamos notado que los estudiantes tenían problemas para construir fórmulas utilizando una sola letra. En efecto, siguiendo una tendencia que ha sido ya mencionada en otras investigaciones (ver, por ejemplo, Laborde *et al.* 1996), los alumnos tendían a utilizar tantas letras como variables había en el problema, sin tomar en cuenta las eventuales relaciones funcionales entre éstas.

El siguiente problema es el primero de una lista de cinco, cuyo objetivo era el de asegurarnos, desde el punto de vista del aprendizaje, que el problema del "múltiple uso de letras" había sido superado.

El enunciado del problema dado a los alumnos es el siguiente:

Observa el siguiente patrón:

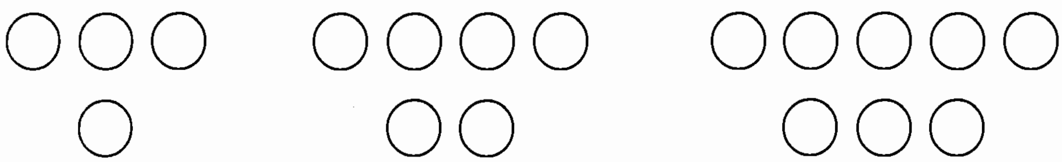


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

a) ¿Cuántos círculos hay
 * en la parte superior de la figura n° 6?
 * en la parte inferior de la figura n° 6?
 * en total en la figura n° 6?

b) ¿Cuántos círculos hay
 * en la parte superior de la figura n° 11?
 * en la parte inferior de la figura n° 11?

c) * en total en la figura n° 11?

b) ¿Cuántos círculos hay en la parte superior de la figura n° "n" ?

e) ¿Cuántos círculos en total hay en la figura n° "n" ?
 ¡Explicar la respuesta!

Diálogo:

Tres alumnos participaron en el diálogo. Para efectos de la transcripción, los hemos identificado como alumno 1, alumno 2 y alumno 3. Conviene indicar que nuestros tres alumnos estaban ubicados de tal forma que el alumno 3 estaba frente a los otros dos. El alumno 3 muestra en general un buen rendimiento en matemáticas. Dicho alumno fue "recuperado" por la profesora de una clase de alumnos con no mucha esperanza en cuanto a rendimiento académico se refiere. En general no habla mucho y él mismo se define como una persona que le gusta pensar más que hablar. El alumno 2 le gusta el trabajo en grupo; su personalidad es más extrovertida que los otros miembros de su grupo y, como el episodio lo mostrará, suele tomar en mano la organización y el trabajo del grupo. El alumno 1, a diferencia de sus dos colegas, no muestra mucho interés en las matemáticas. Él prefiere seguir lo que los otros dicen. Intermitentemente en este episodio dicho alumno muestra una tendencia inusual a participar.

Tiempo línea alumno	*diálogo / observación*
0:00 (1) alumno 2	(*lee el problema*) Observa el patrón siguiente. O.K. Es (*muestra las figuras con su lápiz*) siempre menos ... (*refiriéndose a que hay menos círculos en la fila de abajo que en la de arriba*)
0:05 (2). Alumno 1:	(*interrumpiendo al alumno 2 y mostrando las figuras con su lápiz dice*) Más uno en cada uno (*haciendo referencia al círculo que se añade la fila superior de cada figura*).
0:06 (3) Alumno 2:	No, es más dos. Mira (*muestra las figuras con su lápiz*) uno más dos es tres, dos más dos es cuatro, tres más dos es cinco ...
0:17 (4) Alumno 1:	O. k. Hazlo tú.
0:21 (5) Alumno 2:	(*leyendo en voz alta la pregunta*): ¿Cuántos círculos hay en la parte inferior de la figura 6? Es más ...
0: 27 (6) Alumno 1:	(*interrumpiendo*) Es más ... Es más dos cada vez. (*El alumno hace notar que cada figura tiene, en total, dos círculos más que el anterior*). (*El alumno 2 es inaudible pero parece intentar resolver el problema*)
0:38. (7) Alumno 2:	Euh ... No... O.K. Empecemos. (*El alumno 2 no entiende el razonamiento del alumno 1 y decide leer la pregunta de nuevo*). ¿Cuántos círculos hay en la parte inferior de la figura 6? ...(*pausa*) Habría .....ummmm..... 6 círculos.
0:46 (8) Alumno 1:	(*interrumpiendo*) Más dos.
0:48 (9) Alumno 2:	¿De qué estás hablando?
0:50 (10) Alumno 1:	6 círculos (*y gira el papel hacia él*)
0:52 (11) Alumno 2:	(*Interrumpiendo y mostrando con su lápiz las figuras sobre el papel*) Sí, ¡pero mira! Figura 1, un círculo, figura 2, dos círculos, figura 3, tres círculos ... figura 6, seis círculos.
0:59 (12) Alumno 1:	(*No convencido, pone su lápiz sobre la figura 1, 2 y 3 y cuenta los círculos con su lápiz, repitiendo la explicación del alumno 2*) uno, dos, tres, ¡hey! (*descubriendo el patrón en la parte inferior de las figuras*).
1:01 (13) Alumno 2:	(*continúa su explicación*) ¡El número de la parte de abajo! (*enfatizando con un tono de voz que sugiere que lo que está mostrando es trivial*).

1:03 (14) Alumno 1: (*interrumpiendo*)¡Ah! ¡El número de la parte de abajo! O.K. tienes razón.

1:04 (15) Alumno 2: (*hablando al mismo tiempo que el alumno 1 y pasando ahora a responder la última parte de la pregunta a*)...En la fila de abajo del 6 habría más dos, lo que haría 8 círculos. En total en la figura 6 tendrías ...Uhh, veamos, 8 más 6 ...(*y sarcásticamente añade*) ¡No sé cuánto hace! ... (*escribe la respuesta en el papel*) 14.

(*pausa*)

Comentarios

► Conocimiento, discurso y poder

En este pasaje vemos a los alumnos 1 y 2 discutir sobre patrones. Al inicio, los dos hablan de cosas diferentes (líneas 1-3): mientras que el alumno 2 está centrado en encontrar una relación entre la fila superior e inferior de una misma figura (lectura ; vertical *intra-figural*), el alumno 1 centra su atención en la búsqueda de una relación entre las filas superiores de las figuras (lectura horizontal *inter-figural*), como lo requiere la primera parte de la pregunta *a*.

Como lo muestra la transcripción anterior, los alumnos no logran explicarse ni entenderse mutuamente. Sin haber aclarado el punto en discordia, pasan a la segunda parte de la pregunta, luego que el alumno 1 cede parcialmente su posición al decir "O.K. hazlo tú" (línea 4).

En este momento el alumno 1 no sólo cede sino adopta una nueva estrategia de investigación (línea 6). En efecto, dicho alumno abandona la investigación de las filas superiores de las figuras y se centra en las figuras completas (es decir, fila superior e inferior, guardando, sin embargo, la lectura horizontal *inter-figural*) y llega a proponer el *mismo* resultado al que había llegado el otro alumno en su análisis *intra-figural* de filas superior/inferior en una misma figura, esto es, la regla: "es más dos cada vez". Sin embargo, el estudiante 2 está ya tratando de responder *otra* pregunta (línea 5), de suerte que la regla que anuncia el alumno 1 en la línea 6 es rechazada (a pesar de que dicha regla coincide con la que el mismo alumno 2 había producido en su investigación inicial, investigación que queda implícita todo el tiempo[10]).

Es posible que la solución proporcionada por el estudiante 2 (la regla: "es más dos", línea 3) haya inducido intencionalmente en el alumno 1 una lectura de los patrones que acepta como solución la solución anterior del alumno 2. Es posible que sea eso lo que haya llevado al alumno 1 a abandonar la lectura por filas que mostró al inicio y a interesarse solamente en la estructura numérica del patrón y "ver" cada figura como una entidad numérica global (aproximación al problema que contrasta con la del alumno 2, que "ve" cada figura como una entidad geométrica compuesta de dos filas).

[10] En la línea 3, el alumno 2 ha dicho "es más dos"; en la línea 6 el alumno 1 dice "es más dos cada vez".

En todo caso, es importante notar que la discordancia entre los resultados (es decir, las reglas propuestas) no logra resolverse a través de una búsqueda de comprensión de los objetivos de dichas investigaciones. Si, como hemos dicho anteriormente, los alumnos no solamente no se entienden ni buscan entenderse, es cierto también que se niegan mutuamente la posibilidad de estar en lo cierto (por ejemplo, el alumno 2 dice claramente "No", en la línea 3; y si en la línea 11 dice "Sí" a la explicación del otro, el "sí" no puede ser tomado como una aceptación del razonamiento que le es propuesto sino como pivote en su estrategia discursiva para convencer al otro). En otros términos, las voces no logran articularse y se pierden en una polifonía sin reconciliación. La única forma que encuentran para salir del doble embrollo (el primero ocurre en las líneas 1 a 3 y el otro en las líneas que van de 5 a principios de 7) es empezando de nuevo desde la lectura de la pregunta misma (línea 7). Pero cuando el alumno 1 insiste de nuevo en que es "más dos", su solución es rechazada. El tono en que la pregunta "¿De qué estás hablando?" es hecha (línea 9) vuelve difícilmente dicha instancia discursiva una pregunta. En efecto, el tono insinúa otra cosa (como "deja de decir tonterías y presta atención").

Las palabras tienen un patrón que crea, induce y mantiene las instituciones sociales de poder y jerarquía en cuyas avenidas el conocimiento transita en una forma y no en otra. En este caso, la estructura de poder es tal que el alumno 1 es relegado a un papel en el que debe conformarse con las explicaciones de los otros. Este punto es hecho aún más claro, más adelante, cuando los alumnos están tratando de resolver la siguiente pregunta (pregunta b). En este caso, el alumno 3 interviene por primera vez y menciona exactamente *la misma regla* que el estudiante dio en las línea 6 y 8, esto es: "más dos". Esta vez, sin embargo, la recepción de la misma frase (de la misma *utterance*), es diametralmente opuesta. Estas son las líneas:

1:30 (16)	Alumno 2:	(*leyendo la pregunta en voz alta*) ¿Cuántos círculos hay en ... (*la lectura se prosigue mentalmente*) ....11 círculos. Arriba (*refiriéndose a la figura*)...
1:37 (17)	Alumno 3:	más dos
1:38 (18)	Alumno 2:	¿Qué?

El alumno 2 reconoce el talento del alumno 3. Su actitud hacia él es la opuesta a la que él tiene hacia el alumno 1. Ahora la pregunta "¿Qué? De la línea 18 es realmente una pregunta, esto es, una expresión del lenguaje que requiere una explicación de parte de la persona a la que la pregunta es dirigida.

Las estructuras de poder en las que transita el conocimiento dependen, por supuesto, de la cultura y, en particular, de la cultura de la sala de clase. Esta última hereda ciertos moldes de la cultura general de la cual forma parte. La cultura de la sala de clase crea las condiciones de emergencia y funcionamiento de esquemas discursivos diferentes.

En el extracto anterior vemos cómo ciertos esquemas de conflicto que provienen de estrategias de investigación diferentes quedan sin solución, mientras que otros se resuelven según el papel que los alumnos adoptan y la idea que se han hecho de lo que es la respuesta a un problema de matemáticas. Los conflictos no logran llevar a *impases*, gracias a esquemas diversos como el de empezar de nuevo la tarea (lo que da la impresión de un regreso a un punto de partida con un balance en la negociación igual a cero, o de dar provisionalmente la razón al otro por medio de fórmulas discursivas como "sí, pero...".

El papel que los esquemas discursivos desempeñan en el plano cognitivo puede ya verse en el extracto anterior a nivel de la forma en que las estrategias de investigación se van conformando y negociando; sin embargo, esto quedará más claro cuando nos discutamos elementos relativos a los procesos de objetivación mediada. Pero para poder explicar esto, necesitamos aclarar previamente algunos aspectos adicionales acerca de la concepción que estamos empleando respecto al conocimiento. Digamos, para cerrar esta parte de nuestra discusión, que no estamos adjudicando al diálogo una naturaleza exclusiva de combate. De hecho, en otros grupos, el diálogo adquiere un tono epistemológico completamente opuesto, en el que los alumnos son llevados tranquilamente por el discurso del alumno o alumna que logra realizar mejor o más rápido las tareas presentadas. En ese caso, la relación poder-conocimiento transita por diferentes estructuras[11].

► El pensamiento afuera del organismo

Regresemos una vez más a las líneas anteriores para poner en evidencia otro fenómeno interesante. En la línea 11, el alumno 2 coloca su lápiz sobre la fila inferior de las figuras. El lápiz (un artefacto cultural) se convierte en una herramienta de pensamiento para centrar la atención y efectuar un examen minucioso (diríamos un "scanning") del patrón geométrico dado. El lápiz se convierte, junto con los signos-figuras, en uno de los agentes mediadores de las acciones-pensamientos. Observemos, sin embargo, que el lápiz y los signos-figuras no agotan el conjunto de agentes mediadores en este episodio. Tenemos palabras también. Con la ayuda de palabras ("figura 1, un círculo, figura 2, dos círculos, figura 3, tres círculos .... Figura 6, seis círculos...") el alumno descompone las figuras. Como lo sugería ya la cita de Baxandall dada previamente, los nombres ("figura 1, un círculo", "figura 2, dos círculos", etc.) se convierten en un indicador selectivo de atención, una herramienta (en el sentido de Vygotsky) para desensamblar la realidad e investigarla.

Queremos sugerir que, en esta precisa ocasión, el pensamiento no está *dentro* de la mente o *debajo* del cuero cabelludo, sino que el pensamiento está externamente distribuido en el diálogo, en los signos-figuras sobre el papel y en el lápiz.

Por supuesto, esta idea es contraria a la idea tradicional que afirma que que el funcionamiento mental es algo que ocurre privadamente dentro de la cabeza. Pero como el antropólogo Geertz ha notado:

> La idea corrientemente aceptada según la cual el funcionamiento mental es un proceso intracerebral que puede ser sólo secundariamente asistido o amplificado por los varios dispositivos artificiales que dicho proceso ha permitido al hombre crear, resulta estar completamente equivocada. Al contrario, siendo imposible una definición adaptativa, completamente específica de los procesos neuronales en términos de parámetros intrínsecos, el cerebro humano es completamente dependiente de recursos culturales

[11] Nuestro recurso al término de estructuras discursivas no debe ser entendido en el sentido del estructuralismo relacional clásico, sino como arquitecturas que surgen de procesos discursivos locales y contextuales.

para su propia operación; y esos recursos no son, en consecuencia, [objetos] añadidos a la actividad mental sino constituyentes de ésta. (1973, p. 76)

Precisamente, otro antropólogo —Gregory Bateson— se pronunciaba igualmente contra la idea del pensamiento como algo interno. Bateson decía que no hay fronteras en el pensamiento. Lo que piensa es el *sistema total* que es el hombre más la naturaleza. Y su ejemplo más conocido es el del hombre ciego y su bastón:

Supongamos que soy un hombre ciego que voy con un bastón. Voy tap, tap, tap. ¿Dónde empiezo? ¿Está mi sistema mental acotado por el mango del bastón ? ¿Está acotado por mi piel? ¿Empieza a la mitad del bastón? ¿Empieza en la punta del bastón? (...) Si lo que Ud. está tratando de explicar es el una pieza dada de comportamiento, como el movimiento del hombre ciego, entonces, para ese propósito, Ud. necesitará la calle, el bastón, el hombre (Bateson 1973, p. 434)

► Procesos de objetivación mediada

Prosiguiendo con nuestros comentarios, detengámonos ahora en la línea 12.

Vemos aquí al estudiante 1 haciendo eco al estudiante 2. En efecto, en la línea 12, el alumno 1 toma su lápiz y examina con la ayuda del artefacto 'lápiz', como lo hizo su compañero en el momento anterior, el patrón dado. Con el lápiz y con las palabras el alumno 1 abre a la percepción las figuras en dos filas, superior e inferior. La expresión "¡Hey!" aparece como testimonio de la comprensión que comienza a alcanzar el alumno 1 y que, a través de este proceso de *mimesis*, es objetivada en la línea 14, donde el alumno hace suyas las *mismas* palabras pronunciadas por su compañero en la línea 13. Como este último, el alumno 1 dice: "¡El número de la parte de abajo!"

Los procesos de imitación constituyen uno de los recursos más poderosos con que disponen los alumnos en la co-construcción del conocimiento. El ejemplo anterior lo muestra claramente. Desafortunadamente, en nuestra sociedad en general y en el terreno de la educación en particular, la imitación ha sido peyorativamente considerada como un procedimiento de poca profundidad. Como vemos en el ejemplo anterior, es el alumno 1 el que, en un proceso de objetivación mediada del conocimiento, repite las palabras del alumno 2. Dicha objetivación le permite luego abordar las siguientes preguntas con una mejor comprensión del patrón. Como veremos más adelante (línea 80), en el momento crucial del episodio (crucial desde el punto de vista del desencadenamiento que permite encontrar la fórmula matemática de la pregunta "c" planteada en este problema) no es el alumno 1 sino el alumno 2 el que objetiva según el esquema de mimesis del que estamos hablando, haciendo suya, en forma interrogativa, la solución que propone el alumno 3. Quizás Baldwin tenía razón cuando decía que

> a través de la imitación el niño adquiere las riquezas almacenadas de los movimientos sociales de la historia; a través de la imitación aprende a usar las herramientas de la cultura, el lenguaje, la escritura, habilidades manuales de manera que a través del uso independiente de esas herramientas se puede convertir en un individuo más fructífero y competente; finalmente, es imitando en el curso de variados y esforzados intentos que [el niño] logra convertirse en original e inventivo. (Baldwin 1911, p. 21)

► Interpretando "el número cualquiera"

Detengámonos ahora en el diálogo que originó la búsqueda de la solución a las preguntas c y d. Uno de los objetivos de la lección era, como lo hemos señalado previamente, el de introducir a los alumnos a la construcción de un nuevo objeto matemático que usualmente se caracteriza a través de un proceso de *generalización* y que encontramos en nuestro programa de estudios bajo el nombre de "término general de una sucesión".

Como los propios alumnos mostrarán en el diálogo que sigue, el problema fundamental con este concepto de "término general" es que no es en sí un elemento de la sucesión. De hecho, en un trabajo previo sobre la generalización en álgebra hicimos notar que dicho concepto no es expresable en el sistema semiótico en el que se expresa la propia sucesión (Radford 1996). Para plantear la pregunta misma acerca del término general se requiere "salir" del primer sistema semiótico.

¿Cómo, entonces, en este caso en particular, la construcción del nuevo objeto es posible? ¿Cuáles son los recursos semiótico-discursivos que se ponen en marcha en el proceso de construcción del objeto?

Para intentar aportar algunos elementos de respuesta, veamos la parte siguiente del diálogo.

1:41 (21) Alumno 2:	Wow! (*refiriéndose a la pregunta anterior*) Esa era fácil. (*Lee ahora la otra pregunta*) ¿Cuántos círculos hay en la parte superior de la figura ...? (*el alumno viene de toparse con la expresión "... la figura n"*) ¿Qué? (*enviando el papel con un gesto hacia los otros dos alumnos*). O.K. ¡Esto que lo haga otro!
1:59 (22) Alumno 1:	(*Lee la pregunta*) ¿Cuántos círculos ...?
2:01 (23) Profesor :	(*acercándose a la mesa de trabajo de los alumnos:*) ¿Están despiertos esta mañana?
2:03 (24) Alumnos:	¡Sí!
2:05 (25) Alumno 1:	¿Qué significa esto? (*refiriéndose a la pregunta del problema*)
2:07 (26) Alumno 2:	No sé (*y golpea la hoja con su lápiz*)
2:13 (27) Alumno 1:	¿Cuál es la figura n? (inaudible)
2:22 (28) Alumno 1:	Shut up (*dirigiéndose al alumno 2*) I'm going to kill you (*expresiones idiomáticas que dejamos sin traducir*) ¿No es qué letra en el alfabeto?
2:33 (29) Alumno 2:	(*dirigiéndose al alumno 1*) pregúntale al profesor

Comentarios:

En un lapso de menos de un minuto el panorama se ha ensombrecido. Mientras que la pregunta b fue respondida rápidamente por el alumno 2 (menos de 20 segundos) sin ninguna objeción por parte de los otros, la pregunta c les resulta ininteligible. El fracaso de un plan de acción en el curso de la resolución de un problema y su impacto en el aspecto emocional del individuo (visible aquí en el cambio emocional que acusa en particular el alumno 2) ha sido estudiado, entre otros, por McLeod 1989, de manera que no nos detendremos en ello en estos comentarios. No obstante, señalemos, antes de continuar que, al abandonar, como lo estamos haciendo aquí, las perspectivas que postulan que la Razón (con mayúscula) es ajena a las emociones, o que éstas sólo pueden ser dañinas al cálculo frío, el papel de las emociones se convierte en un problema digno de todo interés. Tikhomirov y Vinogradov (1970), en una serie de experimentos han encontrado que la heurística en la que se inserta la búsqueda de una solución es en cierta forma monitoreda por las propias emociones y que la solución "intelectual" a un problema suele ser precedida por lo que estos autores llamaron una "solución emotiva" (p. 210). Mientras que el alumno 2 queda bloqueado ante el problema, el alumno 1 se lanza el la búsqueda de otro plan:

2:48 (30) Alumno 1:	(*contando las letras del alfabeto que ha escrito sobre el escritorio*) Catorce. Entonces, (*reformulando la pregunta en términos del nuevo plan*) ¿cuántos círculos en total tendrá …
2:53 (31) Alumno 2:	(*interrumpiendo*) No, no en total (*haciendo ver que no es la pregunta d sino c la que se está discutiendo*)
2:54 (32) Alumno 1:	(*retomando la palabra*) ¿Cuántos círculos tendrá la fila superior de la figura 14. N es 14.
3:00 (33) Alumno 2:	¡No! ¡No es 14!
3:01 (34) Alumno 1:	¡Sí! ¡Sí es! (*en ese preciso momento de casualidad el profesor se aproxima al grupo*)
3:02 (35) Alumno 3:	¿Qué es n?
3:04 (36) Alumno 2:	(*dirigiéndose al profesor*) ¿Qué es n? No lo sabemos…
3:08 (37) Profesor :	(*girando la hoja hacia él, lee en voz alta*) ¿Cuántos círculos hay en la parte superior de la figura número n?
3:13 (38) Alumno 3:	(*repitiendo su pregunta*) ¿Qué es n?
3:15 (39) Alumno 1:	N es 14 pues es la catorceava letra del alfabeto ¿no es cierto?
3:20 (40) Alumno 2:	(*adoptando el plan del alumno 1 que había rechazado anteriormente, cuenta las letras escritas por éste*) uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nuevo, diez, once, doce, trece, catorce.
3:28 (41) Profesor:	(*mientras que el alumno 3 examina de nuevo la pregunta, viendo que el profesor no proporciona una respuesta*) n es un número cualquiera.
3:32 (42) Alumno 2:	O.K.
3:33 (43) Alumno 1:	¿Qué es n?
3:35 (44) Profesor :	Un número cualquiera (*mientras tanto el alumno 3 regresa a la pregunta a*)

3: 39 (45)	Alumno 1:	No entiendo
3:41 (46)	Profesor:	¿No entiendes?
3:42 (47)	Alumno 1:	No.
3:43 (48)	Alumno 3:	(*inaudible; tiene la hoja del problema y empieza a hablar al profesor cuando éste le hace una pregunta*)
3:44 (49)	Profesor:	¿Entiendes qué es n?
3:45 (50)	Alumno 3:	¿Para cuál? (*refiriéndose a las figuras*) ¿éste, éste o éste? (*y muestra las figuras con el lápiz*)
3:46 (51)	Profesor:	No importa cuál.
3:50 (52)	Alumno 3:	O.K. (*inaudible*) El término multiplicado por... (*muestra las figuras sobre la hoja*)... estos tres aquí (*indicando la parte inferior de la figura 3*)... Ud. tiene dos más aquí (*refiriéndose a la parte superior de la figura 3*) (*silencio*)
4:10 (53)	Profesor:	(*dirigiéndose al alumno 2*) ¿Y tú? ¿Tienes una idea de qué es n?
4:12 (54)	Alumno 1:	(*interrumpiendo*) 14.
4:13 (55)	Profesor:	Puede ser 14 ...
4:14 (56)	Alumno 2:	(*interrumpiendo*) ¿No importa qué número?
4:15 (57)	Profesor	(*continuando la frase anterior*) ... puede ser 18, puede ser 25...
4:18 (58)	Alumno 1:	¡Ah! ¿Puede ser cualquier número?
4:19 (59)	Alumno 2:	(*interrumpiendo*) El número que decidamos
4:20 (60)	Alumno 1:	O.K. entonces (*tomando la hoja*) O.k, n puede ser euhh...
4:26 (61)	Alumno 2:	Doce
4:27 (62)	Alumno 1:	Sí
4:28 (63)	Profesor:	Pero... sí. ¿Qué ibas a escribir?
4:31 (64)	Alumno 1:	12
4:32 (65)	Alumno 2:	12

Comentarios:

El extracto anterior muestra cómo el profesor lanza la construcción del objeto en una dirección que es interpretada por los alumnos en un forma inesperada. En la parte que sigue del diálogo veremos la acción prácticamente desesperada que el profesor despliega con el fin de recuperar el sentido que quiere dar a la frase "un número cualquiera". Por el momento veamos cómo ese sentido indeseado se "filtra" en el diálogo.

La primera ocurrencia de la frase es en la línea 41. En la línea 37 el profesor se ha limitado a responder con la pregunta misma, lo que evidentemente no aclara en nada a los alumnos. Ante la insistencia de éstos, y probablemente viendo que estos partían en una dirección equivocada (n igual a 14, dado que n ocupa la posición 14 en el alfabeto), en la línea 41 la respuesta ("n es un número cualquiera") pretende ahora aportar más información. La continuación del diálogo muestra que los alumnos entienden dicha expresión como "un número cualquiera" en el sentido del sistema semiótico de la aritmética, es decir, como un número arbitrariamente escogido, pero concreto. Por ejemplo, el alumno 3 pregunta a qué figura se está haciendo referencia (ver línea 50), mientras que los otros dos alumnos deciden que el número cualquiera será 12.

► La misión de rescate del significado perdido

Veamos ahora la acción de recuperación del significado que lanza el profesor.

4:33 (66) Profesor	¿Y si Uds. dejan para decir un número cualquiera? ¿Cómo podríamos encontrar... cómo podríamos encontrar el número de círculos de un término cualquiera? (*haciendo un gesto dinámico con la mano, como si tocara uno a uno los término de la sucesión, casi creando el objeto con las manos allí mismo donde las palabras ya no le alcanzan para hablar...*).
	(*silencio*)
4:51 (67) Alumno 2:	¿Figura n? No hay figura n.
4:54 (68) Alumno 1:	(*dirigiéndose al alumno 2*) ¡Acaba de explicar que n es lo que tú quieras!
4:57 (69) Alumno 2:	(*interrumpiendo al alumno 1*) ¿Qué es esto?
5:01 (70) Alumno 1:	O.K. Umm... siete (*escribe sobre la hoja, luego duda*)
5:10 (71) Alumno 2:	No arriba. Son siete círculos (*toma la hoja y mira*)
5:13 (72) Alumno 1:	¡Sí! Y abajo es cinco círculos
5:21 (73) Alumno 2:	(*escribe la respuesta y lee la siguiente pregunta*) ¿Cuántos
círculos en total ...?	(*inaudible*)... 12 círculos (*escribe la respuesta*). (*el alumno 1 toma de nuevo la hoja*)
5:42 (74) Profesor :	Entonces, euh... (*mira la hoja*) ¡espera, espera! Pero para un número cualquiera... esto Uds. lo han hecho para siete círculos, pero si siete ... para no importa cuál ...
5:52 (75) Alumno 2:	(*indica la hoja con su lápiz*) Añades 2 al número de abajo ...restas.. ah no, añades 2 al número de arriba. Si es siete, el número que ...

Comentario:

El embrollo se resuelve no sobre un ejemplo concreto sino sobre la *toma de conciencia* de una acción concreta realizada previamente. Y queremos insistir en que se trata de una toma de conciencia, pues la acción ha aparecido en otras ocasiones con anterioridad, excepto que en este caso la acción aparece como elemento de respuesta dentro del contexto de la discusión del "número cualquiera". En este momento, los alumnos alcanzan a formular la acción no como una acción concreta dentro de la aritmética (que daría como resultado un número concreto, es decir, un número particular) sino una *acción potencial* en el metacódigo del lenguaje natural.

Como se ve, el nuevo objeto se construye con palabras: "Añades 2 al número de abajo...". Lo que llamamos generalidad queda aquí atrapada en la expresión "el número de abajo" —expresión que guarda toda la *sensualidad* de las figuras en el espacio— y la operación de añadir ("Añades 2") a la que se somete ese número impronunciable dentro de la propia aritmética. La formulación condicional que utiliza el alumno muestra claramente dos cosas: primero, que estamos en presencia de dos niveles conceptuales diferentes (uno general y el otro particular) y, segundo, cómo los niveles quedan conectados entre ellos.

Notemos que no nos parece acertado atribuir solamente al cambio, por parte del profesor, de la frase "un número cualquiera" por la frase "no importa cuál [número]" la razón que mueve al alumno 2 a concebir la acción potencialmente. Habría que incluir en la explicación el hecho que el profesor no ha aceptado las respuestas anteriores. El rechazo (a veces cortés, a veces condescendiente, pero siempre claro) del profesor mueve a los alumnos a la búsqueda de una nueva significación de la respuesta que exige el problema.

Queda todavía el trabajo de la construcción de la fórmula:

6:01 (76) O.K.	¿Podrías poner eso en una fórmula ...
6:04 (77) Alumno 3:	Uhh...
6:05 (78) Profesor:	.... (*completando la frase anterior*) utilizando n?
6:06 (79) Alumno 3:	Uhh... es el término por dos más dos.
6:10 (80) Alumno 2:	¿El término por dos más dos?
6: 12 (81) Alumno 3:	(*mostrando con su lápiz una de las figuras sobre el papel*) Uhhh... 2 por 6 ...2 por 3 es 6, más 2 ...
6:21 (82) Profesor:	¿Puedes repetir? (*mostrando las figuras sobre la hoja*)
6:23 (83) Alumno 3:	Sí. El término por dos más dos (*el alumno 2 escribe la explicación sobre el papel mientras que el profesor mira lo que el alumno escribe*)
6:28 (84) Profesor:	Escríbanlo, ¿eh?
6:30 (85) Alumno 2:	(*diciendo lo que escribe*) El término por dos más dos
6:37 (86) Alumno 1	(*leyendo la respuesta*) O.K. El término por dos más dos
6:41 (87) Profesor:	¿Entiendes? (*dirigiéndose al alumno 1*)
6:42 (88) Alumno 1:	Sí, sí, entiendo
6:42 (89) Alumno 2:	(*respondiendo al mismo tiempo*) Sí.

....

7:38 (107) Profesor:	(*señalando la hoja con el dedo*) ¿y si Uds. quisieran utilizar la letra n en la fórmula?
7:42 (108) Alumno 2:	(*acercando la hoja hacia él*) n por dos más dos (*el alumno escribe la fórmula en la hoja*).

Comentario:

La palabra "término" es, desde el punto de vista de la teoría matemática, mal empleado por los alumnos en este problema. En efecto, como ya lo habrá notado el lector, hay una confusión entre "término" y "rango". Sin embargo, el significado es claro. Quizás conviene más notar que, independientemente de la legitimidad matemática de la palabra "término", dicha palabra viene a ser una herramienta que permite un refinamiento en la construcción del objeto. El uso de palabras aparece como el uso de herramientas en el aprendiz. Primero torpemente (con relación al especialista), luego con paulatina maestría. El aprendizaje del uso de signos parece obedecer al mismo destino.

4. Síntesis y observaciones finales

En este artículo hemos presentado brevemente el marco teórico socio-cultural sobre el cual reposa nuestro programa de investigación, cuyo propósito es la comprensión del uso de signos que hacen los alumnos en álgebra y la forma en que dichos signos son dotados de significados. Una de las facetas distintivas del marco teórico reside en una diferente conceptualización de signos (y de la cognición en general) de la que se encuentra generalmente en marcos constructivistas o socioconstructivistas.

En nuestra perspectiva, los procesos cognitivos no ocurren dentro de la mente. Los procesos cognitivos son vistos como procesos que ocurren en el plano social. Las "ideas" (y el pensamiento en general) se conciben como contracciones semióticas de acciones llevadas a cabo en el exterior del individuo. Siguiendo a Vygotsky, concebimos las ideas como acciones interiorizadas a través de signos y otros artefactos culturales. Otro forma de decir esto es que las ideas son vistas como la interiorización de acciones mediadas. El episodio de sala de clase que hemos discutido y analizado aquí ilustra bien, creemos, este punto.

En efecto, el concepto de término general aparece como una acción potencial desplegada previamente en el plano social y que se interioriza en y a través de signos (en particular, en nuestro ejemplo, palabras y signos matemáticos). Dicha acción potencial que encierra la forma de una generalización es la expresión particular de las acciones concretas que encuentra cabida dentro de la actividad mediatizada (no sólo por el lenguaje sino también por el artefacto cultural "lápiz") de los alumnos durante las reflexiones de éstos en torno a un problema planteado dentro de un sistema semiótico particular. En términos de la distinción semiótica entre signo y significante que mencionamos en la sub-sección 1.1, la componente 'significante' (*signified*) relacionada al término general del patrón guarda la conexión genética de la actividad externa y los artefactos que la mediatizan. Por otro lado, las reflexiones y uso de signos (esto es la comprensión y producción de los signos) quedan inmersos en esquemas o formatos discursivos con sus avenidas propias de poder y conocimiento que prevalecen en la sala de clase, de acuerdo con la cultura de ésta.

Tal y como lo hemos visto, la acción potencial que hace posible lo que suele llamarse la generalización encuentra expresión en la semiótica de las acciones concretas y el modo de pensamiento que éstas producen (ver Diagrama). Contrario a la idea tradicional, la generalización no es la evacuación del contexto, sino otra expresión contextual de las acciones anteriores, las que explican la acción potencial (por ejemplo, simplemente dándole sentido) al mismo tiempo que ésta última, aun sin estar allí, las explica ya en su naturaleza concreta. Y es que la acción potencial está ya allí sin estar allí, haciendo posible que el sexto, séptimo u otro término cualquiera sea estudiado *de la misma forma que los anterior*es. Lo concreto y lo abstracto revisten una dimensión temporal que no es lineal sino dialéctica, en el que ambos se anticipan mutuamente, dentro de los límites que traza la racionalidad de los individuos y los sistemas semióticos que éstos van creando.

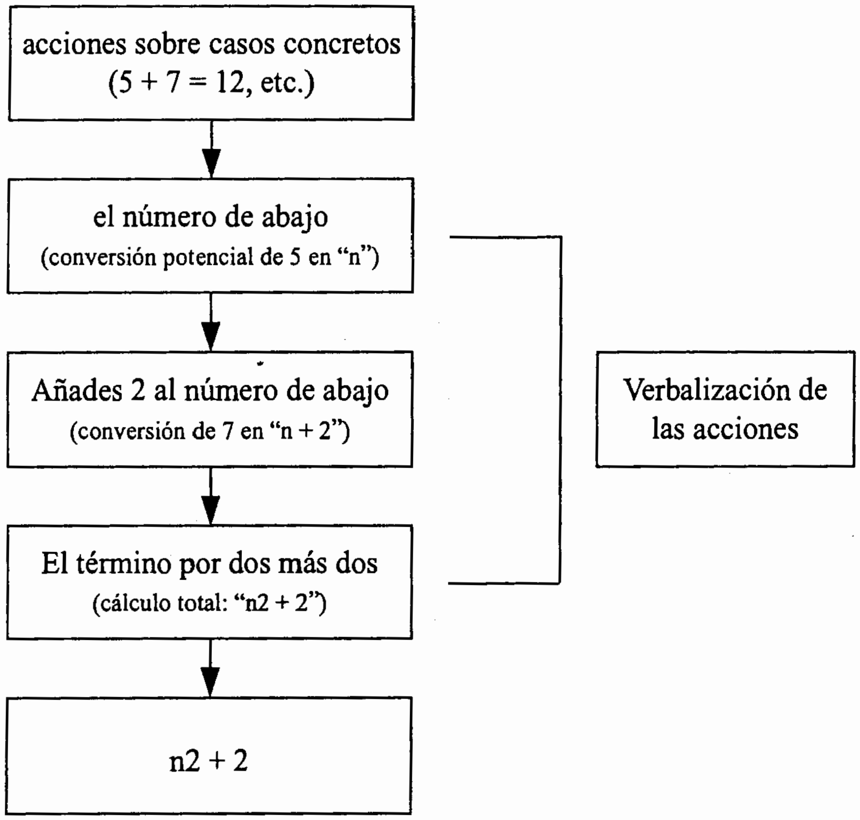


Diagrama representando, en forma de superposición,
el estructura del esquema de generalización.

Este episodio no desentraña la complejidad de los sistemas semióticos presentes, pero sugiere cómo estos se van entremezclando en el curso del diálogo, desde la partición de la figura en dos filas (superior e inferior) que permite el lápiz, visto aquí como artefacto cultural y herramienta sicológica de investigación del problema, y que viene a funcionar un poco como los palos en los experimentos de Köhler, hasta la producción de la fórmula "n2+2" que escriben al final los alumnos (fórmula que está ya cerca de la expresión matemática deseada: 2n + 2) y que aparece como instancia de internalización de las acciones que componen la actividad del problema, algunas de las cuales remonta probablemente a los primeros años de escolarización de nuestros alumnos. Notemos a este respecto que, como sugirió Leontiev, tomamos interiorización como un proceso constructivo en el que el plano de interiorización resulta ser formado (Leontiev 1981) y no como un puente o un canal que liga dos planos formados *previamente*, uno interno y otro externo, como podría verse desde una perspectiva idealista. Y añadimos que la internalización permanece esencialmente un proceso exterior en la medida en que, como Voloshinov nos permite concebirlo, el plano interno es un plano en la intersección del exterior e interior del individuo biológico, esto es, un plano en el que su actividad discursiva interna (o mental) queda anclada en su actividad externa semiótica-discursiva.

Dentro de esta perspectiva, hemos sugerido que el pensamiento no es *acarreado* o *vestido* por signos. Al contrario, el pensamiento –conviene insistir– ocurre y existe solamente *en* y *a través* de signos.

Dedicatoria

Quisiera, para terminar, dedicar este artículo a un amigo cuyas penetrantes discusiones fueron siempre un manantial de inspiración para mí. Desde la calle del General Zimmer, durante las caminatas de fin de semana, en las heladas tardes de invierno o en las calurosas noches de verano, se podía ver claramente que su ventana era la única iluminada en ese austero edificio del IREM de Strasbourg en donde ambos cursábamos nuestros estudios de doctorado. Y es que Jesús Alarcón, o Papini, como lo llamábamos, nunca paraba de trabajar. Papini se había instalado en su oficina en donde pasaba más tiempo que el mismo conserje que vivía en el edificio. Recuerdo que más de una vez Raymon Duval interrumpió nuestra cita de principios de tarde para ir a ver si Papini se había recordado de ir a comer. La última vez que vi al "Maestro" -como lo solía llamar nuestro profesor Georges Glaeser- fue en Morelia, México, en 1997, durante la 11a Reunión Latinoamericana de Educación Matemática. Luego de encontrar un lugar tranquilo donde nos refugiamos para comer y discutir, Papini empezó a comentar un artículo que yo había publicado dos años antes. No era solamente la fineza y la profundidad de sus comentarios lo que me impresionó (pues aquellos que tuvimos la suerte de conocerlo estabamos acostumbrados a ello) sino constatar que recordaba el artículo mejor que yo mismo. Al ida siguiente el Maestro me honró con su presencia en la conferencia que yo debía dar. La conferencia representaba, para mí, un giro respecto a la escuela de pensamiento en que ambos habíamos sido formados a principios de los años 80 y yo estaba impaciente por escuchar su opinión. En la tarde, luego de buscarlo en vano, supe que había tenido que volverse al Distrito Federal de emergencia, por problemas de salud. Que este artículo sea un modesto homenaje a su memoria.

Referencias bibliográficas

Atkinson, P. and Hammersley, M. (1994) Ethnography and Participant Observation, in: N. Denzin and Y. Lincoln (eds.) *Handbook of Qualitative Research*, Thousand Oaks, London, New Delhi: Sage, 248-261.

Baldwin, J. M. (1911) *The Individual and Society, or Psychology and Sociology*, Boston: The Gorham Press.

Bartolini Bussi, M. G. (1995) Analysis of Classroom Interaction Discourse from a Vygotskian Perspective, *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, L. Meira and D. Carraher (eds.) Universidade Federal de Pernambuco, Brazil, **1**, 95-98.

Bateson, G. (1973) *Steps to an Ecology of Mind*, Frogmore: Paladin.

Bauersfeld, H. (1995) "Languages Games" in the Mathematical Classroom: Their Function and Their Effects, in: P. Cobb & H. Bauersfeld (eds.) *The Emergence of Mathematical Meaning, Interaction in Classroom Cultures*, Hillsdale, New Jersey: Erlbaum Associates.

Baxandall, M. (1971) *Giotto and the Orators*, Oxford : Clarendon Press.

Berger, P. L., Luckmann, Th. (1967) *The social Construction of Reality*, New York/London/Toronto/Sidney/Auckland: Anchor Book.

Clement, J., Lochhead, J. & Monk, G. (1981) Translation Difficulties in Learning Mathematics, *American Mathematical Monthly*, **88**, 286-289.

Coulthard, M. (1977) *An Introduction to Discourse Analysis*, London: Longman.

Derrida, J. (1976) *Of Grammatology*, Baltimore and London : The Johns Hopkins University Press.

Duval, R. (1995) *Sémoisis et pensée humaine*, Bern : Lang.

Edwards, D. (1997) *Discourse and Cognition*, London/Thousand Oaks/New Delhi : Sage.

Fairclough, N. (1995) *Critical Discourse Analysis*, London and New York: Longman.

Feyerabend, P. (1979) Contre la méthode. Esquisse d'une théorie anarchiste de la connaissance. Paris: Seuil.

Feyerabend, P. (1989) *Adieu la raison*, Paris: Éditions du Seuil.

Filloy, E., Rojano, T. (1989) Solving Equations: the Transition from Arithmetic to Algebra, *For the Learning of Mathematics*, Vol 9, No. 2, pp. 19-25.

Foucault, M. (1966) *Les mots et les choses*, Paris: Éditions Gallimard.

Frege, G. (1971) *Écrits logiques et philosophiques*, Paris: Éditions du Seuil.

Gallardo, A. et Rojano, T. (1988). Areas de dificultad en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 9, No. 2, 155-188.

Geertz, C. (1973) *The Interpretation of Cultures*, New York: Basic Books.

Goldin-Meadow, S. (1993) When does gesture become language? A study of gesture used as a primary communication system by deaf children of hearing parents, in: *Tools, Language and Cognition in Human Development*, K. R. Gibson and T. Ingold (eds.), Cambridge: Cambridge University Press, 63-85.

Greeno, J. G. (1989) A perspective on Thinking, *American Psychologist*, 44 (2), 131-141.

Ilyenkov, E. V. (1977) *Dialectical Logic*, Moscow: Progress Publishers.

Kozulin, A. (1990) *Vygotsky's Psychology*, Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Kendon, A. (1993) Human gesture, in: *Tools, Language and Cognition in Human Development*, K. R. Gibson and T. Ingold (eds.), Cambridge: Cambridge University Press, 43-62.

Köhler, W. (1951) *The Mentality of Apes*, New York: The Humanities Press / London: Routledge & Kegan Paul.

Laborde, C., Puig, L., Nunes, T. (1996) Language in Mathematics Education, *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Luis Puig and Ángel Gutiérrez (eds.), University of Valencia, Valencia, Spain, Vol. 1, 53-84

Latour, B., Woolgar, S. (1979) *Laboratory Life: The Social Construction of Scientific Facts*, Beverly Hills/London: Sage Publications.

Leontiev, A. N. (1981) The Problem of Activity in Psychology, in: *The concept of activity in Soviet Psychology*, translated and edited by J. V. Wertsch, New York: M. E. Sharpe, 37-71.

Leontiev, A. N. (1984) Activité, Conscience, personalité, Moscou: Éditions du Progrès.

Leroi-Gourhan, A. (1964) *Le geste et la parole*, Paris: Albin Michel.

Matz, M. (1980) Towards a Computational Theory of Algebraic Competence, *Journal of Mathematical Behavior*, 3, 93-166.

McLeod, D. (1989) The Role of Affect in Mathematical Problem Solving, dans: *Affect and Mathematical Problem Solving*, D. McLeod and V. M. Adams, eds., New York, Berlin, etc.: Springer Verlag, 21-36.

Moerman, M. (1988) *Talking Culture, Ethnography and Conversational Analysis*, Philadelphia: University of Pennsylvania Press.

Mikhailov, F. T. (1980) *The Riddle of the Self*, Moscow: Progress Publishers.

Piaget, J. et Inhelder, B. (1966) *L'image mentale chez l'enfant*, Paris : Presses Universitaires de France.

Radford, L. (1996) Some Reflections on Teaching Algebra Through Generalization, .in: *Approaches to Algebra: perspectives for research and teaching*, N. Bednarz, C. Kieran and L. Lee (eds.), Dordrecht /Boston/ London: Kluwer, 107-111.

Radford, L. (1998a) *On Culture and Mind, a post-Vygotskian Semiotic Perspective,* *with an Example from Greek Mathematical Thought*, paper presented at the 23rd Annual Meeting of the Semiotic Society of America, Victoria College, University of Toronto, October 15-18, 1998.

Radford, L. (1998b) On Signs and Representations. A Cultural Account, *Scientia Pedagogica Experimentalis*, Vol. 35 (1), 277-302

Radford, L. (1999) *The Rhetoric of Generalization. A Cultural, Semiotic Approach to Students' Processes of Symbolizing, Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Haifa, Technion-Israel Institute of Technology, Vol. 4, 89-96.

Solomon, Y. (1989) *The practice of mathematics*, London: Routledge.

Tikhomirov, O. K., Vinogradov, Ye. E. (1970) Emotions in the Function of Heuristics, *Soviet Psychology*, **3** (4), 198-223.

V.-David, M. (1965) *Le débat sur les écritures et l'hiéroglyphe aux XVII^e et XVIII^e siècles*, Paris: Bibliothèque Générale de l'École Pratique des Hautes Études.

Van der Veer, R. (1996) The concept of culture in Vygotsky's Thinking, *Culture and Psychology*, **2**, 247-263.

Van der Veer, R. and Valsiner, J. (1991) *Understanding Vygotsky*, Oxford Uk and Cambridge USA: Blackwell.

Voigt, J. (1985) Patterns and routines in classroom interaction, Recherches en Didactique des Mathématiques, **6** (1), 69-118.

Voigt, J. (1989) The Social Constitution of the Mathematics Province—A Microethnographical Study in Classroom Interaction, *The Quarterly Newsletter of the Laboratory of Comparative Human Cognition*, **11** (1&2),27-34.

Voigt, J. (1995) Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms, in: P. Cobb & H. Bauersfeld (eds.) *The Emergence of Mathematical Meaning, Interaction in Classroom Cultures*, Hillsdale, New Jersey: Erlbaum Associates.

Voloshinov, V. N. (1973) *Marxism and the Philosophy of Language*, Cambridge Massachusetts and London, England: Harvard University Press.

Vygotsky, L. S. (1978) *Mind in Society*, Cambridge, Ma / London, England: Harvard University Press.

Vygotsky, L. S. (1997a) *Collected Works*, Edited by R. Rieber and J. Wollock, New York and London : Plenum Press, Vol. 3.

Vygotsky, L. S. (1997b) *Collected Works*, Edited by R. Rieber , New York and London : Plenum Press, Vol. 4.

Vygotsky, L. S. (1998) *Collected Works*, Edited by R. Rieber , New York and London : Plenum Press, Vol. 5.

Vygotsky, L. and Luria, A. (1994) Tool and symbol in child development, in: *The Vygotsky Reader*, R. van der Veer and J. Valsiner (eds.), Oxford: Blackwell Publishers.

Wertsch, J. V. (1991) *Voices of the Mind. A Sociocultural Approach to Mediate Action*, Cambridge, Ma.: Harvard University Press.

Wertsch, J. V. (1998) *Mind as Action*, New York and Oxford : Oxford University Press.

White, L. A. (1942) On the use of tools by primates, *Journal of Comparative Psychology*, **20**, 369-374.

Wittgenstein, L. (1967) *Philosophical investigations*, Oxford : Blackwell. Leont'ev, A. N. (1981) The Problem of Activity in Psychology, in: *The concept of activity in Soviet Psychology,* translated and edited by J. V. Wertsch, New York: M. E. Sharpe, 37-71.

Zinchenko, V. P. (1985) Vygotsky's ideas about units for the analysis of mind, in: *Culture, communication and cognition: Vygotskian perspectives*, J. V. Wertsch (ed.), Cambridge University Press, pp. 94-118.

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

Educación Matemática Vol. 11 No. 3 Diciembre 1999 pp. 54-68

Acerca de las dificultades que tienen los profesores de secundaria para visualizar y representar objetos tridimensionales

Fecha de recepción: Marzo, 1998

Nicolina A. Malara
Universidad de Modena, Departamento de Matemáticas
Modena, Italia
malara@mail.unimo.it

Resumen: *El trabajo involucra reacciones y dificultades de los profesores de secundaria ante actividades innovadoras de geometría tridimensional, que exigen la visualización de los efectos que producen ciertos giros sobre objetos sólidos, bajo diversos ángulos, con el fin de ser representados en papel isométrico.*

Abstract: *The paper concems reactions and difficulties met by tea,chers of middle school involved in innovative activities of 3D Geometry, which requiere the ability to visualize the effects of some shiftings of solids or to evoke the vision of objects from particular points of view for their representation on isometric paper.*

Introducción

El presente trabajo se basa en el análisis del tema: geometría del proyecto inglés para la enseñanza de las matemáticas a alumnos de 11 a 16 años "NMP Mathematics for Secondary-School" que realizamos en ocasión de la actividad escolar ministerial para profesores-investigadores, que tuvo lugar en Viareggio en noviembre de 1995 y febrero de 1996.

El análisis del proyecto había sacado a la luz, más allá de las diferencias metodológicas de su ámbito, una profunda divergencia con respecto a nuestra noción del concepto de geometría. En particular, se había hecho evidente el gran espacio que se destina al estudio de los cuerpos sólidos, mismo que se aborda desde la primera clase mediante actividades de diverso tipo. La propuesta mencionada se realizó mediante fichas de trabajo, que resultaron atractivas e inusuales para la enseñanza tradicional y, en nuestra opinión, muy útiles para la superación de la imagen común de la geometría sólida, limitada al cálculo de áreas y volúmenes (se reproducen amplias selecciones de dichas propuestas en Pressi 1996 y Cagnolati 1997).

Para promover que los profesores que siguen las actividades de nuestro grupo conozcan tales propuestas, se ha organizado un seminario de estudio 2 en el que, tras una presentación grosso modo de la tradición de la geometría en dicho proyecto, se abordó el análisis puntual de la propuesta de actividades de geometría sólida, independientemente de las cuestiones de medida.

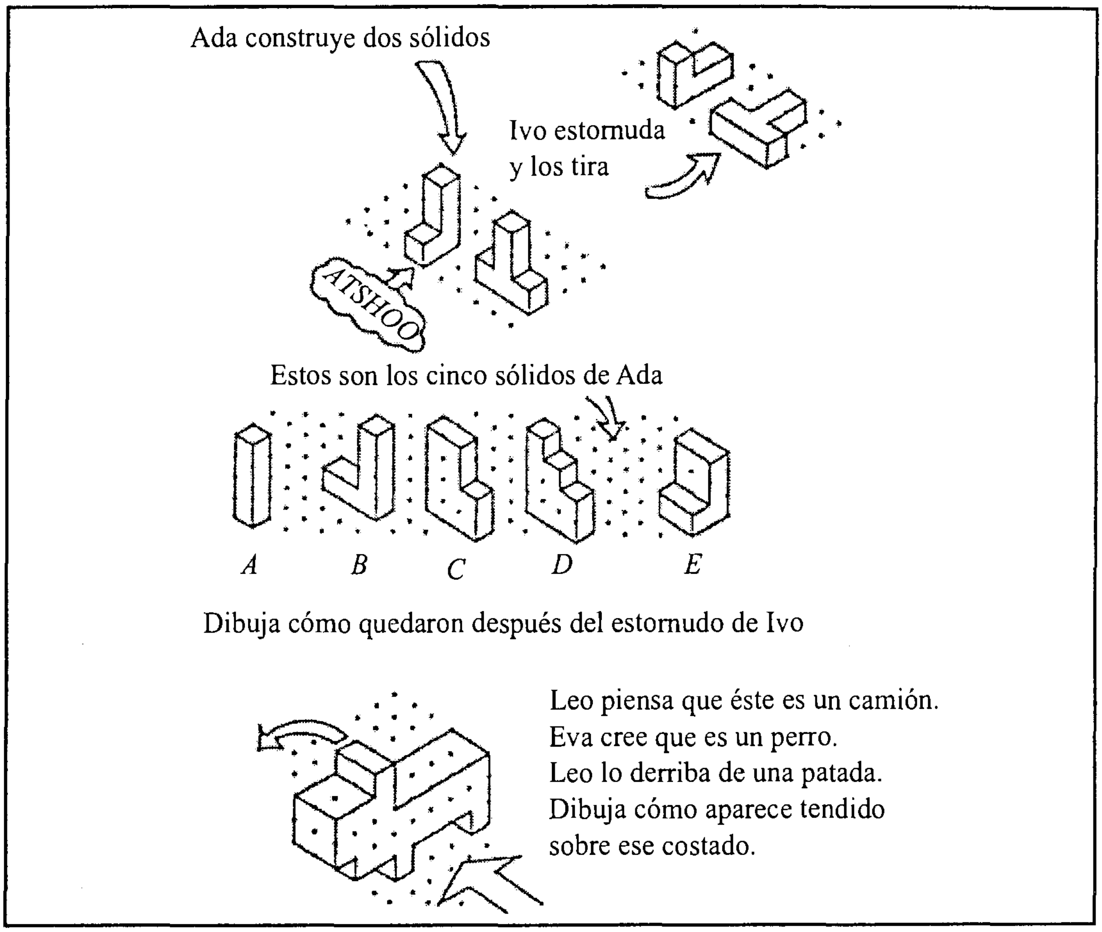
[1] Trabajo realizado en el marco del MURST 40% y del CNR (contrato n. 96.0019 I.CTO 1)

[2] Los participantes fueron: Loredana Gherpelli, Giovanna Grasso, Deanna mantonvani, Paola Negro, Deanna Pellacani, Maria Clete Spadoni, Raffaella Suffritti, Anna Venturini, Giancarlo Navarra y Tino Capone. Todos son profesores de secundaria menos Tino Capone.

Tal propuesta involucra, más allá de la construcción efectiva de objetos:

1) Observación y descripción de sólidos
2) Descomposición y recomposición de sólidos, representación y clasificación de desarrollos relacionados
3) Visualización y representación de sólidos desde diferentes perspectivas
4) Secciones de sólidos -incluso de contorno curvo- según planos no necesariamente verticales u horizontales.

Cuadro 1
Representación de sólidos en posición diferente a la inicial



Independientemente del interés de los participantes del seminario, el estudio de estas propuestas didácticas suscitó cierta confusión entre ellos, sea por la dificultad de prever la introducción de alguna de dichas propuestas en la programación, o debido a la hipotética dificultad de los alumnos para realizar la tarea, incluso en el nivel escolar para el cual fueron concebidas.

A fin de evaluar mejor la factibilidad y utilidad de tales propuestas -que tienen a menudo un caracter operativo y carecen de adecuado soporte[3]- se ha procedido a su efectiva ejecución. Ello ha puesto en evidencia una notable dificultad en su elaboración por parte de los participantes,

[3] Por ejemplo, es frecuente el uso del papel isométrico reportado en el apéndice, tan adecuada para representar objetos sólidos, dado que facilita la representación de la largura, el paralelismo, la perpendicularidad, etc.

además de que implica una toma de conciencia más apropiada acerca de las finalidades, dificultades y potencialidades de cada problema.

En el presente trabajo nos referimos a los resultados que recogimos a través de la experiencia emanada de ciertos problemas, enfrentada por alumnos que ingresaban a secundaria. Estos involucraban la representación de sólidos en papel isométrico, bajo ciertas condiciones, lo que exige la habilidad de visualizar la configuración del sólido en nueve posiciones distintas y desde diferentes ángulos, así como de realizar su correcta representación.

Presentaremos los problemas en cuestión, describiendo sus objetivos y dificultades a priori. Después examinaremos las producciones de los profesores, analizando los errores y las dificultades halladas -en ocasiones imprevistas e inimaginables-, y concluiremos con algunas consideraciones surgidas a partir de las discusiones acerca de la oportunidad, la modalidad y los tiempos de introducción de éstas y otras actividades de geometría sólida al proyecto. Se tienen en cuenta las respuestas y reacciones de los alumnos durante la primera experiencia y, de un modo más general, todo lo que haga posible mejorar el desempeño de los profesores en las actividades.

Los problemas planteados

Los problemas objeto del presente estudio son reportados en los cuadros 1 al 6 donde están organizados según el tipo de actividad. En el primer cuadro se presentan dos problemas en los que se pide representar algunos sólidos en una posición distinta a la inicial, obtenida por la caída del objeto en cierta dirección.

Los problemas exigen del ejecutante la capacidad de visualizar la configuración de los objetos durante la caída y fijar en la mente el efecto sobre ellos.

En el primer problema -preparatorio respecto del segundo- los cinco objetos por ser representados (en la figura: A, B, C, D, E) presentan dificultades crecientes, en particular la del sólido D es la má difícil por la presencia de una "escalerilla", y la del sólido E, por la variedad en el grosor de la base respecto de un sólido anterior.

En el segundo cuadro se reportan dos problemas que involucran la representación de objetos reflejados respecto de un espejo vertical. En el primero se pide la representación de la imagen especular de la letra J tridimensional con base en un ejemplo en el que se representa una F y su imagen especular. El segundo problema, propuesto por G. Navarra, solicita la representación de determinado objeto a partir de la representación de su imagen especular. Las dificultades para resolverlos son múltiples. En ambos existe la dificultad de visualizar los objetos por ser representados y en particular el segundo presenta la dificultad de imaginar la parte posterior del objeto reflejado que, en la representación subsecuente, viene a quedar en primer plano.

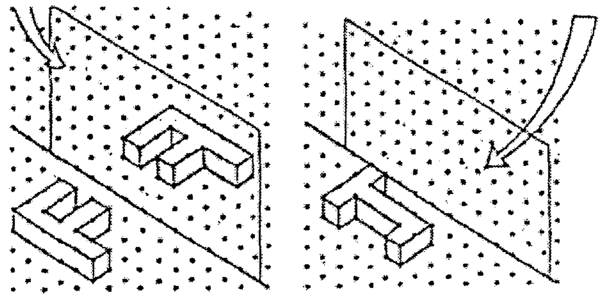
Otras dificultades se deben a la necesidad de definir los criterios de representación respecto a las caras situadas en planos paralelos y, en particular, a los obstáculos que presenta la realización de las imágenes correspondientes a los puntos de la representación del objeto, cada uno señalando puntos situados en planos diferentes del objeto original. El segundo problema involucra la ulterior dificultad de colocar la figurita de Alicia.

En el tercer cuadro se presentan dos problemas que apuntan a la conceptualización del sistema de representación. En el pide se pide completar la representación de algún sólido en el cual falta una línea que representa un tramo de la superficie externa. En el segundo se pide que se introduzcan en una figura dada líneas que constituyen el contorno de la representación de uno o más sólidos. La particularidad de éste último radica en las dos últimas figuras que pueden dar lugar a diversas representaciones. Ello exige la habilidad de imaginar los posibles sólidos que embonen en ese contorno dado.

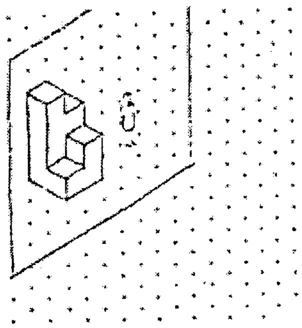
Cuadro 2

Representación de la imagen de sólidos en un espejo vertical

1. Se tiene aquí un espejo que muestra la imagen reflejada de la letra "F". Dibuja la imagen reflejada de la letra "J" en el otro espejo.



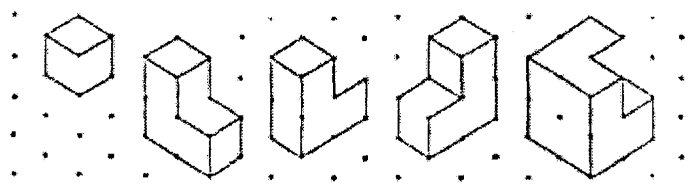
2. He aquí a Alicia "dentro" del espejo. Dibuja a Alicia y a la torre situados fuera del espejo.



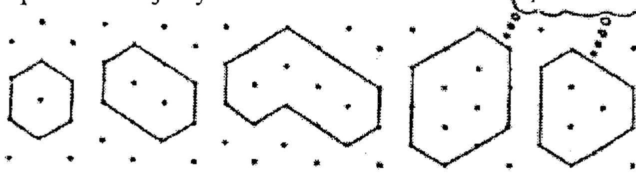
Cuadro 3

Consideración de sólidos y terminación de su representación

1. En cada uno de los croquis se omitió una línea o trazo. Copia los dibujos y traza el segmento faltante.



2. Se presentan las líneas externas de los dibujos de algunos sólidos. Copia los dibujos y traza las líneas faltantes.



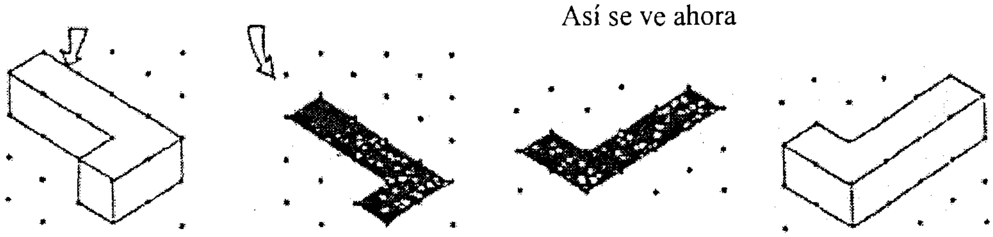
En el cuadro 4 se proponen tres problemas relacionados con la reconstrucción de las diversas representaciones de un objeto, a partir de la representación de su sombra en el plano de base, según la posición en que está apoyado. El primer problema guiado es preparatorio para los otros dos, que son más difíciles dada la irregularidad de los objetos. El reto que entraña consiste principalmente en la visualización de la configuración del objeto en el espacio, dado el cambio de posición.

Cuadro 4

Reconstrucción de la representación de sólidos a partir de su base (actividad de pase propuesta por los alumnos que ingresan a secundaria)

1. El sólido se apoya en esta base

Es levantado y colocado sobre la base
Así se ve ahora

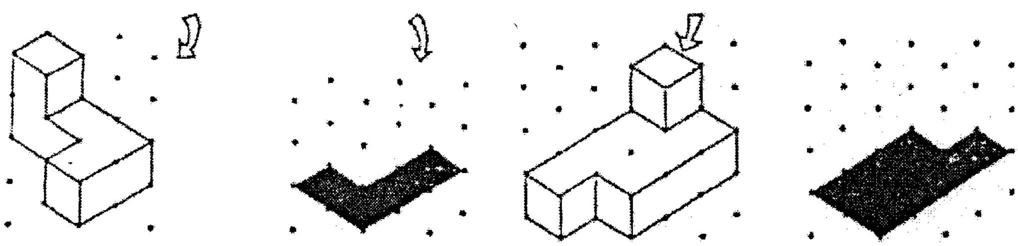


Dibuja cómo se ve sobre esta base

Cómo aparece sobre esta base

2. Dibuja el sólido como se ve sobre esta base

Dibuja esta sóido como se ve sobe esta base

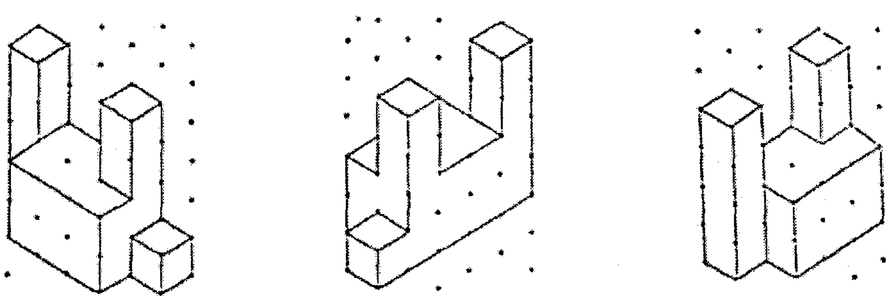


El cuadro 5 presenta un problema que exige la reconstrucción y la representación mental de de un sólido bastante complejo bajo cierta perspectiva, con base en la representación de otras tres de sus perspectivas. La principal dificultad radica en la visualización del objeto desde la perspectiva solicitada con base en la información brindada.

Cuadro 5

Reconstrucción mental y representación de la visión de un objeto desde una perspectiva dada

He aquí una perspectiva de una planta eléctrica. Dibújala vista desde el sur.

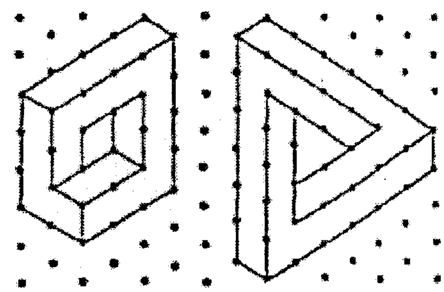


En el cuadro 6 se reporta un problema en el que se pide concebir y representar objetos imposibles a partir de dos ejemplos dados. Ello, más allá de gran creatividad, requiere la comprensión de las reglas de representación en la carta isométrica y la oportuna violación a tales reglas a fin de hacer una representación inadecuada en la que se haga evidente el conflicto entre su coherencia local y su coherencia global.

Cuadro 6

Te invito a construir objetos imposibles

Eva le pide a Leo que construya estos sólidos. Leo dice que es fácil.



Dibuja otras figuras imposibles que Eva podría pedirle a leo que hiciera.

Las producciones de los profesores.

Ilustramos aquí las producciones y los comportamientos de los profesores en tomo a diversas pruebas.

Antes que nada hay que subrayar que, no obstante las recomendaciones que se les hicieron en el sentido de registrar la secuencia de soluciones tentativas, las producciones presentadas -al menos inicialmente- no son las inmediatas sino algunas son el resultado de largo trabajo de reflexión y ajuste de tentativas fallidas o del fatigante esfuerzo por superar dificultades iniciales. En términos generales se percibe en los profesores renuencia a reconocer tales dificultades y mostrar sus soluciones tentativas (algunos incluso desde el inicio se niegan a entregar sus elaboraciones y prometen hacerlo más adelante). Sólo después de algunas sesiones de trabajo, durante el intercambio de reflexiones tocante a estas actividades, los profesores conflezan con relativa espontaneidad sus intentos fallidos y el largo tiempo dedicado a resolver los problemas.

De los resportes de los profesores acerca de la experiencia y las pruebas consideradas -algunos reportados en el cuadro 7- se extraen las siguientes dificultades generales:

- integrar en un todo las visiones parciales de un objeto que debe de representarse en una posición diferente a la inicial, dada la prevalencia de sus partes visibles sobre las ocultas en dicha representación.
- hacer una observación global y fijar en la mente el objeto en la posición o ángulo solicitado en la representación.
- visualizar un objeto desde uno de los cuatro puntos cardinales, a partir de lo que sería su representación desde los otros tres;
- controlar la corrección de las propias producciones y conceptualizar los criterior de representación (las reglas operativas no son explícitas sino que van siendo descubiertas paulatinamente a través de la actividad).

El descubrimiento de sus dificultades, lleva a los profesores a proponer como actividad propedéutica para los alumnos -en caso de que se realicen tales actividades en clase- la construcción real de sólidos, la observación efectiva de sus posiciones desde distintas perspectivas al caer en diferentes direcciones, así como el uso anticipado de la carta isométrica para representarlos.

Abordamos ahora los detalles del trabajo desarrollado, al analizar las respuestas, producciones y reacciones de los profesores en relación a cada una de las pruebas.

En lo concerniente al primer problema que se reporta en el cuadro 1, los profesores trabajan con mucha seguridad. Apenas algunos enfrentan ciertas dificultades con el sólido D porque en la representación del sólido caído hay unos puntos (los vértices de los peldaños de la escalerilla) que señalan los dos puntos que se encuentran en planos distintos y, además, porque ciertos segmentos paralelos (las aristas de los peldaños) caen sobre la misma recta en la representación.

Cuadro 7

Observaciones de algunos profesores después de la realización de las pruebas

RS: La representación de los sólidos me pareció muy sencilla de reproducir cuando era clara la superficie de apoyo: lo primero que hice fue trazar la base, después tracé la alturas relativas de cada vértice y los uní respetando los niveles. Se me hizo más difícil reproducir los sólidos reflejados ya que al principio no calculé correctamente su distancia respecto al plano de isometría. De hecho me pareció a la larga que es necesario partir desde el vértice más bajo para calcular la distancia. Más adelante representé el sólido partiendo de este vértice y representando en primer lugar la superficie de apoyo, respetando la simetría y trazando la altura. Al representar los sólidos a partir de una una base dada, la dificultad radicó en imaginar los sólidos y las diversas sobreposiciones de los cubos. Cuando el sólido no era complicado, era posible realizar el ejercicio en poco tiempo. Fue más difícil representar la planta de energía desde la perspectiva de un punto cardinal. De hecho se debía imaginar el punto de observación y lo que se podía ver desde ese punto.

GG: Fue divertido realizar los ejercicios que eran para los chicos. Los adultos tienen incorporados modelos estereotipados muy diferentes de los propuestos en estos ejercicios. Abordé algunos de los más sencillos con cierta tranquilidad, con un poco de imaginación y con un sentido práctico en las construcciones geométricas. Mas, al complicarse la figura que se tenía que evocar desde una perspectiva diferente, no bastaba la imaginación. Tampoco se trataba de tener práctica para evocar e imaginar un objeto visto desde otra perspectiva y visualizar la cara oculta. También resultaba difícil tomar una parte de la figura como referencia. Después de unos ejercicios las cosas mejoraron y pude abordar los subsecuentes ejercicios con más soltura.

DM: Está el problema de desentrafiar las reglas de representación que no se expresan mediante códigos fijos sino se buscan a través de modelos interiores que no pueden ser expresados verbal ni numéricamente. En ocasiones, tales modelos interiores no se encuentran expeditamente por lo que resulta difícil tener una intuición adecuada. Personalmente reconozco mi dificultad para orientarme; de hecho, mi mayor desafío fue el hacer la representación espacial del objeto, según los puntos cardinales; dificultad que no encuentro tratándose de figuras planas. A veces, cuando no se tiene la intuición adecuada basta pasar a otro tema (como cuando no se recuerda un nombre) y al volver sobre los pasos viene la intuición.

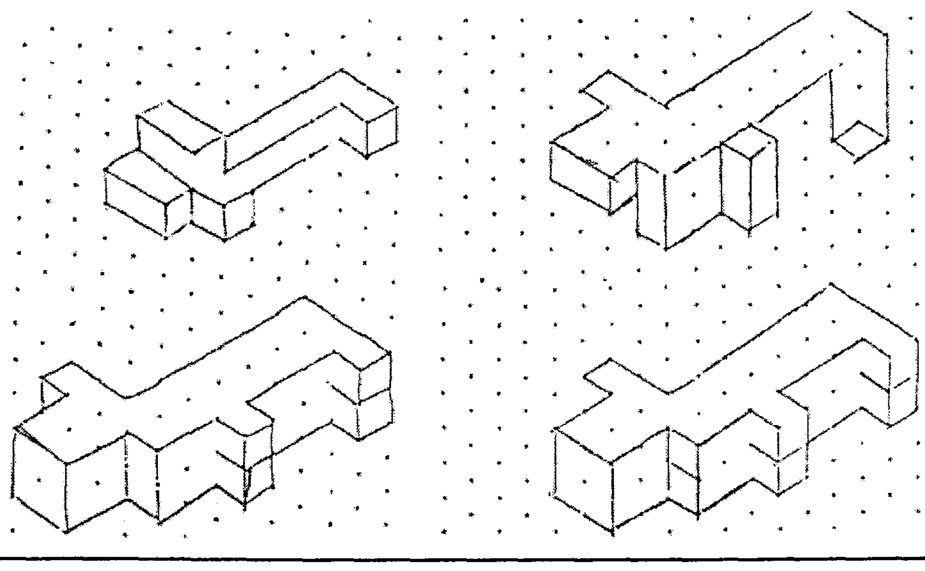
MS: En lo concerniente a la visión espacial puedo hacer la distinción entre una fase analítica y una sintética. En la analítica resulta difícil controlar las relaciones espaciales entre los elementos de la figura y las propiedades mesurables de dichos elementos. Es preciso, por lo demás, ubicar en la representación un punto de partida a partir del cual se manejen las relaciones espaciales, como analogía de la situación de partida. Sin embargo es preciso tener en cuenta que aun teniendo presentes los conceptos de la transformación (cuya figura tenemos en mente), se pierde el hilo de la secuencia operativa si la atención disminuye. Se puede reconocer una fase sintética (cuya figura tenemos en mente), con todo, la persistencia de la imagen mental se pierde durante la fase operativa de la actividad.

Los participantes también revelan cierta dificultad en la representación de E, por la mayor elevación de la base respecto del resto del sólido. Estas dificultades se relacionan con la falta de familiaridad en el uso del papel isométrico, al grado de que para unos la misma representa mayor dificultad que el papel blanco (idea que es totalmente erradicada al avanzar la actividad). En cambio, el segundo problema se presenta difícil de inmediato: algunos profesores declaran su absoluta incapacidad para visualizar la posición del perro ya caído; otros se quejan de no tener sino una visión fragmentada o "pedazos aislados". Otros directamente se bloquean ante la instrucción.

La estrategia general al abordar la representación es el ensayo y error. Tras el uso inicial de papel blanco se vuelcan hacia el papel isométrico al reconocer las ventajas que ofrece al facilitar la conservacion de las longitudes y las líneas paralelas. En la siguiente sesión, los profesores entregan sus trabajos de representación que generalmente resultan correctos, aunque hay en ellos claras evidencias de reelaboración y corrección. El trabajo de una de ellas, reportado en el cuadro 8, proporciona de alguna manera ejemplos de las tentativas en que incurrió y de cómo intentó primero trazar el contorno del perro en el plano horizontal para después representar la justa dimensión de su anchura. (Dicha estrategia será la que comunmente adopten más tarde los alumnos que realizan la prueba).

Cuadro 8

Tentativas de solución por parte de una profesora para el problema 2 del cuadro 1



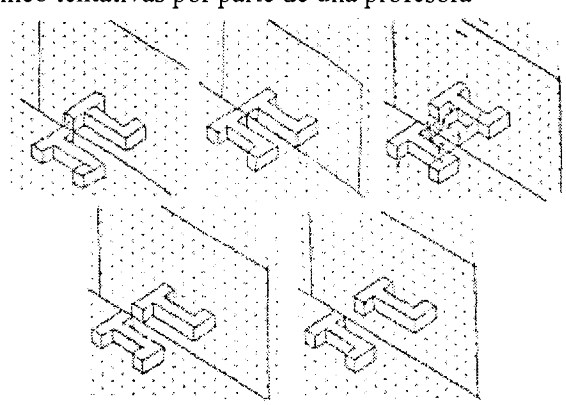
Durante la discusión grupal sobre sus trabajos y las dificultades hayadas, la no conservación de la anchura se reconoce como un error recurrente (la mayoría la consideran inicialmente como un cuadrito, otros incluso tres). Todos concuerdan en la dificultad para producir una visualización global de la imagen que se va a reproducir y, sobre todo, de mantenerla constante. Esto los lleva a abandonar la estrategia de recorrer la imagen mental global a fin de representarla, a favor de una estrategia "local" en la que se va desarrollando la representación mediante la visualización solo de la parte analizada. Entre los profesores, sólo dos de ellos se proponen idear una estrategia racional enfocando la atención en las propiedades de ciertos aspectos de la figura (por ejemplo, el paralelismo, la perpendicularidad, la distancia, etc.) y en la manera como se pueden traducir tales relaciones en la representación, a fin de continuar trazándola correctamente.

Los problemas reportados en el cuadro 2, relacionados a la reproducción de las imágenes a través de un espejo vertical, resultan particularmente dificiles, sobre todo el primero, no tanto por la configuración del sólido sino por su colocación respecto al espejo. Como lo muestran los protocolos del cuadro 9, el procedimiento aún es el ensayo y error, en que prevalece la idea inicial de reconstruir la imagen global de la figura, sin controlar la equidistancia real de puntos clave respecto del espejo y de algunos de los planos a los que pertenecen. Se logra resolver el problema cuando se reflexiona sobre la existencia de un punto único, en la "F que se va a reproducir, que representa dos puntos distintos: uno perteneciente al plano de base y que dista del espejo un cuadrito, y otro que pertenece al plano superior y equidista del espejo dos cuadritos.

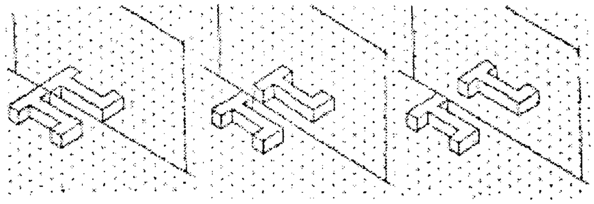
Cuadro 9

Producciones de los profesores en relación a la imagen especular de la "J"

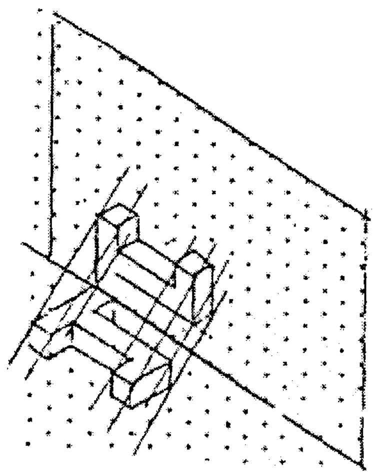
La realización de cinco tentativas por parte de una profesora



La realización de tres tentativas por parte de otra profesora



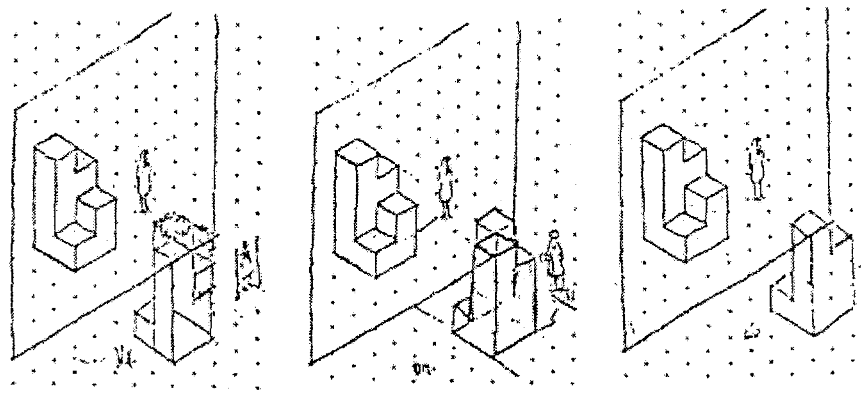
También en este caso son bien sucedidos los profesores que utilizan la estrategia de representar primero la imagen de puntos que pertenecen al plano de base y después la de los que pertenecen al plano paralelo, a un cuadrito de altura. Entre las producciones, hay una que destaca pues reproduce en el espejo una imagen "enderezada" de la "J", vertical así como horizontal (Ver la figura abajo). Ello asombra a todos, incluso por la convicción de la profesora de haberlo hecho bien. Aquí, el error -inicialmente velado- se torna claro al encontrar la misma imagen entre las producciones de los alumnos. Tras un análisis más minucioso, se percibe que en este caso se está tratando la figura como si fuese plana, y su *correspondiente* es elaborado respecto a la simetría plana, con su eje en el trazo del espejo sobre el plano de base. Efectivamente, al realizar el simétrico de cada punto de la "J" -destacado en el plano isométrico- de acuerdo a las reglas y uniendo los puntos, se obtiene la misma "J" enderezada. El error radica, pues, en una concepción profundamente equivocada: la asimilación a una simetría axial plana, de una simetría en el espacio respecto a un plano vertical.



El segundo problema del cuadro 2, que como ya se dijo fue ideado por G. Navarra, resulta más fácil ya sea por la experiencia adquirida, o por la menor complejidad de la imagen, independientemente de la complejidad del objeto y de la porción oculta que se desee representar. La única dificultad -imprevista por otro lado- resulta ser la colocación de la figurita de Alicia: una profesora afirma que "Alicia está fuera del espejo" y por eso no la representa. Otros errores se refieren al desfasamiento del objeto respecto a la imagen (no se respetan las alineaciones

Cuadro 10

Producciones incorrectas de los profesores de la prueba "Alicia y el castillo"



entre puntos correspondientes) y la altura equivocada del sólido. En el cuadro 10 aparecen consideraciones que dan cuenta de ello. Es de subrayar que nadie considera el hecho de que el sólido pueda presentarse por atrás con diversas configuraciones, ocultas en la representación dada.

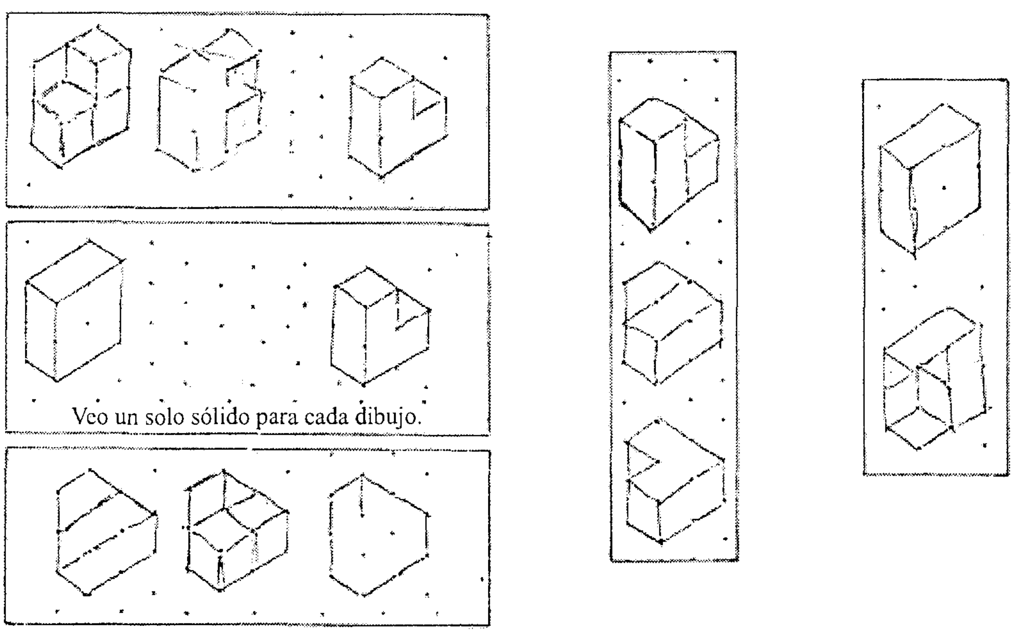
De los problemas del cuadro 3, el más interesante desde el punto de vista de la producción es el segundo. Su solución exige completar con las líneas faltantes la representación del sólido del cual se proporciona el contorno, y es preciso que en los dos últimos casos pueda tratarse de más de un sólido. La dificultad del ejercicio radica en tener que imaginar uno o más sólidos, incluso en una postura no convencional, de manera que su representación se apegue al contorno dado. No todos los profesores responden; algunos afirman no lograr ver ningún sólido que se corresponda con la última figura; otros declaran ver uno solo.

En el cuadro 11 se reportan algunas producciones de profesores, seguidas de algunas producciones -más originales y complejas- de los alumnos de primer grado de secundaria. En relación a los problemas del cuadro 4, podemos simplemente decir que resultaron fáciles y de rápida solución. Se caracterizaron principalmente por ofrecer a los alumnos la oportunidad de constatar que distintos sólidos pueden proyectar la misma sombra en el plano.

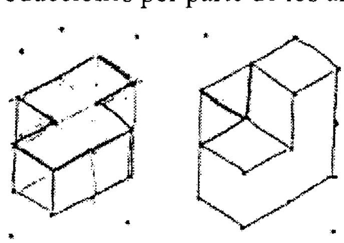
Cuadro 11

Producciones de profesores en relación al problema 2 del cuadro 3

En cada recuadro se muestran las producciones de un profesor de secundaria



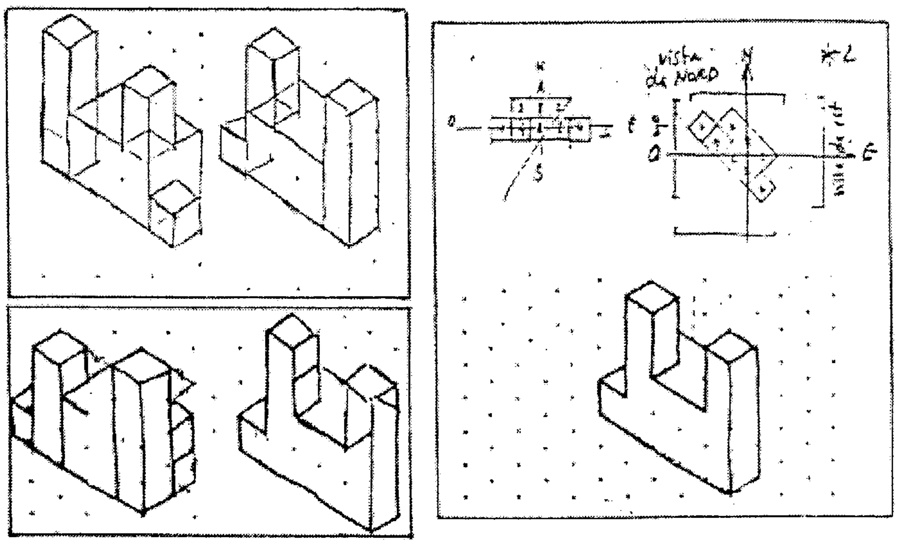
Otras producciones por parte de los alumnos.



Los problemas del cuadro 5 y 6 son definitivamente los más difíciles. No todos logran hacer el cinco y algunos lo consideran fuera del alcance de alumnos de 2o de secundaria por la referencia explícita a los puntos cardinales que, a decir de ellos, no son dominados por los alumnos de esa edad; asimismo por la dificultad ulterior para coordinar entre ellos, tres distintas representaciones con el fin de brindar una solución. Para estudiar mejor la situación, un profesor siente la necesidad de recurrir a una representación más, utilizando la planta colocada a su vez como referencia de los puntos cardinales. Las pocas producciones que hubo son reportadas en el cuadro 12.

Cuadro 12

En cada cuadro se reportan las producciones de un profesor de secundaria



El problema del cuadro 6 sólo fue realizado por dos profesores particularmente hábiles en visualización mental y patrones de criterios de representación en el plano isométrico; otros dos profesores se basan en eso y uno en particular produce con bastante empeno diversas tentativas infructuosas. Dichas producciones se reportan en el cuadro 14.

Comentarios finales

A lo largo del seminario la actitud de los profesores se fue modificando. Tras haber quedado inicialmente perplejos ante la posibilidad de inserir tales actividades en su programación, el haber ejecutado ellos mismos las pruebas y haber efectuado una confrontación oportuna y analítica de las dificultades que presentan y de sus posibilidades, los profesores adquirieron una nueva conciencia que los ha llevado a proponer algunas de estas actividades en clase (precisamente las del cuadro 1-4), si bien, lo hicieron de manera ingenua y no rigurosamente asimilada a su programación. Han administrado las pruebas tanto en primero como en segundo y tercero de secundaria.

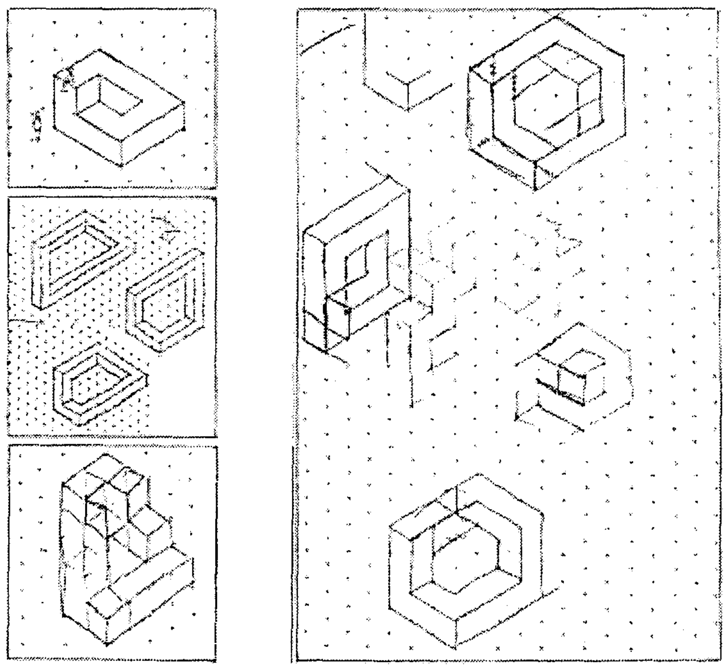
En términos generales, las dificultades que mostraron los profesores son las mismas que presentaron los alumnos. Con todo, más allá de los resultados obtenidos por los alumnos, cabe resaltar que:

- mostraron mayor flexibilidad los alumnos que los profesores y, en particular, dieron mejor respuesta a los problemas de indagación
- los alumnos mostraron mucho agrado y facilidad para involucrarse con este tipo de actividades
- los alumnos mostraron individuación y apreciación de la validez de las actividades (al respecto véase el cuadro 13)

Cuadro 13

Tentativas para representar "objetos, imposibles"

En cada cuadro se muestran las producciones de un profesor de secundaria



En los profesores, sin embargo, surgió la clara necesidad de seguir ponderando las cosas, con visos a perfeccionar un programa trienal en el cual insertar las pro-puestas analizadas, pero tomando en cuenta las particularidades de nuestros programas y objetivos de enseñanza. Algunos profesores consideraron más adecuadas dentro del ámbito de la educación técnica algunas interesantes propuestas, como por ejemplo las que se dedican al estudio de la representación de un objeto en el plano horizontal y vertical desde los cuatro puntos cardinales.

Cuadro 14

Observaciones emitidas por los alumnos de tercero de secundaria respecto a la finalidad de las pruebas (clase de L. Gherpelli)

Respuestas de los alumnos a la pregunta del profesor:
¿Cuáles, en su opinión, son los objetivos de la actividad desarrollada?

Ferrari: Tener un aspecto de los sólidos en todas las posiciones e inclinaciones, usando la imaginación. Objetivo: Tener una mente más libre, capaz de mover un objeto y reproducirlo usando la imaginación.

Cappellani: Enseñarle a los chicos cómo se construyen todos los sólidos, cómo se representan

Montorsi: Tener la capacidad de imaginar

Gobatola: Usar la imaginación para que ésta se desarrolle

Leonelli: Ver cómo nos la arreglamos para dibujar los sólidos sobre un nuevo tipo de papel punteado

Rubicando: Hacer que los chicos entiendan cómo se construyen, de qué forma son las cosas que vemos; enseñarle a los chicos a construir sólidos

Campana: Hacemos razonar acerca de las diversas modificaciones de la figura, desde el ángulo en que las vemos

Monelli: La actividad nos ayuda a entender de qué modo logramos poner de cabeza las imágenes y logramos construir

Caselli: La actividad nos enseña a imaginar figuras mas no sólo como las vemos; nos enseña a desarrollar la imaginación, incluso en la vida práctica

Matta: Hacer pensar a los alumnos y a poner de cabeza figuras en su mente. Por tanto es un ejercicio que sirve para hacer razonar

Poggioli: Lograr entender el modo en que un chico puede imaginar una figura de cabeza

Cavarretta: Lograr ver algunos sólidos de manera diferente y poder construir sólidos con unas cuantas líneas

Flori: Tener un gran espíritu imaginativo y aprender a ver las figuras bajo un aspecto diferente del habitual y en distintos ángulos

Socelle: Reconocer el método de trabajo y las habilidades involucradas

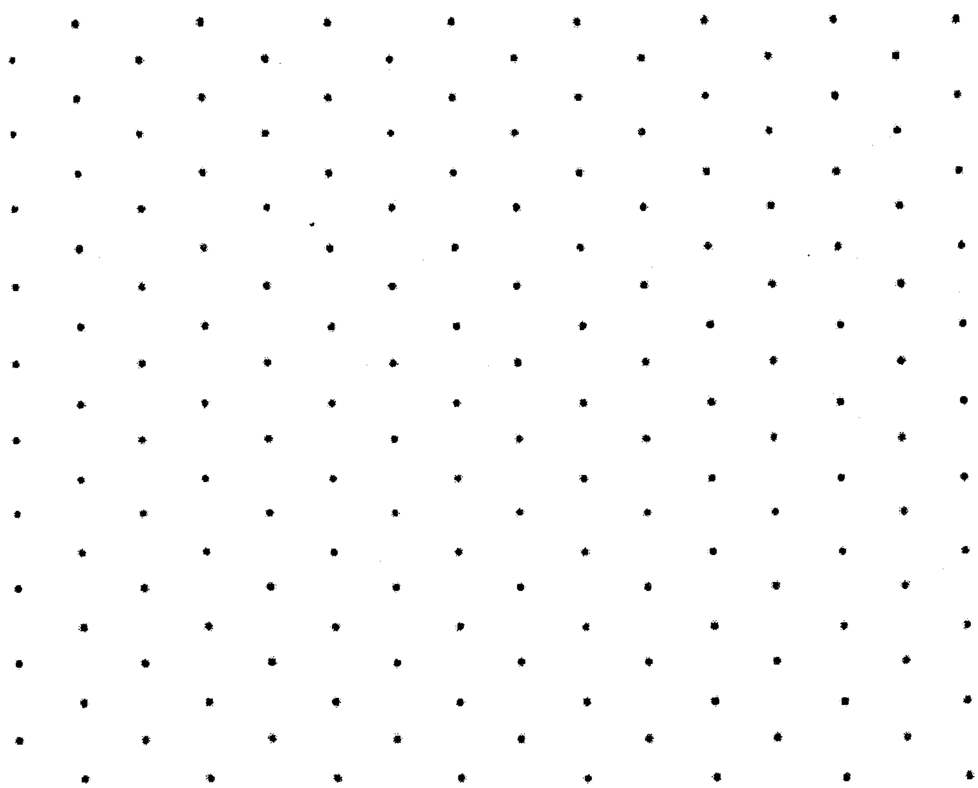
Los diferentes puntos de vista del profesor al respecto clarifican y profundizan el asunto acerca de qué temas y qué modalidades deben constituir hoy el fundamento para la enseñanza de la geometría a nivel secundaria (y no sólo ese nivel).

Más allá de todo lo anterior, esta experiencia revela la importancia que tiene formar profesores en el nivel operativo, cosa que generalmente no se logra con el solo estudio teórico de las inovaciones educativas (y mucho menos a través de cursos de actualización). Además, ponen en claro la cuestión de la tipología de estudios relacionados a la formación de profesores. Esta experiencia nos muestra un camino por recorrer en el marco de la escuela especializada para profesores. No obstante, si tomamos en cuenta la tendencia actual a tomar como créditos los cursos universitarios de tipo didáctico, parecería razonable el dudar si realmente es posible emprender en ese ámbito estudios que sigan tal óptica de ampliación y profundidad.

Véanse las opiniones de los estudiantes en el cuadro 14.

Apéndice

El papel para diagrama isométrico utilizado en la representación de los sólidos



Bibliografía

CAGNOLATI E. , 1997, El tema "*geometría*" *del del proyecto inglés "NMP Mathematics for Secondary School", análisis de las actividades del bienio final*, tesis de licenciatura 1996-97 (relata N.A. Malara), Universidad de Modena.

HARPER E. (a cargo de), 198'1988, NMP Mathematics for Secondary School, Longman, Essex, England

Malara N.A., 1994, *La geometría que hay en los programas de algunos países europeos para alumnos entre 6 y 16 años, La enseñanza integrada de las matemáticas y de las ciencias, Vol. 17A-17B, n.6, 676-700*

Malara N.A., 1996, La enseñanza de la geometría: cuestiones teóricas y didácticometodológicas, en imprenta en actas de la escuela ministerial de formación de profesores investigadores, Viareggio, 1996.

Pressi C., 1996, *El tema "geometría" del proyecto inglés !NMP Mathematics for Secondary School", análisis de las actividades para los tres primeros años*, tesis de licenciatura, 1995-96 (relata N.A. Malara), Universidad de Modena.

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

Las representaciones geométricas como un medio para cerrar la brecha entre la aritmética y el álgebra

Fecha de recepción: Junio, 1998

Educación Matemática Vol. 11 No. 3 Diciembre 1999 pp. 69-78

Alfinio Flores Peñafiel
Curriculum & Instruction
Arizona State University
alfinio@asu.edu

Resumen *El objetivo de este artículo es proporcionar a los maestros de secundaria elementos que faciliten la transición de los alumnos de la aritmética al álgebra. Representaciones geométricas de relaciones numéricas son utilizadas para ayudar a los alumnos a aprender a hacer razonamientos matemáticos de tipo general utilizando primero números particulares. Estas actividades tienen también la finalidad de ayudar a los alumnos a familiarizarse con el uso de símbolos para variables y dar representaciones pictóricas de los términos que aparecen en algunas ecuaciones algebraicas.*

Abstract *The purpose of this article is to give teachers in the middle grades means to facilitate the transition of the students from arithmetic to algebra. Geometric representations of number relations are presented to help students to learn to do mathematical reasoning of general nature using particular numbers first. These activities also have the purpose to help students become familiar with the use of symbols for variables, and give pictorial representations of the terms that appear in some algebraic equations.*

Introducción

La transición de la aritmética al álgebra puede ser difícil para muchos alumnos por múltiples razones. Las diferencias y semejanzas entre el pensamiento aritmético y el algebraico son complejas y deben ser abordadas desde varios puntos de vista. En este artículo describimos uno de tales enfoques, el uso de representaciones geométricas para facilitar la transición.

Las representaciones geométricas proporcionan un contexto en el cual los alumnos pueden desarrollar su pensamiento algebraico en los siguientes aspectos que son importantes para la transición y que la investigación ha mostrado como problemáticos (ver por ejemplo Kieran, 1990; Kieran y Chalouh, 1993; Lodholz, 1990; Wagner y Parker, 1993):

- aprender a extraer relaciones matemáticas a partir de situaciones y problemas, y a expresar tales relaciones usando símbolos algebraicos;

- hacer explícitos los procedimientos que usan para resolver problemas aritméticos;
- considerar cadenas de números y operaciones como objetos matemáticos, y no sólo como procesos para obtener una respuesta;
- estar conscientes del método matemático que se simboliza por medio de números y letras;
- poner atención al método o proceso y no sólo a la respuesta;
- hacer conjeturas y predicciones, y sacar conclusiones

En este artículo daremos algunos ejemplos que pueden ayudar a los alumnos a lidiar en especial con dos fuentes de dificultades. La primera es que en álgebra los alumnos necesitan desarrollar la habilidad de razonar sobre afirmaciones que se hacen acerca de todos los números o acerca de números en un conjunto específico, más que sobre afirmaciones acerca de números particulares. La segunda es que los alumnos necesitan desarrollar la habilidad para tratar con símbolos para variables y no sólo con símbolos para números. Los maestros en el nivel medio pueden ayudar a los alumnos a desarrollar pensamiento de naturaleza general en matemáticas aún cuando usen números ordinarios para ilustrar el razonamiento. La clave es que en la cadena de razonamientos no se utilicen propiedades particulares del número específico utilizado, sino sólo propiedades que son comunes a toda la clase de números para los cuales la afirmación es cierta.

Verbalizar los pasos, así como usar dibujos y otras representaciones concretas pueden ayudar a los alumnos a seguir la cadena de razonamientos. Con ayuda de las figuras los alumnos pueden verificar que no se utilizaron propiedades especiales del número escogido. Otra ventaja es que los dibujos y los números particulares usados ayudarán a los estudiantes a darle sentido a los diferentes términos que aparecen en la fórmula algebraica usada para describir la situación general.

Ejemplo 1. Cuadrados consecutivos.

Al trabajar con los cuadrados de números naturales, un alumno observa los siguientes resultados:

$$3^2 + 3 + 4 = 4^2$$

$$4^2 + 4 + 5 = 5^2$$

$$5^2 + 5 + 6 = 6^2$$

El alumno se pregunta si el patrón será válido para otros números. Él prueba algunos pocos de los siguientes números, algunos más al azar, y luego algunos números más grandes tales como $100^2 + 100 + 101 = 101^2$.

Esto nos da alguna evidencia empírica de que el resultado es cierto en general. La evidencia empírica es un elemento importante para convencernos. Sin embargo, también debemos guiar a los alumnos para que utilicen razonamiento matemático, para que vean que el patrón es válido para todos los números naturales. Una representación geométrica de esta situación puede ayudar a los alumnos a entender por qué el resultado es cierto. Al cuadrado de 4 se añaden dos rectángulos de área 4 y 5 respectivamente para formar el cuadrado de 5.

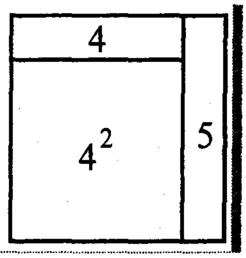


Figura 1 $4^2 + 4 + 5 = 5^2$

El dibujo, aunque hecho para un caso particular, 4, no utiliza ninguna propiedad particular de este número. El mismo principio de sumar dos rectángulos de ancho 1 al cuadrado de un número para formar el siguiente cuadrado puede ser usado siempre, de modo que el patrón puede ser generalizado. Podemos expresar el resultado mediante el siguiente enunciado: el cuadrado de un número natural, más el número, más el siguiente número es igual al cuadrado del siguiente número. El enunciado puede más tarde ser traducido como $n^2 + n + (n + 1) = (n + 1)^2$

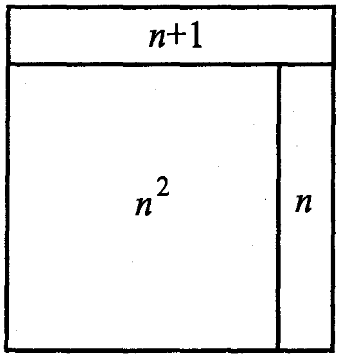


Figura 2 $n^2 + n + (n + 1) = (n + 1)^2$

La situación de cuadrados consecutivos puede ser abordada de otras formas. Una es considerando las diferencias de cuadrados consecutivos y notar que la diferencia es siempre un número non, o sea de la forma $2n + 1$ (ver fig. 3). Otra es partiendo de la suma de números impares $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ (ver figura 4).

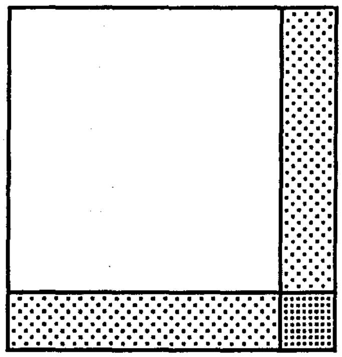


Figura 3 $(n + 1)2 - n^2 = 2 \times n + 1$

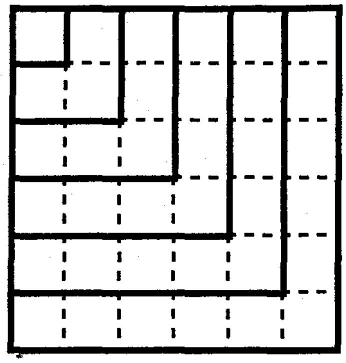


Figura 4 $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 6^2$

Ejemplo 2. Números triangulares.

Los alumnos trabajan con el siguiente patrón. Se les pide predecir cuántos cuadrados tendrá el décimo término.

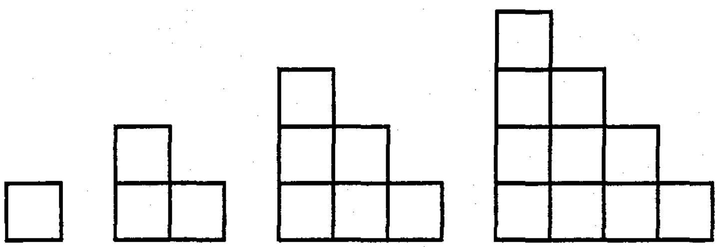


Figura 5 Números triangulares

Los alumnos pueden contar el número de cuadrados en los primeros términos. Si se fijan en los «pisos» de los «edificios», los alumnos se pueden dar cuenta que la respuesta está dada por la suma de los primeros números naturales consecutivos

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10.$$

Para números grandes, los alumnos pueden querer encontrar un procedimiento más eficiente para hacer tales sumas. Para esto, los alumnos pueden tomar dos copias para formar un rectángulo.

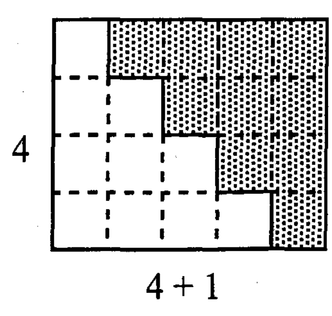


Figura 6 Un rectángulo de 4×5

Los lados del rectángulo son cuatro por cinco, o en general, el número del término por el siguiente número. Los alumnos pueden ver que el número de cuadrados que se requieren sumar será la mitad del área del rectángulo. Así que $1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4 \times 5}{2}$. El mismo razonamiento se puede utilizar también para otros números. Así, para obtener la suma de los números hasta el diez, uno necesita la mitad de un rectángulo de 10 por 11. Esto es, $1 + 2 + ... + 10 = \frac{10 \times 11}{2}$. Aunque lo hemos hecho con casos particulares, el razonamiento es de naturaleza general. La suma de los números enteros hasta un número n es igual a la mitad del área de un rectángulo de n por $(n + 1)$..Más tarde los alumnos pueden enunciar que para cualquier número n, vale la igualdad $1 + 2 + ...+ n = \frac{n \times (n + 1)}{2}$.

Ejemplo 3. Un resultado numérico notable.

El maestro pide a los alumnos que tomen un número impar cualquiera, lo eleven al cuadrado, le resten uno, y luego dividan el resultado entre 8. Los alumnos se sorprenderán de ver que en todos los casos la división no arrojó residuo. Si todos los alumnos utilizaron un número distinto, esto dará evidencia empírica para sospechar que el resultado es cierto para cualquier número impar. Los alumnos pueden probar diferentes números impares de manera sistemática, y organizar los datos.

Tabla 1 Cuadrados de números impares, menos uno

Número impar	elevado al cuadrado	menos uno	dividido entre ocho
1	1	0	0
3	9	8	1
5	25	24	3
7	49	48	6
9	81	80	10
11	121	120	15

Algunos estudiantes reconocerán los números triangulares en la última columna. Basándose en esta observación pueden predecir cuál será el siguiente resultado.

También podemos representar la situación mediante el dibujo de un cuadrado (cuyo lado es un número impar), al que le falta un cuadrado unitario.

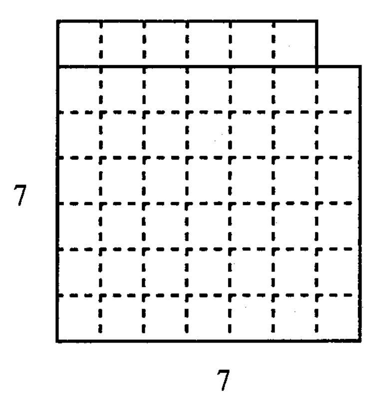


Figura 7. $7^2 - 1$

Si cortamos la tira de arriba y la pegamos a un lado, obtendremos un rectángulo. Los alumnos deben notar que ambos lados del rectángulo tienen una longitud que es un número par, y que el lado mayor es dos unidades más largo que el lado menor. Esto sucede no sólo con el caso particular, 7, ilustrado aquí, sino que siempre podemos formar un rectángulo con estas características a partir del cuadrado de un número impar menos un cuadrado unitario. En términos algebraicos, $(2n + 1)^2 - 1 = 2n \times (2n + 2)$.

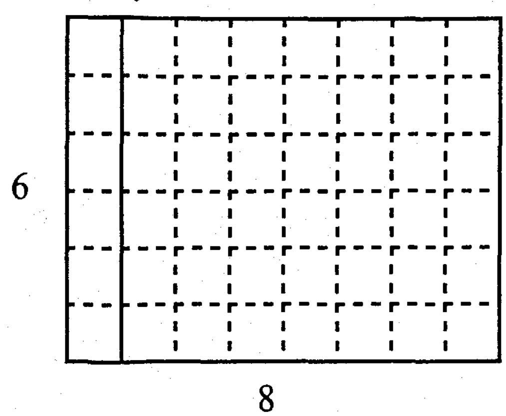


Figura 8. $7^2 - 1 = 6 \times 8$

Como ambos lados del rectángulo son divisibles entre 2, éste puede ser dividido en cuatro rectángulos iguales, cuyos lados son números enteros. Los alumnos notarán que los rectángulos pequeños tienen la propiedad de que un lado es una unidad mayor que el otro lado, o sea son de la forma $n \times (n + 1)$. Podemos recordar del ejemplo anterior que tales rectángulos se pueden descomponer en dos números triangulares, de modo que

$$4 \times n \times (n + 1) = 8\ \frac{n \times (n + 1)}{2}$$

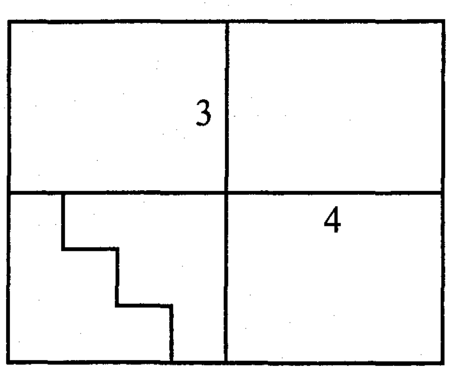


Figura 9. $4 \times (3 \times 4) = 8\ \frac{3 \times 4}{2}$

De esta manera una figura equivalente en área al cuadrado de un número impar menos uno, ha sido dividida en ocho números triangulares. Por tanto, el resultado de elevar un número impar al cuadrado y restarle uno es siempre divisible entre ocho. La figura 10 sugiere otra forma de ver este resultado.

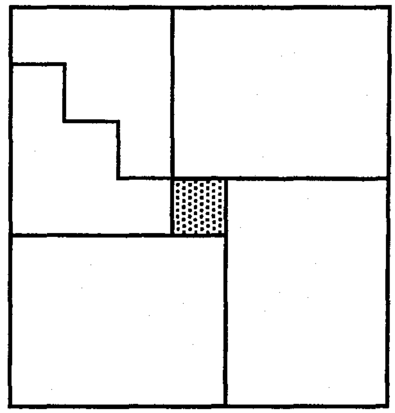


Figura 10.

Después de hacer las actividades descritas arriba, los alumnos podrán darle sentido concreto a los símbolos que aparecen en una demostración algebraica del hecho de que el cuadrado de un número impar menos uno siempre es divisible entre 8. Un número impar puede ser expresado como $2n + 1$, donde n es un número entero. Al elevarlo al cuadrado obtenemos $(2n + 1)^2 = (2n + 1) \times (2n + 1) = 4n^2 + 4n + 1$, restando uno tenemos $4n^2 + 4n$. Esto puede ser escrito como $4 \times n \times (n + 1)$ [cuatro rectángulos]. También puede ser escrito como $8\,\frac{n(n+1)}{2}$ [ocho números triangulares]. Otra forma de darnos cuenta que $\frac{n(n+1)}{2}$ es un número entero es notando que si tenemos dos números consecutivos, uno de ellos tiene que ser un número par, de modo que el producto $n \times (n + 1)$ es siempre par.

Ejemplo 4. Suma de números enteros consecutivos.

El número de pequeños cuadrados en las formas de la figura 11 está dado por los números consecutivos 9, 10, 11, 12. El total de cuadraditos es por tanto $9 + 10 + 11 + 12$. Si descomponemos el primer cuadrado en columnas y añadimos una de estas columnas a las otras formas, obtenemos una representación de los números consecutivos 13, 14, 15 (fig. 12). Como el número total de cuadraditos no cambió tenemos la igualdad $9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$.

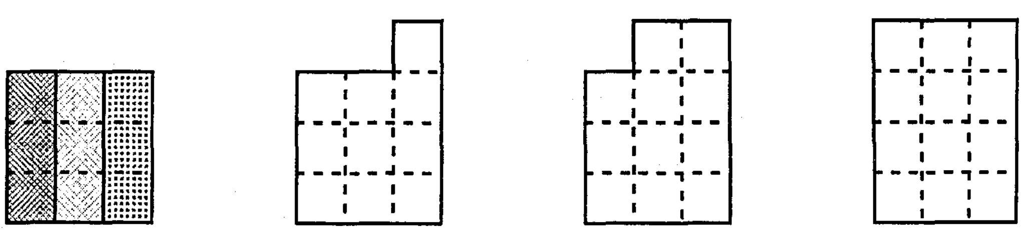


Figura 11. $9 + 10 + 11 + 12$

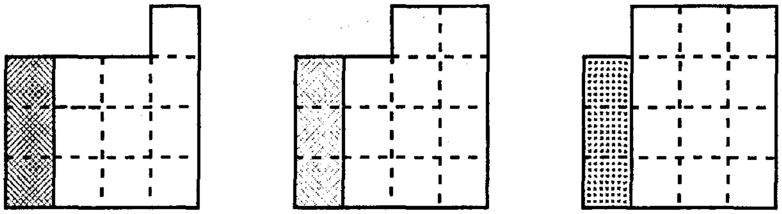


Figura 12. 13 + 14 + 15

Los alumnos pueden tratar con otros ejemplos y ver que éste es un caso particular de una serie de igualdades de sumas de números consecutivos. Ellos pueden anotar las igualdades en una tabla.

Tabla 2 Sumas de números consecutivos

$1 + 2 = 3$
$4 + 5 + 6 = 7 + 8$
$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$
$16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 21 + 22 + 23 + 24$

Los alumnos pueden dibujar las figuras que corresponden a las dos primeras igualdades. Pueden también escribir la igualdad numérica que corresponde a los números que siguen. Pueden describir verbalmente la relación sugerida por estas igualdades. En general, en la parte izquierda tenemos $(n + 1)$ términos, y empezando con el cuadrado de un número, n^2, sumamos los siguientes n números enteros consecutivos. El último término que se suma será por tanto $n^2 + n$. La suma de estos términos es igual a la suma de los siguientes n números enteros consecutivos, empezando con $n^2 + n + 1$, y terminando con $n^2 + 2n$. Los alumnos deben notar que este último término es lo mismo que $(n + 1)^2 - 1$. Los alumnos pueden recordar que el término n^2 se ha descompuesto en n sumandos de tamaño n. De modo que podemos reescribir n^2 como $n + n + ... + n$, y tomar una n para cada uno de los otros términos de la parte izquierda. Esto nos dará los términos de la parte derecha. Usando símbolos algebraicos,

$$n^2 + (n^2 + 1) + (n^2 + 2) + ... + (n^2 + n) = (n^2 + n + 1) + (n^2 + n + 2) + ... + (n^2 + 2n)$$

Ejemplo 5. Sumas de números enteros consecutivos y suma de cubos.

El número de pequeños cubos en las formas de la columna izquierda de la figura 13 es respectivamente 10, 11, 12, 13, 14, 15, y 16. Los pequeños cubos de color en las primeras tres rebanadas se reacomodan sobre las rebanadas que están detrás. Las de enfrente se reducen a tres rebanadas iguales, con caras en forma de cuadrado, y con 9 cubos cada una. Las de atrás son aumentadas para formar rebanadas iguales con 16 pequeños cubos, de modo que ahora se tienen cuatro rebanadas de ese tamaño. Las de enfrente se juntan para formar un cubo de $3 \times 3 \times 3$. Las de atrás forman un cubo de $4 \times 4 \times 4$. Como el número total de pequeños cubos no ha cambiado, tenemos la igualdad $10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 = 3^3 + 4^3$. Los alumnos pueden ver que éste es un caso particular de una serie de igualdades entre sumas de números consecutivos y sumas de dos cubos consecutivos (ver tabla 3).

Tabla 3 Sumas de números consecutivos y sumas de cubos consecutivos

$$2 + 3 + 4 = 1^3 + 2^3$$
$$5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 2^3 + 3^3$$
$$10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 = 3^3 + 4^3$$
$$17 + 18 + 19 + 20 + 21 + 22 + 23 + 24 + 25 = 4^3 + 5^3$$

Los alumnos pueden construir con cubos pequeños (o dibujar) las formas que corresponden a las primeras dos ecuaciones. Pueden escribir las siguientes igualdades de la serie. Pueden describir verbalmente la relación sugerida por estos ejemplos. En general, empezamos con el cuadrado de un número más uno, $n^2 + 1$, y seguimos con los siguientes $2n$ números consecutivos hasta $(n + 1)^2$. Del lado derecho tenemos la suma de dos cubos consecutivos, $n^3 + (n + 1)^3$. La igualdad queda descrita mediante símbolos algebraicos como $(n^2 + 1) + (n^2 + 2) + ... + (n + 1)^2 = n^3 + (n + 1)^3$. Siguiendo la idea sugerida por la figura 13 podemos reescribir el lado izquierda como

$$(n^2 + 1) + (n^2 + 2) + ... + (n^2 + n) + [(n + 1)^2 - n] + ... + [(n + 1)^2 - 1] + (n + 1)^2.$$

Vemos que la cantidad que los primeros n términos tienen como exceso de n^2 es precisamente lo que les falta a los siguientes n términos para ser $(n + 1)^2$. Tenemos ahora n rebanadas con n^2 cubos cada una, y $(n + 1)$ rebanadas con $(n + 1)^2$ cubos cada una. Consecuentemente la suma es igual a $n \times n^2 + (n + 1) \times (n + 1)^2 = n^3 + (n + 1)^3$.

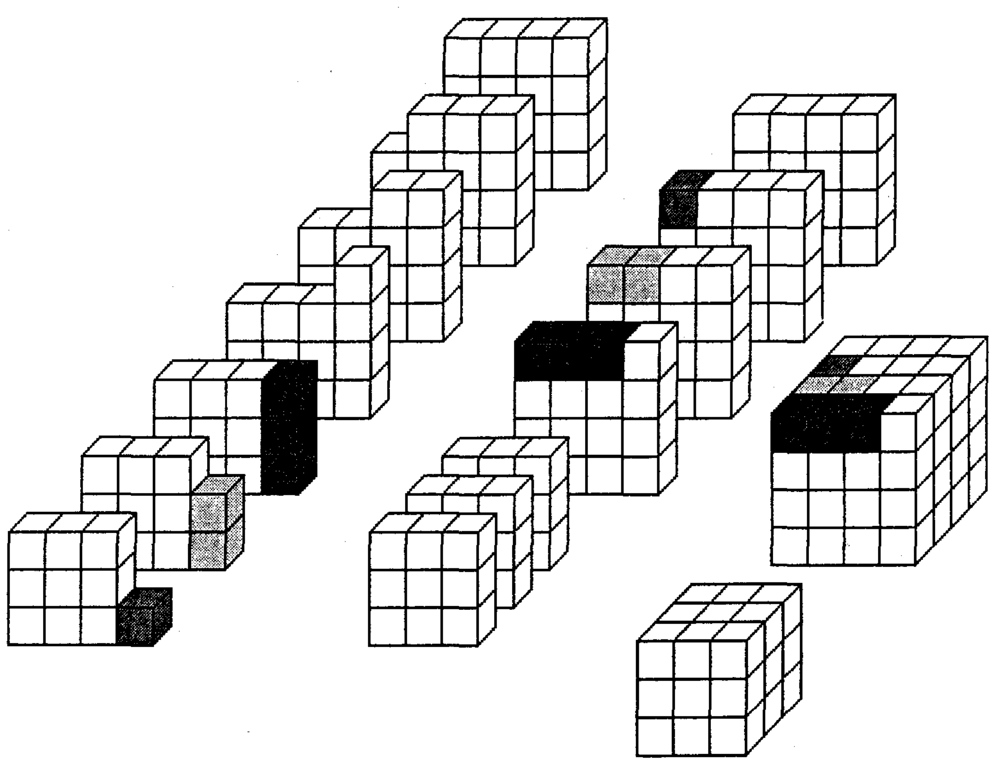


Figura 13 $10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 = 3^3 + 4^3$

Conclusión.

En los ejemplos mostrados, algunos números particulares fueron utilizados para ilustrar enunciados generales. Aunque el razonamiento para ver por qué el enunciado es verdadero fue hecho con números particulares, sin embargo, el mismo razonamiento puede ser hecho en general. El uso de variables implica un razonamiento de tipo general, sin embargo, muchos estudiantes no están preparados para dar un salto que conlleva simultáneamente el uso de razonamientos matemáticos de tipo general y el uso de variables. Para facilitar el proceso pueden hacer primero el razonamiento con números particulares. Los alumnos pueden desarrollar sus habilidades para razonar en términos generales antes de utilizar variables. Al mismo tiempo, utilizando las representaciones geométricas de las relaciones numéricas, los alumnos tendrán experiencias concretas que darán sentido a los términos algebraicos que serán usados más tarde.

Referencias

Kieran, Carolyn. (1990). Cognitive processes in learning school algebra. En Pearl Nesher y Jeremy Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition* (p. 96-112). Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press.

Kieran, C., y Chalouh, L. (1993). Prealgebra: The transition from arithmetic to algebra. En D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (p. 179 - 198). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lodholz, Richard D. (1990). The transition from arithmetic to algebra. En Edgar L. Edwards (Ed.), *Algebra for everyone* (p. 24 - 33). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Wagner, S., y Parker, S. (1993). Advancing algebra. En P. S. Wilson (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (p. 119 - 139). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Un estudio de la influencia de la representación de la matemática en el rendimiento académico del alumno de primer año de la universidad

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

Educación Matemática Vol. 11 No. 3 Diciembre 1999 pp. 79-88

Fecha de recepción: Agosto, 1998

Cristina Inés Badano; María Graciela Dodera,
Universidad de Buenos Aires, Ciudad Universitaria, Argentina
cbadano@cbc.uba.ar, gdodera@alge.cbc.uba.ar

Resumen: *Este trabajo intenta analizar si la representación que el alumno tiene de la matemática influye en su rendimiento académico. Se establece el perfil, en lo referente a su representación de la matemática, del grupo de estudiantes de la asignatura Matemática del Ciclo Básico Común (primer año de la Universidad de Buenos Aires). Se estudia si existen diferencias significativas en la representación que tienen de la matemática los alumnos que cursan por primera vez la asignatura respecto de los recursantes, quienes la han intentado cursar anteriormente sin éxito. Se observó que los alumnos recursantes poseen un representación más negativa de la matemática y que una valoración positiva está ligada a un rendimiento académico mayor .*

Abstract: *This work tries to analize if student's representation of Mathematics has an influence on his academic performance. The profile concerning the representation of Mathematics of the group of students taking the subject "Mathematics" at the General Basic Cycle of the University of Buenos Aires is described. It is studied if there are significant differences between the representation of Mathematics that sudents taking the subject for the first time have and that of those who have unsuccessfully tried to take it before. It was noticed that students who must take the subject more than once have a negative representation of Mathematics and that a positive appreciation is connected to a better academic performance.*

Introducción

Este trabajo se realizó en el marco del proyecto de investigación que dirigimos aprobado por la Secretaría de Ciencia y Técnica de la Universidad de Buenos Aires.[1]

Como profesoras del Area de Matemática del Ciclo Básico Común, nos preocupa observar que nuestros alumnos enfrenten con serias dificultades los estudios

[1] Proyecto de Investigación CB014: *Apropiación de conceptos y capacidades operativas en Matemática. Articulación Escuela Media - C.B.C.. Proyecto alternativo Matemática/C.B.C.* UBACYT - Programación científica 1995/97 – Directores: Dodera M. G., Badano C.I..

de matemática de este ciclo, que es el primer año de la Universidad de Buenos Aires. Estadísticas de los últimos años muestran que del total de alumnos que comienza a cursar alguna asignatura del área, aproximadamente el 40 % abandona antes de completar el curso, el 25 % desaprueba y sólo el 35 % aprueba.

Creemos que entre los factores que inciden en tornar más difícil la transición entre el nivel medio y el universitario se encuentran: (a) una valoración en general poco positiva por parte del estudiante sobre la importancia y utilidad de las matemáticas y (b) un grado de dificultad generalmente elevado que otorga el alumno al estudio de matemática.

Nos hemos preguntado: ¿los alumnos que no tienen una buena opinión de la matemática obtendrán peores notas que los que tienen una opinión favorable?. En otras palabras nos preguntamos si la representación que el alumno tiene de la matemática influye en su rendimiento académico.

No es fácil definir "rendimiento académico", sin embargo existe consenso para afirmar que es un concepto multidimensional (Rodríguez Espinar; 1986) debido a la complejidad de la acción educativa. En la mayoría de las investigaciones se focaliza el rendimiento académico sobre criterios basados en calificaciones, pruebas objetivas o notas (Alvaro Page ;1990) o bien con el tiempo utilizado para finalizar la carrera, abandono de la misma o cambios de estudio (Latiesa;1992). Según Roces (1996) estos enfoques se corresponden al concepto de rendimiento en sentido estricto, medido a partir de las calificaciones del alumno, y al de rendimiento en sentido amplio, medido a través del éxito, retraso o abandono de los estudios.

La psicología toma de la filosofía el término "representación" para designar aquello que forma el contenido concreto de un acto de pensamiento, y en especial la reproducción de una percepción o sensación anterior. Por lo tanto la representación aparece ligada por un lado a la percepción y por el otro a la memoria. Se distingue de la sensación porque no requiere de un estímulo para presentarse a la conciencia. Las representaciones actúan durante el proceso de percepción y puede decirse que influyen en él.

Si bien este término fue utilizado por Freud (1915), recién fue analizado a nivel social y grupal por Moscovici (1992). Este autor y quienes continuaron su línea teórica, Jodelet (1985) y Kaës (1986) aseguran que las representaciones se construyen a partir de todas las informaciones que el sujeto tiene del objeto a ser representado. Estas informaciones provienen tanto de los sentidos, como de la experiencia previa con el objeto, como también de la experiencia con otros sujetos y grupos en función del objeto en cuestión. La representación lleva al individuo o grupo a actuar sobre la realidad de manera tal que ésta se ajuste a ella. Se torna así en un instrumento del sujeto o del grupo, ocupando un lugar de intermediaria entre éste y la realidad.

Descripción de la experiencia

Para realizar este trabajo tomamos como hipótesis que una adecuada representación de la matemática favorece su aprendizaje, propicia en el alumno el desarrollo de una adecuada estructura cognoscitiva incidiendo positivamente en su rendimiento académico.

El análisis de la incidencia de la representación matemática en la estructura cognitiva que posee el alumno al ingresar a la universidad fue objeto de un trabajo anterior (Badano C.I., Dodera M.G.; 1998).

En este trabajo centramos nuestra atención en el grupo de alumnos que cursan la asignatura Matemática del Ciclo Básico Común (C.B.C.) de la Universidad de Buenos Aires. Estos alumnos estaban inscriptos en carreras de las Facultades de Arquitectura y Urbanismo, Agronomía y Veterinaria, Farmacia y Bioquímica, Medicina ó Ciencias Económicas.

El objetivo del presente trabajo es:

- establecer el perfil del grupo en lo referente a su representación de la matemática.
- estudiar la incidencia de la representación que el alumno tiene de la matemática en su rendimiento académico en la asignatura del C.B.C..
- estudiar si existen diferencias en la representación que tienen de la matemática los alumnos que cursan por primera vez la asignatura respecto de los que la han intentado cursar anteriormente sin éxito.

Con este fin se tomó al inicio del ciclo lectivo una encuesta a 1087 alumnos de la asignatura Matemática del C.B.C..

La encuesta incluye un *cuestionario actitudinal*, que permite armar la representación que el alumno tiene de la matemática, y un *formulario de datos personales* para posibilitar el seguimiento de los participantes.

Las preguntas del *cuestionario* son las mismas que las utilizadas para estudiar la incidencia de la representación matemática en la estructura cognitiva del alumno al ingresar a la universidad. Estas se agruparon en dos bloques, uno relacionado con las materias de matemática estudiadas en la Escuela Media, y el otro con la asignatura Matemática del C.B.C..

En el primero se solicitó al alumno su opinión acerca de la importancia, la utilidad y la dificultad que le asigna a las materias de matemática de la Escuela Media. Se presentaron tres proposiciones que debía valorar positiva o negativamente, o en escalas de mayor o menor aceptación. Los indicadores utilizados para medir la valoración o la aceptación fueron: "muy", "medianamente" ó "nada".

Respecto a la asignatura del C.B.C. se solicitó al alumno su valoración acerca de la importancia/utilidad que supone tiene para su carrera la asignatura Matemática que comienza a cursar. Los indicadores utilizados fueron: "muy", "medianamente", "poco" ó "nada".

Variables

Cada una de las proposiciones fue considerada como una variable del cuestionario actitudinal. Las de tres alternativas de respuesta fueron codificadas en una escala ordinal del 0 al 3; la de cuatro alternativas, en una escala del 0 al 4. Se asignó puntaje mayor a las respuestas del alumno que reflejan una valoración más positiva ó una mayor aceptación. El código 0 corresponde a la pregunta no contestada.

Para medir la representación que el alumno tiene de la matemática se introdujo la variable REPRESENTACION MATEMATICA. Se la definió como la suma de las variables que recogen las opiniones de los alumnos tanto de las materias de matemática de la Escuela Media como de la asignatura Matemática del C.B.C. Esta variable tiene un recorrido de 0 a 13.

Para medir el rendimiento académico del alumno en la asignatura Matemática del Ciclo Básico Común se definieron las variables: CALIFICACION FINAL C.B.C., como la nota final que el alumno obtuvo en la asignatura Matemática (con un recorrido de 0 a 10) y CONDICION, que agrupa a los alumnos encuestados en tres categorías: Desertor (compuesta por los alumnos ausentes a la última evaluación parcial), Insuficiente (caracterizada por valores menores que cuatro en la variable CALIFICACION FINAL C.B.C.) y Aprobado (caracterizada por valores de CALIFICACION FINAL C.B.C. mayores o iguales que cuatro).

Análisis de resultados

Con el software Statistics 4.1. se realizaron los siguientes estudios:

1.- Análisis descriptivo de las variables del cuestionario actitudinal.

2.- Tabulación cruzada entre las variables que describen la condición final del alumno en la asignatura del C.B.C. y la representación que tiene de la matemática.

3.- Estadísticos descriptivos de la variable CALIFICACION FINAL C.B.C. según la representación matemática del alumno.

4.- Estudio de la posible asociación entre las variables que miden la representación matemática y el rendimiento académico del estudiante.

5.- Estudio de la existencia de diferencias significativas entre las calificaciones finales promedio en la asignatura del C.B.C. de acuerdo a la representación matemática.

El primero permite perfilar al alumno del C.B.C. en lo referente a su representación de la matemática. Los últimos permiten estudiar la incidencia de la representación en el rendimiento académico del estudiante.

Debido a que la representación aparece ligada a la experiencia previa con el objeto a ser representado, se decidió analizar las diferencias entre las respuestas dadas por los alumnos que cursan por primera vez la asignatura (NO RECURSANTES) y por los que ya la han cursado anteriormente sin poder aprobarla (RECURSANTES). Supusimos que la representación de la matemática de los alumnos recursantes se vería influenciada por su fracaso anterior.

En la TABLA I.1 y I.2 se transcriben las preguntas del cuestionario actitudinal relacionadas con la representación que el alumno tiene de la matemática y se consignan para cada una de ellas la distribución de frecuencias de las respuestas dadas. Los porcentajes se dan para la totalidad de alumnos encuestados (TOTAL) y para los grupos de alumnos NO RECURSANTES y de alumnos RECURSANTES.

Apreciación subjetiva de las materias de matemática del Colegio Secundario					
En el colegio secundario, Matemática fue para Ud. una materia:					
a) ☐ *muy importante* ☐ *medianamente importante* ☐ *nada importante*					
	Muy importante	*Medianamente importante*	*Nada importante*	NO CONTESTA	Cantidad de alumnos
TOTAL	36.5%	36.3%	9.9%	17.2%	1087
NO RECURSANTES	45.7%	35.2%	5.7%	13.4%	580
RECURSANTES	26.0%	37.7%	14.8%	21.5%	507
b) ☐ *muy útil* ☐ *medianamente útil* ☐ *inútil*					
	Muy útil	*Medianamente útil*	*Inútil*	NO CONTESTA	Cantidad de alumnos
TOTAL	34.0%	43.0%	8.3%	14.7%	1087
NO RECURSANTES	41.4%	39.8%	5.0%	13.8%	580
RECURSANTES	25.6%	46.5%	12.0%	15.8%	507
c) ☐ *fácil* ☐ *medianamente difícil* ☐ *difícil*					
	Fácil	*Medianamente difícil*	*Muy difícil*	NO CONTESTA	Cantidad de alumnos
TOTAL	22.9%	47.5%	14.9%	14.7%	1087
NO RECURSANTES	25.7%	46.0%	16.6%	11.7%	580
RECURSANTES	19.7%	49.1%	13.0%	18.1%	507

TABLA I.1: Distribución de frecuencias de las opiniones respecto a las materias de matemática de la Escuela Media del total de alumnos encuestados y de los alumnos recursantes y no recursantes.

Los porcentajes de la TABLA I.1 muestran que, en general, las materias de matemática del colegio secundario son catalogadas *muy importante* ó *medianamente importante* pues el porcentaje de alumnos que así las considera oscila entre el 63% y el 80%, alcanzando el valor más alto en el grupo de alumnos no recursantes. Existe una marcada diferencia en el porcentaje de alumnos recursantes y no recursantes que las consideran *muy importante*: el 26.0% en el grupo de RECURSANTES y el 45.7% en el grupo de NO RECURSANTES.

En general se considera a las materias de matemática del secundario como *muy útiles* ó *medianamente útiles*, siendo la distribución de frecuencias similar a la registrada en la pregunta sobre la *importancia*.

Casi el 50% de los alumnos encuestados opinaron que las asignaturas de matemática del secundario les resultaron *medianamente difícil* y menos de la cuarta parte de la población las catalogaron como *fáciles*.

El porcentaje de *NO CONTESTA* oscila entre 10% y 20% en cada uno de los ítems y registra los valores más altos en el grupo de alumnos recursantes.

Apreciación subjetiva de la asignatura Matemática del Ciclo Básico Común					
Considera Ud. que la asignatura Matemática es para su carrera: ☐ *muy importante/útil* ☐ *medianamente importante/útil* ☐ *poco importante/útil* ☐ *nada importante/útil*					
	Muy importante/útil	*Medianamente importante/útil*	*Poco importante/útil*	*Nada importante/útil*	Cantidad de alumnos
TOTAL	34.6%	14.1%	33.4%	17.9%	1087
NO RECURSANTES	46.4%	12.6%	32.1%	9.0%	580
RECURSANTES	21.1%	15.8%	34.9%	28.2%	507

TABLA I.2: Distribución de frecuencias de las opiniones respecto a la asignatura Matemática del Ciclo Básico Común del total de alumnos encuestados y de los alumnos recursantes y no recursantes.

A diferencia de los ítems referidos a las materias de matemática de la Escuela Media, todos los alumnos encuestados expresaron su opinión acerca de la asignatura Matemática del C.B.C..

El 50% del total de alumnos considera que esta asignatura del C.B.C. es una materia *poco importante/útil o nada importante/útil* para su carrera. Este resultado está ligado al hecho de que en general las carreras en las cuáles están inscriptos incluyen pocas asignaturas de matemática en su currícula.

Los alumnos no recursantes tienen una valoración más positiva acerca de la *importancia/utilidad* de la asignatura que los alumnos recursantes; esto se refleja en el porcentaje de alumnos que la catalogan como *nada importante/útil* (9.0% en el grupo de alumnos no recursantes y 28.2% en el grupo de recursantes). La experiencia previa de haber cursado sin éxito la asignatura Matemática del C.B.C. parecería influir negativamente en la representación que el alumno recursante tiene de la misma. En cambio, como la encuesta fue tomada al inicio del ciclo lectivo las opiniones vertidas por los alumnos no recursantes resultan ser hipotéticas y fundamentadas en la base imaginaria que poseen al inicio del curso.

En base al conjunto de opiniones recabadas sobre las materias de matemática de la Escuela Media y acerca de la asignatura Matemática del C.B.C. se armó la representación que el alumno tiene de la matemática.

En la TABLA II se consignan el promedio (PROM) y el desvío estándar (SD) de la variable REPRESENTACION MATEMATICA para el total de los alumnos encuestados y para los grupos de alumnos recursantes y no recursantes.

	REPRESENTACION MATEMATICA		
	PROM	SD	Recorrido
TOTAL	8.2924	2.7397	0 a 13
NO RECURSANTES	9.0397	2.6146	0 a 13
RECURSANTES	7.5049	2.6963	0 a 13

TABLA II: Media (PROM) y desvío estandar (SD) de la variable REPRESENTACION MATEMATICA para el total de alumnos y para alumnos recursantes y no recursantes.

Los valores medios de la variable REPRESENTACION MATEMATICA de cada grupo (9.0397 en el grupo de no recursantes y 7.5049 en el grupo de recursantes) evidencian que los alumnos recursantes tienen una valoración más negativa de la matemática que los no recursantes.

Se aplicó el test c^2 para estudiar la posible asociación entre la condición de ser recursante o no y la representación matemática. El valor de probabilidad $p = 0.0000$ (intervalo de confianza del 95%) indica que estas variables no son independientes.

Para estudiar la incidencia de la representación de la matemática en el rendimiento académico del alumno en la asignatura Matemática del C.B.C. se categorizó a la población de acuerdo a los valores de la variable REPRESENTACION MATEMATICA. Se consideraron tres grupos de forma tal que cada uno abarque aproximadamente la tercera parte de los encuestados. El primer grupo que denominamos grupo de *representación matemática baja* está integrado por los 362 alumnos que obtuvieron los puntajes más bajos en la variable REPRESENTACION MATEMATICA (valores que resultaron ser menores ó iguales que 7). En este grupo el 66.3% son recursantes. El segundo grupo, llamado de *representación matemática media*, quedó formado por los alumnos con puntajes 8, 9 y 10 en la variable, de los cuáles el 50.8% son recursantes y el 49.2% no recursantes. El grupo llamado de *representación matemática alta* corresponde a valores mayores ó iguales que 11 y está conformado por 362 alumnos, de los cuáles el 77.2% son no recursantes.

Se efectuó una tabulación cruzada para estudiar en las clases de *representación matemática baja, media y alta* la distribución de frecuencias de la variable CONDICION (que agrupa a los alumnos en aprobados, insuficientes y desertores). En la TABLA III se consignan los resultados para la población total y para los grupos RECURSANTES y NO RECURSANTES.

	POBLACION TOTAL			NO RECURSANTES			RECURSANTES		
	REPRESENTACION MATEMATICA			*REPRESENTACION MATEMATICA*			*REPRESENTACION MATEMATICA*		
	BAJA	*MEDIA*	*ALTA*	*BAJA*	*MEDIA*	*ALTA*	*BAJA*	*MEDIA*	*ALTA*
APROBADOS	28.7%	30.6%	45.7%	23.4%	41.5%	49.0%	28.2%	19.9%	34.4%
INSUFICIENTES	22.5%	23.3%	27.0%	19.9%	15.8%	29.6%	26.9%	31.7%	18.0%
DESERTORES	48.8%	46.1%	27.3%	56.7%	42.7%	21.4%	45.0%	48.4%	47.5%
	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

TABLA III: Tabulación cruzada entre la variable CONDICION y las clases de *representación matemática baja, media* y *alta*, en la población total y en los grupos de alumnos recursantes y no recursantes.

Alrededor del 50% de los integrantes del grupo de *representación matemática baja* abandona la asignatura. Del 50% restante, la mitad no logra aprobarla. Este comportamiento, que se observa tanto en la población total como en los grupos de alumnos recursantes y no recursantes, indica que el 75% de los estudiantes que obtuvieron los menores puntajes de representación fracasa en su intento de cursar la asignatura.

En el grupo de *representación matemática alta* el fracaso es del orden del 50%. En el conjunto de los alumnos recursantes de este grupo, que sólo representa el 22.8% de los alumnos con representación matemática alta, la deserción por sí sola alcanza este nivel.

El valor de probabilidad p = 0.0000 arrojado por el test c^2 indica que existe asociación entre la condición final en la asignatura y la representación matemática categorizada en baja, media, alta.

En la TABLA IV se consignan para los grupos de *representación baja*, *media* y *alta*: el promedio (PROM) y el desvío estándar (SD) de las calificaciones finales en la asignatura Matemática del C.B.C.. Estos estadísticos se dan para la totalidad de alumnos encuestados y para los grupos de alumnos recursantes y no recursantes.

REPRESENTACION MATEMATICA	POBLACION TOTAL *CALIFICACION C.B.C.*		NO RECURSANTES *CALIFICACION C.B.C.*		RECURSANTES *CALIFICACION C.B.C.*	
	PROM	SD	PROM	SD	PROM	SD
BAJA	3.0660	2.7603	3.0771	2.9286	3.0582	2.6438
MEDIA	3.3776	2.9735	4.1968	3.3426	2.5765	2.3010
ALTA	4.2880	3.0889	4.4184	3.0887	3.8475	3.0741

TABLA IV: Media (PROM) y desvío estándar (SD) de la variable CALIFICACION C.B.C. en los grupos de *representación matemática alta, media y baja* para el total de alumnos y para recursantes y no recursantes

El rendimiento académico del alumno en la asignatura Matemática es mayor cuanto más alta es la representación que tiene de la matemática. Este comportamiento se observa en la población total de alumnos y en el grupo de no recursantes y se pone de manifiesto en los promedios de las calificaciones de los encuestados en la asignatura del C.B.C..

El rendimiento académico de los alumnos recursantes es inferior al de los no recursantes; la calificación final promedio de este grupo es inferior a la del grupo de alumnos que cursan por primera vez la asignatura.

En todas las categorías de representación se registran desviaciones altas en el promedio de calificaciones que estaría ligado a que la representación que el alumno tiene de la matemática es sólo uno de los múltiples factores que inciden en su rendimiento académico.

El test χ^2 arroja valores de probabilidad p = 0.0000 tanto para la población total como para los grupos de alumnos recursantes y no recursantes. En los tres grupos existe asociación entre la condición final en la asignatura y la representación matemática categorizada en baja, media, alta.

Se aplicó el test "t para dos muestras" a los grupos de *representación matemática baja* y *alta*, definidos para la población total, con el fin de estudiar si existen diferencias significativas en las calificaciones obtenidas en la asignatura Matemática por los alumnos de ambos grupos. Se tomó como hipótesis nula que las calificaciones promedio de ambos grupos son iguales, como hipótesis alternativa que la calificación promedio del grupo de *representación matemática baja* es inferior a la del grupo de *representación matemática alta* y un intervalo de confianza del 95%. El valor de probabilidad p = 0.0000 arrojado por el test permite inferir que existen diferencias significativas en las calificaciones obtenidas en la asignatura Matemática por los alumnos de ambos grupos.

Por último, para conocer cómo influye en estos resultados el elevado porcentaje de "*NO CONTESTA* " registrados en la TABLA I.1 se reiteraron los mismos estudios considerando sólo las encuestas en las que se respondieron a todos los ítems del cuestionario actitudinal. La muestra reducida quedó conformada por 794 alumnos.

Los valores medios registrados para la variable REPRESENTACION MATEMATICA fueron: 9.4610 (SD 2.0354) para el total de alumnos de la muestra reducida; 10.022 (SD 1.9415) para el grupo de alumnos no recursantes y 8.7450 (SD 1.9300) para el grupo de alumnos recursantes de esta muestra. Es lógico que al descartarse las encuestas con código 0 en algún ítem los valores medios de la variable resulten mayores que los consignados para la población total en TABLA II. Sin embargo los promedios obtenidos guardan la misma relación que la observada para la población total.

Los estudios de asociación efectuados con el test c^2 arrojan iguales resultados que para la población total ($p = 0.0000$ en todos los casos).

La aplicación del "t para dos muestras" a los nuevos grupos de *representación matemática baja* y *alta* (conformados cada uno por la tercera parte de la población reducida) evidencian diferencias significativas entre los valores medios de calificación de ambos grupos.

Estos resulatados muestran que, independientemente que el "*NO CONTESTA*" se interprete como falta de atributo, valoración negativa ó falta de información, las conclusiones alcanzadas son las mismas.

Consideraciones finales

- *Una valoración positiva de la matemática está ligada a un rendimiento académico mayor.*
  Esto se evidencia en las diferencias registradas en las calificaciones finales obtenidas en la asignatura del C.B.C. por los alumnos encuestados que conforman los grupos de representación alta y baja y en los valores de probabilidad que arroja el test "t para dos muestras".

- *Una alta representación matemática podría influir en la disminución de la cantidad de alumnos que no logran cursar con éxito la asignatura.*
  Esto se revela en las diferencias registradas en el porcentaje de alumnos desertores, insuficientes y aprobados en los grupos de representación matemática baja y alta; en la asociación que existe entre la condición final del alumno en la asignatura y la representación que tiene de la matemática; y en la existencia de diferencias significativas en las calificaciones de los alumnos de los grupos de representación matemática baja y alta que arroja el test "t para dos muestras".

- *Un fracaso anterior en el estudio de la asignatura Matemática incide negativamente en la valoración que el alumno tiene de la matemática.*
  Esto se pone de manifiesto en las diferencias observadas en los promedios de la variable que mide la representación matemática en los grupos de alumnos recursantes y no recursantes y en la asociación que existe entre la representación matemática y la condición de ser recursante.

Estas observaciones nos inducen a pensar que la representación que el alumno tiene de la matemática es uno de los factores que influye en su rendimiento académico en el área de Matemática del primer año de la universidad.

Bibliografía

ALVARO PAGE, M. (1990) *Hacia un modelo causal del Rendimiento académico.* Madrid: SIDE.

BADANO, C.I.; DODERA, M.G. (1998) Una experiencia de medición de la representación que el alumno tiene de la matemática. Su incidencia sobre la estructura cognoscitiva previa. *Educación Matemática.* Vol. 10, 1 , 38-47.

CANAVOS, G. (1984) *Probabilidades y Estadística.* Madrid: Editorial McGraw-Hill.

FREUD, S. (1915) *Lo inconciente.* En *Obras completas.* Tomo XIV. Editorial Amorrortu.

JODELET, D. (1985) *La representación social: fenómenos, conceptos y teoría.* En Moscovici S., *Psicología Social.* Tomo II. Barcelona: Editorial Paidós.

KAËS, R. (1986) *El aparato psíquico grupal.* México: Editorial Gedisa.

LATIESA, M. (1992) *La deserción universitaria.* Madrid: CIS

MOSCOVICI, S. (1992) *Psicología social.* Tomo II. Buenos Aires: Editorial Paidós.

ROCES, C.; TOURON, J.; GONZALEZ, M.C. (1996) "Documentos Didácticos 158. Evaluación educativa. I. Evaluación de los aprendizajes de los alumnos" en Rodríguez Dieguez, Tejedor Tejedor (eds.): *Instrumentos de evaluación de las variables que intervienen en el aprendizaje,* 65-81. Salamanca: Instituto Universitario de Ciencias de la Educación IUCE.

RODRIGUEZ ESPINAR, S. (1986) "Factores que influyen en el rendimiento escolar" en *Apuntes de Educación,* 23,3.

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

Divergencia de la serie armónica

Fecha de recepción: Julio, 1998

Antonio Rivera F.
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN,
Departamento de Matemática Educativa.
arivera@mail.cinvestav.mx

Educación Matemática
Vol. 11 No. 3 Diciembre
1999 pp. 89-94

Resumen: *En este artículo presentamos un acercamiento elemental a la divergencia a infinito de la serie armónica* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ *así como a su comportamiento asintótico, el cual está relacionado con la función logaritmo natural y la famosa constante g de Euler. La representación gráfica de las sumas parciales de la serie, la cual obtuvimos con* Mathematica, *no solamente es un elemento revelador del comportamiento asintótico, sino que puede jugar un papel importante en la adquisición de este conocimiento.*

Summary: *In this paper we examine the divergent behavior to infinity of the harmonic series* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ *as well as its asymptotic behavior which is related to the natural logarithm function and the well-known Euler's constant. The graphic representation of the partial sums of the series, obtained with the aid of* Mathematica, *not only reveals fundamental features of the asymptotic behavior, but it might play an important resource in the acquisition of that knowledge.*

Introducción

Hoy en día las computadoras personales son una excelente herramienta para incursionar en las matemáticas. Mucho de lo que antes no nos atrevíamos a hacer, por ejemplo, tediosos cálculos y gráficas inimaginables, ahora es completamente posible.

Podríamos decir que las computadoras personales están modificando los procesos de aprendizaje y el mismo quehacer matemático. Por una parte, durante el aprendizaje de las matemáticas, la graficación de funciones y realización de laboriosos cálculos, en ocasiones convertidas en intenciones frustradas, pueden ser determinantes para la mejor comprensión y aprehensión de conceptos y resultados. Por otra parte, en el quehacer matemático las gráficas o resultados numéricos pueden ser reveladores de situaciones o fenómenos interesantes. En el presente artículo la gráfica de las sumas parciales de la serie armónica, la cual obtuvimos con *Mathematica*, juega este papel dual: nos permite descubrir el comportamiento asintótico de la serie armónica y ayuda al aprendizaje del resultado matemático correspondiente. Si bien la gráfica no muestra el resultado de manera estricta, y mucho menos una demostración, si comunica el significado del comportamiento asintótico de la serie.

Es usual que los libros de texto universitarios atiendan principalmente la divergencia a infinito de esta serie, probablemente porque la prueba se reduce a una agrupación adecuada de sus términos y el comportamiento asintótico requiere un poco más de teoría sobre sucesiones. Por esta razón, además de ilustrar gráficamente el comportamiento asintótico, presentamos una prueba analítica, misma que ha sido inspirada en las propiedades gráficas. La divergencia a infinito se obtiene como corolario inmediato de este comportamiento.

Divergencia de la serie armónica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Es conocido el hecho de que la serie armónica diverge a infinito. La prueba que comúnmente se encuentra en los libros de texto, se basa en la siguiente agrupación de sus términos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \cdots$$

Precisemos cómo se construye esta agrupación. Cada expresión entre paréntesis es de la forma

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \frac{1}{2^{k-1}+2^{k-1}} \\ &= \frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^k} \end{aligned}$$

para $k \geq 1$.

Por ejemplo, para $k = 1$ obtenemos el término $\frac{1}{2}$. Para $k = 2$obtenemos $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, etc.

La expresión anterior define la sucesión $c_1, c_2, c_3, \dots$ El primer término de la serie que es igual a 1 no está incluido en esta sucesión, para incluirlo definamos $c_0 = 1$.Observemos que para $k \geq 1$,la fórmula para c_k tiene $2k^{-1}$ sumados, de los cuales el menor es $\frac{1}{2^k}$, así que

$$c_k \geq 2\,k^{-1}\,\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \quad (k \geq 1).$$

Pero también es cierto que , por lo tanto tenemos

$$\sum_{n=1}^{2^m} \frac{1}{n}, = \sum_{k=0}^{m} c_k \geq \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \frac{1}{2}}_{\text{m + 1 veces}},$$

es decir

$$\sum_{k=0}^{m} c_k \geq \frac{m+1}{2}$$

Por lo tanto

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} c_k \geq \lim_{m\to\infty} \frac{m+1}{2} = \infty$$

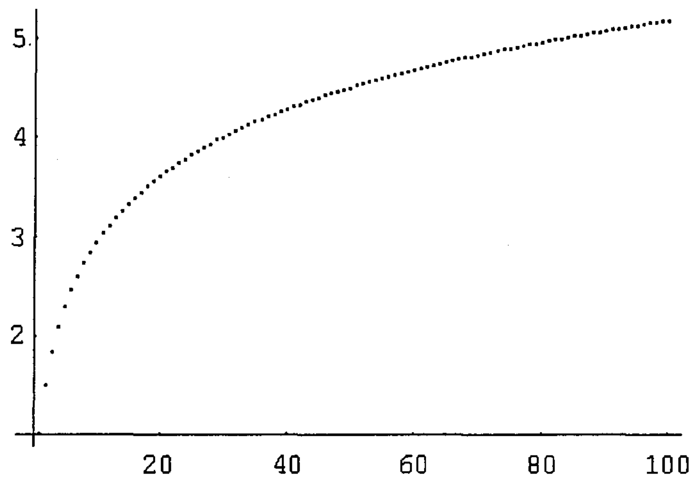
De donde

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim \sum_{k=1}^{m} c_k = \infty.$$

Esto prueba que la serie armónica diverge a infinito.

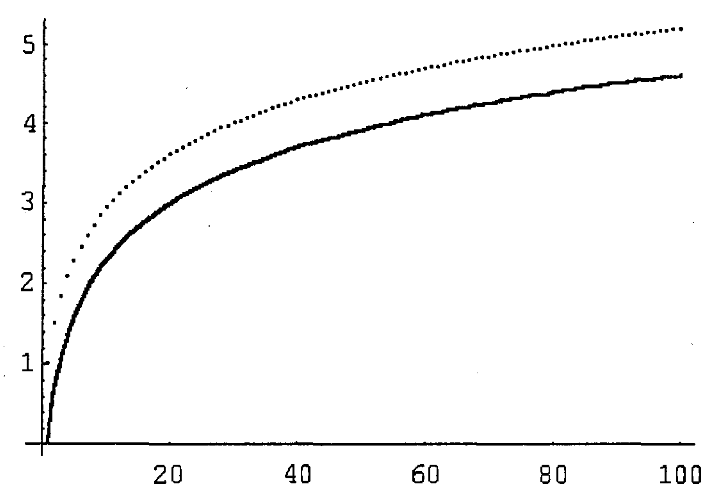
Representación gráfica. Una conjetura. La divergencia a infinito de una sucesión creciente puede darse con diferentes "velocidades", por ejemplo $x_m = \log m$ tiende a infinito más lentamente que $y_m = e^m$ y la divergencia de esta última todavía es más lenta que la sucesión $z^m = e^m$. Esto lo deducimos de la comparación de las funciones $x(t) = \log t$, $y(t) = t^2$ y $z(t) = e^t$,pero las gráficas correspondientes dan cuenta de ello.

Para tener una idea sobre cómo tiende a infinito la serie armónica, grafiquemos la sucesión de sumas parciales $s_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}$. La siguiente gráfica la obtuvimos con *Mathematica* haciendo $m = 1, \dots ,100$.



Si bien se trata de un conjunto discreto de puntos, éstos "describen" una curva muy parecida a la familiar gráfica de $y = \log x$, ¿no le parece?

Graficando en el mismo sistema de ejes cartesianos la función $y = \log x$, obtenemos



Según la figura, podríamos conjeturar que los puntos de la sucesión se encuentran sobre una traslación de la gráfica de $y = \log x$. En la siguiente sección analizamos esta situación.

Comportamiento asintótico. Constante g **de Euler**. La gráfica anterior sugiere que estudiemos la diferencia

$$s_n - \log n = 1 \ \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n,$$

Dado que $\log n$ podemos representarlo por

$$\log n = \int_n^1 \frac{1}{u} du,$$

con el propósito de combinar este término con la sumatoria

$$\frac{1}{2} \cdots + \frac{1}{n},$$

expresemos cada sumando como una integral definida apropiada. Esto lo hacemos en la siguiente proposición, en donde denotamos por la parte entera de x, esto es, el mayor entero que no excede a x. Por ejemplo, y .

Proposición. Para todo entero $n \geq 2$, tenemos

$$(1) \int_{n-1}^{n} \frac{[x]}{x^2} dx = \frac{1}{n},$$

$$(2)\ 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \operatorname{long} n = 1 + \int_1^n \frac{[x] - x}{x^2} dx$$

DEMOSTRACION:

PRUEBA DE 1): Dado que $[x] = n-1$ para tenemos

$$\int_{n-1}^{n} \frac{[x]}{x^2} dx = \int_{n-1}^{n} \frac{n-1}{x^2} dx$$

$$= (n-1) \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{n-1}^{n}$$

Por lo tanto

$$\int_{n-1}^{n} \frac{[x]}{x^2} dx = \frac{1}{n}.$$

Esto prueba el inciso 1).

PRUEBA DE 2): Del inciso 1) se sigue

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \operatorname{long} n = 1 + \int_1^2 \frac{[x]}{x^2} dx + \cdots + \int_{n-1}^{n} \frac{[x]}{x^2} dx - \int_1^n dx$$

$$= 1 + \int_1^n \frac{[x]}{x^2} dx - \int_1^n \frac{1}{x} dx.$$

Es decir.

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \operatorname{long} n = 1 + \int_1^n \frac{[x] - x}{x^2} dx.$$

Esto prueba el inciso (2) y por lo tanto la proposición.

Dado que para todo entero positivo n se cumple

$$\left|\int_1^n \frac{[x]-x}{x^2}\right| \leq \int_1^n \left|\frac{[x]-x}{x^2}\right| dx \leq \int_1^n \frac{1}{x^2}\, dx = 1 - \int_1^n \frac{1}{n},$$

tenemos

$$\int_1^n \left|\frac{[x]-x}{x^2}\right| dx \leq 1$$

para toda , por lo tanto, se sigue de los teoremas sobre integrales impropias (Apostol 1967, pág. 418) que la integral

$$\int_1^\infty \left|\frac{[x]-x}{x^2}\right| dx \tag{1}$$

es convergente.

La existencia de la integral impropia (1) implica a su vez la existencia del límite

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right] = 1 + \int_1^\infty \frac{[x]-x}{x^2}\, dx \tag{2}$$

Otra prueba de este hecho también aparece en Apostol (1967, págs. 404-405), Rivera (1993, págs. 50-52) y a nivel de problema es planteado en Spivak (1980, pág. 430)

El límite del miembro izquierdo de (2) es conocido como la CONSTANTE γ DE EULER y, según la relación anterior, podemos expresarla como

$$\gamma = 1 + \int_1^\infty \frac{[x]-x}{x^2} dx = 1 - \int_1^\infty \frac{[x]-x}{x^2}\, dx.$$

A continuación presentamos los primeros 24 decimales de γ, los cuales obtuvimos con *Mathematica*:

$$\gamma = 0.577215664901532860606512\ldots$$

Es notable que a la fecha aún no se sabe si g es racional o irracional. La relación

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right] = 0$$

la describimos diciendo que la serie armónica $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}$ **tiende asintóticamente** a $\gamma + \log n$.

En lenguaje menos preciso, decimos que "a la larga" $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ es aproximadamente y escribimos

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \simeq \gamma + \log n,$$

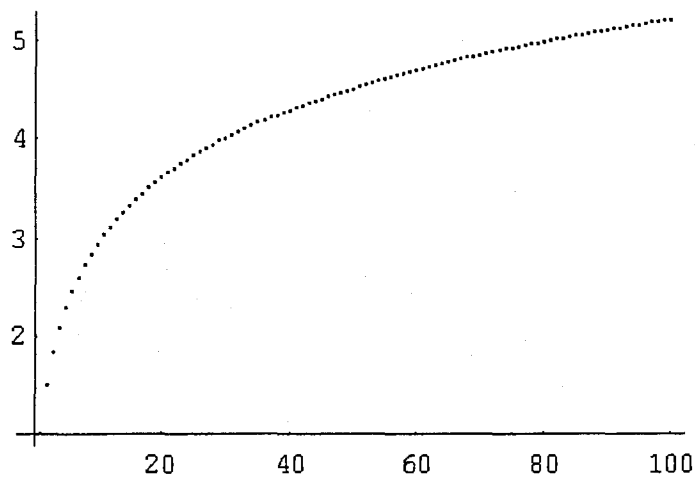
Por ejemplo, si deseamos calcular la suma para n = 1000, esto es $\sum_{k=1}^{1000} \frac{1}{k}$, podemos usar como aproximación

$$\gamma + \log 1000 = \gamma + 3\log 10 \approx 0.577 + 3(2.3) = 7.487.$$

El valor que se obtiene con *Mathematica* para la suma es 7.48547, así que el valor que hemos obtenido es bastante aproximado a este último.

Tenemos entonces que para n "grande", los puntos correspondientes a la sucesión sn = $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, se encuentran aproximadamente sobre la gráfica de la función $f(x) = \gamma + \log x$. Esta se obtiene trasladando hacia arriba la gráfica de log x una cantidad γ, como lo habíamos conjeturado a partir de las gráficas que obtuvimos con *Mathematica.*

En la siguiente figura presentamos conjuntamente la gráfica de la sucesión y la de la función , donde se muestra el comportamiento asintótico de la serie. Observemos que en nuestra escala, para $n = 40$ los puntos de la serie se encuentran prácticamente sobre la curva.



Referencias.

Apostol, T. M. (1967), *Calculus*, Vol. 1, Second Edition, John Wiley, New York

Rivera, A. (1993), *Lecturas Sobre Sucesiones y Series Infinitas*, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, México, D.F.

Spivak, M. (1980), *Calculus*, Second Edition, Publish or Perish, Inc., Berkeley, CA.

El ordenador en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas: una propuesta

Fecha de recepción: Marzo, 1998

José María Gavilán Izquierdo y Ricardo Barroso Campos
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Sevilla, Sevilla, España
gavilan@cica.es, rbarroso@cica.es

NOTAS DE CLASE

Educación Matemática
Vol. 11 No. 2 Agosto 1999
pp. 95-103

Resumen. *Los autores consideramos fundamental el incorporar las herramientas informáticas al proceso de formación de profesores de Matemáticas. Hacemos una reflexión sobre cómo utilizarlas, y acerca del lugar que deben de ocupar. Este enfoque teórico lo concretamos en dos ejemplos del uso que podemos hacer de estas herramientas dentro de la ense anza/aprendizaje de las Matemáticas.*

Abstract. *The authors we consider fundamental to incorporate it the data processing tools into process of teachers training of Mathematics. We make a reflection on how to use them, and about of the place that they should of occupying. This theoretical approach we fulfill it in two examples of the use that be able to do of these tools within the teaching and learning of the Mathematics.*

Introducción

Los autores de este artículo queremos manifestar la importancia de introducir en los programas de formación de profesores (en Matemáticas y en Didáctica de las Matemáticas) la utilización del ordenador. No sólo consideramos necesario introducirlo como un material didáctico, sino que consideramos que para una verdadera integración es necesario utilizarlo para "hacer" matemáticas y para dar significado a las reglas y hechos matemáticos. Los profesores no sólo deben conocer la materia (en este caso las matemáticas), también deben conocer cómo enseñarla, aspecto que incluye el conocimiento sobre cómo trasladar las nociones matemáticas a formas comprensibles para los alumnos (Conocimiento Didáctico del Contenido, Marcelo 1995; Blanco 1996), siendo los Sistemas de Cálculo Simbólico (SCS en adelante) y los programas de simulación geométrica un buen vehículo para ello. Son coadyuvantes en la labor del profesor de matemáticas, tanto en el trabajo de planificación como en actuación en el aula.

Podemos introducir en esta situación de formación lo que denominaremos contexto pedagógico que podemos describir como sigue "los estudiantes para profesor no sólo deben saber utilizar los conceptos matemáticos en situaciones de la vida cotidiana (contextos significativos para sus alumnos), sino que los propios conceptos matemáticos forman parte de su vida cotidiana (contexto significativo para el profesor). En este contexto tiene sentido el estudio *per se* de los conceptos matemáticos.

Utilizaremos dos ejemplos para mostrar las ideas que presentamos en este artículo. El software que utilizamos es un SCC como Derive y un programa de simulación para geometría, Cabri II. El primero de ellos es una herramienta para las matemáticas cuya finalidad no es educativa que integra elementos de tres tipos:

- Elementos de cálculo: numérico, matricial, y funcional.
- Elementos de representación gráfica: tanto en dos como en tres dimensiones; el propio sistema detecta el tipo de gráfico a utilizar.
- Elementos de programación, siendo poco versátil y limitado a aspectos funcionales fundamentalmente.

El segundo de ellos es un programa expresamente diseñado para el aprendizaje de la Geometría. Permite realizar "construcciones" geométricas que van más allá de los meros dibujos realizados con lápiz y papel. En las construcciones se conservan invariantes las propiedades al manipular los objetos que aparecen en las mismas. Intentamos sacar el máximo rendimiento de cada uno de ellos en los aspectos que pueden beneficiar el aprendizaje matemático dentro del contexto pedagógico, sin insistir en las posibilidades de tipo procedimental que presentan los SCS:

suministrar ejemplos,

dar significado a conceptos definidos simbólicamente,

generar y aceptar/rechazar conjeturas (respondiendo a preguntas del tipo "¿qué ocurre si..."),

producen un rápido feedback en la interacción alumno-medio-contenido,

manejar simultaneamente distintas representaciones, y

establecer conexiones.

Esta combinación de software no es extraña en proyectos para utilizar el ordenador en la enseñanza de las matemáticas (Artigue y Lagrange, 1997; Schumann, 1997 y Bowers, 1997).

Un primer paso: Bases teóricas

Todos los ligados de alguna forma a la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas (profesores, investigadores, en definitiva educadores matemáticos) somos conscientes de las dificultades que encierra. Pueden alegarse muchas causas, pero en una estamos casi todos de acuerdo, la naturaleza de algunos conceptos matemáticos, su grado de abstracción, y los procesos inherentes a la formación/construcción de los mismos; por ejemplo, el concepto de función, con sus diferentes representaciones (verbal, gráfica, algebraica o tabla de valores), los conceptos asociados (idea de variable, covariación, dominio...), su doble vertiente proceso-objeto (Dubinsky, 1991) u operacional-estructural (Sfard, 1991).

Si tenemos en cuenta que los conceptos matemáticos se forman a partir de la experiencia con ejemplos y contra ejemplos del mismo y que de esta manera los estudiantes forman la imagen del concepto (concept image), que abarca la estructura cognitiva completa que está asociada con el concepto, que incluye todas las representaciones mentales y propiedades y procesos asociados (Tall, 1992). El concepto imagen es el que es evocado para resolver problemas (Tall y Vinner, 1981). Dentro del programa de formación de profesores (y en todo ámbito de la enseñanza de las Matemáticas) debemos ayudar a construir una amplia imagen del concepto y a este fin contribuyen las herramientas informáticas suministrando ejemplos y contra ejemplos no prototípicos, elementos básicos para la intrucción de las matemáticas. La selección de ejemplos es un arte en la enseñanza de las matemáticas (Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990).

Skemp (1971) señaló que los conceptos matemáticos no son conceptos primarios en el sentido de que provengan directamente del entorno, sino que son conceptos de orden superior, es decir los propios ejemplos del concepto ya son difíciles de comprender. Es necesario por lo tanto utilizar varios ejemplos y contra ejemplos para abstraer de los mismos los elementos comunes. Podemos denominar abstracción de la invarianza a este proceso. Es un proceso clave para la formación de las nociones matemáticas.

Ahora bien si los conceptos y nociones matemáticas necesitan ejemplos para su comprensión ¿cómo suministrar los mismos a los estudiantes?. Una primera respuesta puede venir a través de los materiales, que en sentido amplio incluyen los programas de software; además estos materiales deben formar parte de los contenidos de formación de profesores (Fennema y Franke, 1992).

Pensamos que la utilización de SCS, tales como Derive, Maple, Mathematica, nos permiten que la instrucción se centre en la comprensión de los conceptos y procedimientos, dejendo en un segundo plano el aspecto instrumental/procedimental de los algoritmos. Parte fundamental de este cambio es el papel desempeñado por las diferentes representaciones de los conceptos. Con los SCS pueden utilizarse representaciones distintas de la algebraica, tales como las representaciones gráficas, pudiendose establecer conexiones entre ellas no imaginadas hace una década. Los SCS nos permiten utilizar representaciones gráficas que con los métodos algebraicos eran inalcanzables (por tiempo, dificultades...).

Dugdale (1993) considera que la más espectacular y extensa influencia sobre el trabajo de los alumnos con funciones y gráficas ha sido la reciente proliferación de programas de ordenador con herramientas gráficas, tales herramientas han facilitado el moverse desde centrarse en el cálculo y representación de valores concretos a centrarse en la gráfica de la función. El diseño de tareas debe buscar la complementaridad entre los distintos modos de representación, huyendo de la compartimentación de las distintas representaciones.

No sólo los SCS están permitiendo esta atención a la comprensión y al establecimiento de conexiones y traslaciones entre distintos sistemas de representación, programas de simulación geométrica, tales como Cabri-Géomètre II, juegan un papel muy importante en el terreno de los conceptos geométricos y en la posibilidad de establecer conexiones entre la geometría y el álgebra. Estos programas se basan el dinamismo de las figuras y en la conservación de las propiedades y relaciones.

En este sentido Schwartz (1994) considera que la geometría puede ser enseñada y aprendida en entornos informáticos. Pone como ejemplo el caso de las tres medianas de cualquier triángulo que se cortan en un punto. La dificultad que nos encontramos es que no es posible dibujar cualquier triángulo, sino un triángulo concreto. El software geométrico puede solventar este problema, ya que permite desplazar cualquier vértice del triángulo y conservar las relaciones. El programa permite de este modo dibujar "cualquier" triángulo.

Subyace el principio de variabiliad matemática: los conceptos matemáticos que encierren más de una variable deben ser estudiados mediante experiencias que supongan el manejo del mayor número de variables (Dienes, 1970).

La utilización de forma regular del ordenador en las clases de matemáticas trae consigo un cambio en las tareas a realizar por los alumnos en todos los niveles, incorporar el ordenador para plantearse cuestiones distintas y las cuestiones tradicionales se pueden contemplar desde otro punto de vista. La inclusión de nuevas tecnologías conlleva un cambio en el currículum. Un intento de reformulación puede encontrarse en Addenda Series (NCTM; 1995): Algebra in a technological world, donde se plantea organizar el álgebra escolar entorno al concepto de función, familias de funciones y modelización matemática.

Con un SCS los alumnos pueden explorar la gráfica de una función como si dispusiesen de un microscopio para examinar las propiedades locales; pero también pueden estudiar el comportamiento global como si del gran angular de una cámara fotográfica se tratase. Pueden con un software como Cabri, plantearse situaciones geométricas y formular conjeturas impensables sin él. Además puede ayudar a los alumnos a compensar las dificultades que encuentren en el aspecto procedimental, permitiéndoles continuar el aprendizaje (Artigue, 1997).

En nuestra opinión, Dubinsky (1996) plantea uno de los más importantes motivos para usar el ordenador en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: dar existencia a los conceptos matemáticos y a sus representaciones de forma que sean manejables y útiles. El ejemplo propuesto para Derive, muestra cómo considerar una función como un objeto susceptible para ser manipulado.

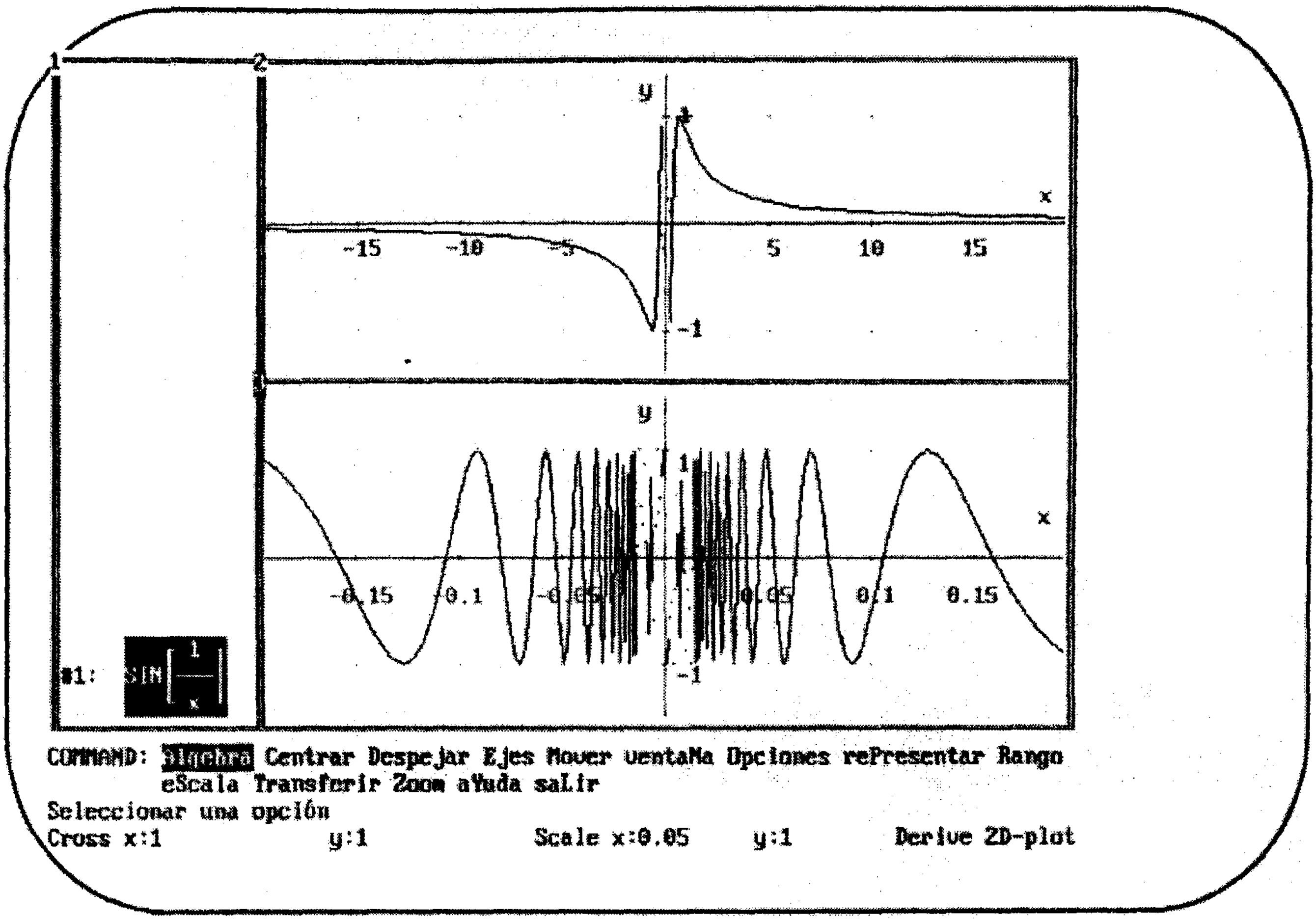
A pesar del entusiasmo que podemos reflejar al escribir este artículo y al hacer innovaciones curriculares en el programa de formación de profesores, somos conscientes de que usar el ordenador en el aula de matemáticas puede causar algunos problemas y desajustes entre lo que pretendemos y lo que ocurre.

Un primer problema es que los alumnos se centren más en el instrumento (ordenador y software) que en el propio contenido. Este problema puede aparecer siempre que se presenta algún tipo de innovación para la relación con el contenido matemático. Otro problema que se puede plantear son las propias limitaciones del software en relación al contenido matemático. En este sentido es el propio contenido matemático el que puede paliar las deficiencias de los programas así como el perfeccionamiento de los mismos. La investigación y el debate dentro de la comunidad científica planteará soluciones a estos y otros problemas que se plantean. El esfuerzo que requiere pensamos que merece la pena.Ya que es preciso que se planteen estas cuestiones y dar pasos hacia adelante. Sólo a través del planteamiento de problemas y la búsqueda de soluciones es posible la construcción del conocimiento.

Segundo paso: Ejemplos concretos

En este apartado vamos a considerar dos ejemplos de cómo puede emplearse para la comprensión matemática el software al que nos hemos referido anteriormente. Los dos programas han sido utilizados en cursos de matemáticas a nivel universitario con estudiantes para profesor de Educación Primaria, en cursos de formación inicial y permanente de profesores de Enseñanza Secundaria, y tienen plena cabida en la Enseñanza Secundaria.

Ejemplo 1. Estudio gráfico de la conducta de una función (no definida en 0 y con una discontinuidad no evitable), conducta local en un entorno de cero y conducta en el infinito (comportamiento asintótico, se le da significado gráfico a la noción de rama infinita, que en lenguaje algebraico viene determinada por un límite). Esta tarea es impensable sin utilizar un SCS.



Para esta tarea hemos utilizado tres ventanas, la primera algebraica para introducir la función sen(1/x) y las otras dos gráficas de tipo 2D. Para poder hacer este análisis hemos utilizado diferentes escalas en las ventanas según el objetivo perseguido.

Para definir las ventanas 2 y 3, hemos utilizado el siguiente árbol de comandos: *ventaNa*, *Seccionar*, *Verticalmente*, en la columna *18.* De esta forma obtenemos una ventana algebraica, que pasamos a ella con *ventaNa, siguieNte* que definimos gráfica de 2D con *ventaNa*, *Definir*, *2D-plot.* Dentro de la ventana 2, seccionamos de nuevo, pero horizontalmente, en la fila *12*, obteniendo así la tercera.

Para representar la función en las ventanas 2 y 3, utilizamos el comando *rePresentar*. El cambio de escalas se realiza con el comando *eScala*, introduciendo el factor de escala en cada eje. En la ventana 2, para el eje x es 5, y el eje y es 1. En la ventana 3 el factor puede "leerse" en la figura, ya que es la ventana activa. También es posible utilizar el comando *Zoom.* Si sólo hubiesemos utilizado la representación de la ventana 2 o de la ventana 3, la gráfica de la función no sería correcta. De forma inocente utilizar una única ventana puede servir para "ilustrar" la ilusión de esta forma de representar funciones.

Según el trabajo de Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990) esta tarea se clasifica como tarea de interpretación con escalas.

Ejemplo 2: Vamos a resolver el siguiente problema:

Consideremos todos los triángulos de base constante 8 cm. y con perímetro 20 cm., ¿cuál tiene mayor área?

El programa de simulación geométrica Cabri II permite el análisis y resolución de este problema.

Fase 1.

Comenzamos construyendo un segmento mediante el comando *Segmento*. Con *Etiqueta*, denominemos A y B sus extremos. Midiéndolo con el comando *Distancia y longitud* nos dará un valor, el cual al mover un punto del segmento con el *Puntero* podremos adecuar a 8 cm. Con el comando *Comentarios* podremos identificar Longitud AB este valor.

A continuación, con el comando *Triángulo*, tomando los vértices A y B del segmento construido como vértices del mismo, construiremos el triángulo con otro punto C, cuyo perímetro mediremos de forma automática mediante el comando *Distancia y longitud* que al acercar el cursor nos preguntará si lo queremos medir.

Tomando de nuevo el *Puntero,* al ir moviendo el vértice C, conseguiremos obtener el perímetro (20 cm.) deseado.

Ahora, mediante el comando *Área,* podemos medir el área del triángulo.

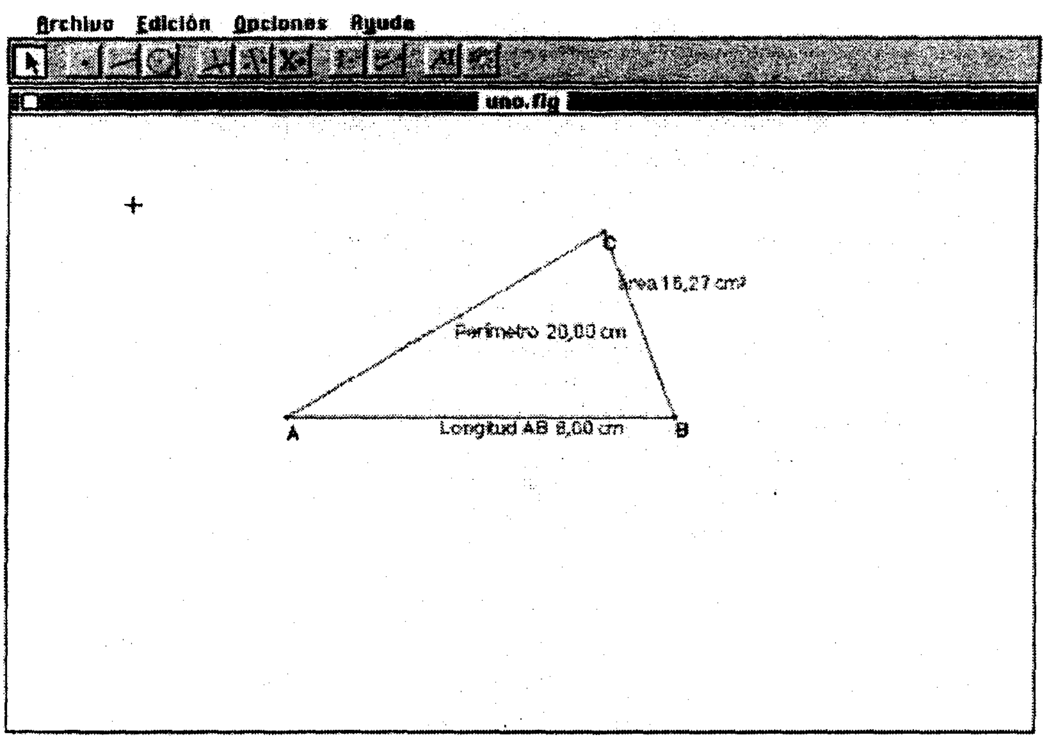


FIGURA 1

Tenemos así construido un primer caso particular del tipo de triángulo indicado en el problema. (Figura 1).

Fase 2.

Si "movemos" el punto C de manera que no se modifique el perímetro del triángulo, vemos cómo el área sí va siendo diferente.

Cabri II permite mediante el comando *Tabulación*, crear una tabla en la que ir anotando los valores que corresponden a las áreas de los distintos triángulos particulares que cumplen las restricciones del problema.

Al tener un determinado triángulo que tenga por base 8 cm. y perímetro 20 cm., marcaremos con *Punto* el correspondiente punto, que iremos etiquetando como C1, C2, C3, C4, ... e iremos tabulando. (Figura 2).

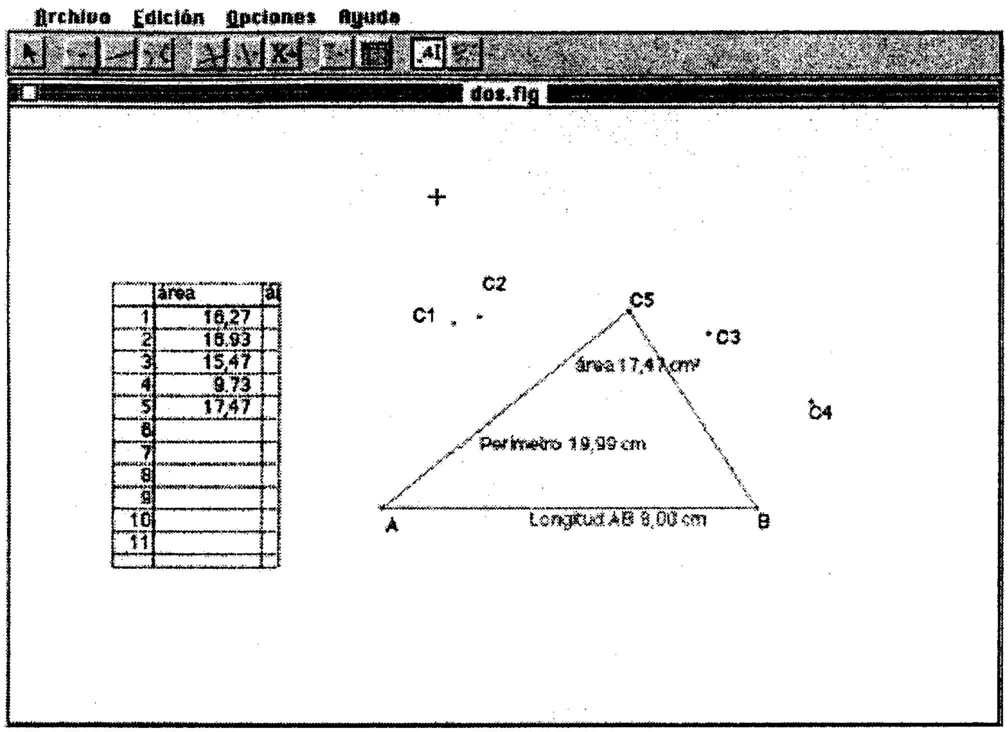


FIGURA 2

Fase 3.

Los puntos C1, C2, C3 ... que hemos ido construyendo en la pantalla, ¿definen algún tipo de cónica?

Para responder a esta pregunta, Cabri II dispone de un comando denominado *Cónica* que con cinco puntos determina el tipo de cónica que los contiene.

En este caso, determinan una elipse, como lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a los puntos A y B es constante e igual a 12 cm.

La correspondiente elipse permite ver la solución del problema. El triángulo de mayor área es el isósceles cuyo tercer vértice está situado sobre le elipse en el semieje menor. (Figura 3)

Así pues el área máxima es :

$$\frac{8\sqrt{20}}{2}\text{cm}^2 = 4 * 2\sqrt{5}\,\text{cm}^2 \approx 17.84 \text{ cm}^2$$

Agradecimientos: A los árbitros por sus comentarios que han permitido mejorar este trabajo. Los errores que se puedan encontrar son responsabilidad de los autores.

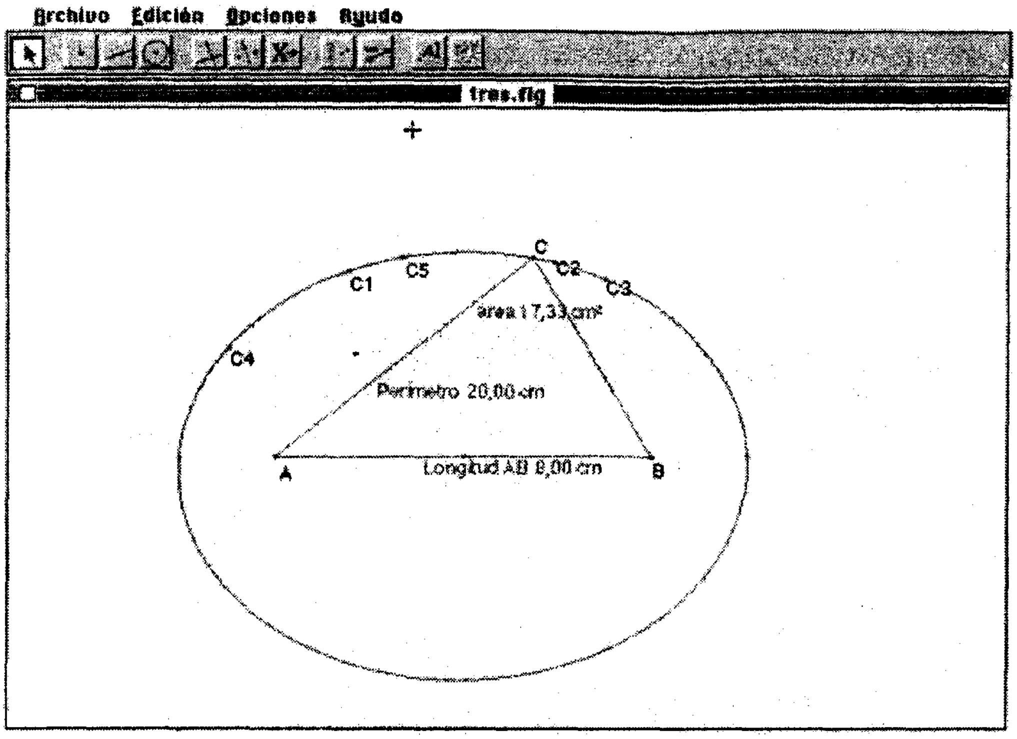


FIGURA 3

BIBLIOGRAFÍA:

Artigue, M. (1997): Le logicel "Derive" comme revelateur de phénomenès didactiques liès a' l'utilisation d'environnements informatiques pour l'aprentissage. Educational Studies in Mathematics, nª 2, volumen 33, pp 133-169.

Artigue M. Y Lagrange B. (1997): Pupils learning algebra with DERIVE. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 97/4, pp 102-105.

Blanco L. (1996): Aprender a enseñar geometría. Una experiencia en la formación inicial del profesorado de Primaria. Epsilon nº 34, volumen 12(1), pp 47-57.

Bowers, D. (1997): Opportunities for the use of computer Algebra System in Middle secondary Mathematics in England and Wales, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 97/4, pp. 113-117.

Cabri Géom tre II (1996) [Programa de software] Texas Instruments, Netherlands.

Derive (1996) [Programa de software, versión 4.06] Soft-Warehouse, Inc. Honolulu, Hawaii.

Dienes, Z. P. (1970): La construcción de las matemáticas. Editorial Vicens-Vives, Barcelona.

Dubinsky, E. (1991): Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, en Tall, D. (Ed.) Advanced Mathematical Thinking. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Dubinsky, E. (1996): Aplicación de la perspectiva piagetiana a la Educación Matemática Universitaria. Educación Matemática, volumen 8, nº 3, pp. 24-41.

Dugdale, S. (1993): Functions and graphs-Perspectives on student thinking, en Romberg, T; Fennema, E y Carpenter, T (Eds) Integrating Research on the graphical representation of functions. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey.

Fennema, E. y Franke, M.L. (1992): Teachers' Knowledge and its impact, en Grows D. (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning. Nacional Council of teachers of Mathematics, Mc Millan, Reston, Virginia.

Leinhardt,G.; Zaslavsky, O. y Stein M. K. (1990): Functions, Graph, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. Review of Research i education, Vol 16, nº 1, pp 1-64.

Marcelo, C. (1995): Investigación sobre formación del profesorado: el conocimiento sobre aprender a enseñar, en Blanco L. Y Mellado V. (Coordinadores) La formación del profesorado de Ciencias y Matemáticas en España y Portugal. Departamento de Didáctica de la Ciencias Experimentales y Matemáticas, Universidad de Extremadura.

National Council of Teachers Mathematics (1995): Algebra in a technological world (addenda Series). NCTM, Reston, Virginia.

Schwartz, J. (1994): The role of research in reforming Mathematics Education: a Different aproach, en Schoenfeld A. (Ed) Mathematical Thinking and Problem Solving. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey.

Schumann, H. (1997): New Standards for the solution of geometric calculation problems by using computers, en Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 97/5, pp 155-161.

Sfard, A. (1991): On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as differents sides of the same coin, en Educational Studies in Mathematics, 22, pp. 1-36.

Skemp, R. (1980): Psicología del aprendizaje de las matemáticas. Ediciones Morata, Madrid.

Tall, D (1992): The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof, en Grows D. (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning. Nacional Council of teachers of Mathematics, Mc Millan, Reston, Virginia.

Tall, D. Y Vinner S. (1981): Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics 12, pp. 151-169.

NOTAS DE CLASE

Educación Matemática
Vol. 11 No. 3 Diciembre 1999
pp. 104-119

Valoración de los ejercicios en las pruebas de rendimiento escolar[1]

Fecha de recepción: Noviembre, 1998

Horacio Félix Attorresi, María Silvia Galibert y María Ester Aguerri
Instituto de Investigaciones, Facultad de Psicología
Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina
hattorre@psi.uba.ar, galibert@psi.uba.ar,
maguerri@psi.uba.ar

Resumen. *El presente trabajo trata sobre el modo en que conviene ponderar los ítemes en la elaboración de la calificación para un mejor aprovechamiento de la información obtenida con una prueba de rendimiento. Se explica la metodología después de introducir algunos conceptos elementales y se ilustra con un ejemplo de aplicación a datos reales. La metodología que se propone se fundamenta en uno de los modelos de la Teoría de Respuesta al Ítem (TRI), que constituye un enfoque psicométrico más moderno que la Teoría Clásica de Tests (TCT). El propósito de este trabajo es explotar las ventajas de una y otra y usar la relación entre ellas para obtener una buena ponderación de los ítemes de una prueba. La metodología consiste en utilizar los pesos óptimos que provee la TRI y calcularlos aproximadamente usando coeficientes definidos en el marco de la TCT.*

Abstract. *This paper describes the most convenient method for item weighing to be applied when a score system is devised, in order to attain a better use of the information collected with a performance test. The methodology is explained after introducing some basic concepts and an example of application to actual data is provided. The methodology advanced is based on one of the Item response Theory (IRT) models, which is a more up-to-date psychometric approach than the Classical Tests Theory (CTT). The objective of this work is to take advantage of the best aspects of both theories and to use their relationship so as to reach a good weighing of test items. The methodology consists in using the optimum weights provided by the IRT and to calculate them using coefficients defined within the frame of the CTT.*

Introducción

Una etapa importante en el proceso de enseñanza - aprendizaje es la evaluación del rendimiento. Sin duda el "buen criterio" del profesor es insustituible en la elección de

[1] La investigación que se presenta en este artículo fue realizada con subsidios de la Universidad de Buenos Aires (UBACyT TP02), del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET PIP4423) y de la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (PICT04-04704).

los contenidos por evaluar, en el modo de formulación de las preguntas y en la manera de asignar una calificación en función de las respuestas de los alumnos; pero algunas técnicas que proporciona la psicometría pueden mejorar considerablemente la calidad del proceso de evaluación. Ha de tenerse conciencia de que dicha evaluación es el resultado de una "medición" cuya calidad depende no sólo de la bondad del instrumento —la prueba— sino también del aprovechamiento de la información obtenida de la misma a la hora de asignar las calificaciones.

La construcción de buenos instrumentos de medición requiere de dos etapas: la elaboración propiamente dicha, cuyos criterios de diseño pueden hallarse en Ebel (1977), Mehrens y Lehmann (1982), y el análisis posterior de la misma a partir de los resultados observados una vez que fue administrada a un conjunto de sujetos. El análisis de la prueba se lleva a cabo con auxilio de la estadística y el más sencillo, accesible aún para legos en la materia, consiste en examinar algunos índices básicos que provee la Teoría Clásica de Tests (TCT). Ésta se desarrolló sobre la base del modelo lineal de puntuaciones de Spearman (1904) y ha alcanzado gran difusión. Al respecto pueden consultarse Cortada de Kohan (1968), Muñiz (1992) y Santisteban Requena (1990).

Una vez que la prueba es administrada, el profesor debe decidir qué calificación asignar a cada alumno según su desempeño. Un criterio usual y simple es clasificar cada respuesta como correcta o incorrecta y obtener la calificación como el número de respuestas correctas transformada en la escala vigente de calificaciones; por ejemplo, si la prueba consiste de veinte ejercicios y la escala de calificaciones es de 0 a 10, al alumno que tiene 14 respuestas correctas se lo califica con 7. Este criterio otorga a cada ejercicio o ítem el mismo peso: todos valen igual. Pero si las preguntas tienen distintos grados de dificultad el profesor puede considerar razonable asignarles puntajes diferentes y darles más "peso" en el puntaje total a unos ítemes que a otros. Los profesores suelen asignar estos pesos con un criterio que depende fundamentalmente de su experiencia, por cierto valiosa, pero no totalmente objetiva.

El presente trabajo trata sobre el modo en que conviene valorar cada ejercicio para un mejor aprovechamiento de la información obtenida con la prueba. Se explica la metodología después de introducir algunos conceptos elementales y se ilustra con un ejemplo de aplicación a datos reales. La metodología que se propone se fundamenta en uno de los modelos de la Teoría de Respuesta al Ítem (TRI). Esta teoría constituye un enfoque psicométrico más moderno que la TCT. Sobre la base de trabajos pioneros, fue desarrollada por separado por Birnbaum (1968) y Rasch (1960). No es el propósito de este trabajo ahondar en la comparación de ambas teorías sino explotar las ventajas de una y de otra, más aún, la relación entre ellas, para obtener una conveniente valoración de cada ejercicio de una prueba. Si bien la TRI es desde el punto de vista teórico superior a la TCT y posibilita interesantes aplicaciones que detalla Lord (1980), en contrapartida requiere de un trabajo computacional mayor que hace imprescindible el uso de softwares específicos —fuera del alcance de la mayoría de los profesores— y de un gran número de sujetos a los cuales administrar la prueba. Sin embargo, bajo ciertas condiciones que serán señaladas oportunamente, ambas teorías pueden relacio-narse y así aproximar ciertos resultados de la TRI, difíciles de obtener, mediante la TCT. La metodología consistirá, por tanto, en utilizar los pesos óptimos que provee la TRI y calcularlos aproximadamente usando coeficientes definidos en el marco de la TCT.

Modelos psicométricos

Modelo Lineal de Puntuaciones. Introducido por Spearman (1904), es la base de la Teoría Clásica de Tests. Su formulación es:

$$X = V + \varepsilon$$

donde

> X es el puntaje observado de un individuo, elegido al azar de una población, al administrarle un test.
> V es el puntaje verdadero que le correspondería a dicho individuo en el test si la medición se realizara sin error.
> ε es el error de medición.

Fijado el sujeto, su puntaje verdadero es un valor fijo pero tanto el puntaje observado como el error de medición varían aleatoriamente.

Definición

Se dice que dos conjuntos de puntuaciones X y X' son medidas paralelas si se cumple que

$$X = V + \varepsilon \quad y \quad X' = V' + \varepsilon' \quad \text{con} \quad V = V' \quad y \quad \mathrm{Var}(\varepsilon) = \mathrm{Var}(\varepsilon')$$

Supuestos

$E(\varepsilon/V) = 0$
$\mathrm{Var}(\varepsilon/V) = \mathrm{Var}(\varepsilon)$
$\mathrm{Cov}(\varepsilon, \varepsilon') = 0$ para toda medida paralela X'

Donde E(/), Var(/) y Cov son la esperanza condicional, varianza condicional y covarianza matemáticas respectivamente.

Inferencias acerca de las puntuaciones verdaderas

Si a los supuestos generales del modelo lineal se agrega el de la distribución normal bivariada de sus componentes X y V, pueden inferirse las puntuaciones verdaderas a partir de las observadas mediante la siguiente ecuación de regresión lineal:

$$V = E(V/X) = \rho_{XV}\frac{\sigma_V}{\sigma_X}(X - \mu_X) + \mu_V \qquad [1]$$

donde $\hat{V}$ es el puntaje inferido mediante la ecuación de regresión, es la correlación lineal entre los puntajes observados y los verdaderos, μ_x, μ_v, ρ_x y ρ_v son sus correspondientes medias y desviaciones estándar.

Índices característicos de los ítemes que componen un test

Son parámetros característicos de los ítemes que se utilizan en la etapa de construcción del test llamada "análisis de ítemes". Sobre la base de estos resúmenes se seleccionan los mejores ítemes para integrar un test a partir de pruebas piloto.

Índice de dificultad del ítem i (p_i)

Es la frecuencia relativa de respuesta correcta al ítem i. La interpretación es obvia, ya que estima la proporción de sujetos en la población que es capaz de contestar correctamente al ítem. Ebel (1977) y Hurtado de Mendoza (1982) recomiendan llamarlo índice de facilidad.

Coeficientes biserial puntual (r_{iX}), QEX y biserial (r_{iX})

El coeficiente biserial puntual r_{iX} es el coeficiente de correlación de Pearson[2] entre el ítem i (dicotómico) y el puntaje total en la prueba que lo contiene. Cuanto más alta es la correlación mejor representa el ítem a la prueba. Sin embargo, esta correlación se ve favorecida por la presencia del ítem en la prueba; para corregir esta influencia y tener una medida más real de su representatividad se calcula el índice QEX (Question Evaluation Index) que es el coeficiente de correlación Biserial Puntual entre el ítem y los puntajes totales de la prueba excluyendo al ítem.

El coeficiente biserial es la correlación de Pearson entre un ítem que no es dicotómico por naturaleza sino una dicotomización de una variable continua con distribución normal. Se relaciona con el biserial puntual mediante la siguiente expresión:

$$r_{iX} = r_{iX} \sqrt{p_i(1 - p_i)}/y$$

donde y es la ordenada correspondiente al valor de la puntuación típica en la curva normal que deja por debajo un área igual a $1 - p_i$.

Una manera sencilla de calcularlo es mediante la fórmula

$$r_{iX} = \frac{(\overline{X}_a - \overline{X}) \times p_i/y}{S_x} \qquad [2]$$

donde:

- $\overline{X}_a$ es el promedio de la cantidad de respuestas correctas de los individuos que contestaron bien al ítem.
- $\overline{X}$ es el promedio de la cantidad de respuestas correctas de los sujetos.
- p_i es el índice de dificultad definido por la TCT: el número de sujetos que respondieron correctamente al ítem dividido el total de sujetos.
- En la tabla del apéndice se encuentra el valor de p/y conociendo p. y es la ordenada correspondiente a la abscisa z en una distribución normal estándar que deja debajo de sí un área igual a $1 - p_i$.

[2] El coeficiente de corrleación de Pearson es una medida entre −1 y 1 para cuantificar el grado de relación lineal entre dos variables.

- S_x es el desvío estándar de la cantidad de respuestas correctas, cuya fórmula es

$$S_x = \sqrt{\frac{\Sigma X_i^2 - nX^2}{n}} \qquad [3]$$

donde:

- X_i es la cantidad de respuestas correctas del individuo i.
- X es el promedio de la cantidad de respuestas correctas de los sujetos.

El coeficiente biserial varía entre –1 y 1. Cuanto más alta es la correlación mejor representa el ítem a la prueba.

Índice de discriminación (ID_i)

Es de esperar que un ítem bien construido sea contestado correctamente con mayor frecuencia por los sujetos de puntajes superiores que por los de puntajes inferiores. Por ello se define

$$ID_i = (S-I)/T$$

donde S e I son el número de sujetos que contestan correctamente el ítem i correspondientes a los grupos de sujetos con puntajes superiores e inferiores respectivamente y T es la cantidad de sujetos de cada grupo. Este índice varía entre -1 y 1. Un ítem se acepta cuando el índice de discriminación es positivo y es mejor cuanto más cercano a uno. Existen distintos índices de discriminación según la regla empleada para determinar la cantidad T. D'Agostino & Cureton (1975) demostraron que el 21,5% maximiza el índice de discriminación.

- **Modelo Logístico deTres Parámetros.** Es uno de los modelos de la Teoría de Respuesta al Ítem. Su formulación es:

$$P_i(\theta) = c_i + \frac{1 - c_i}{1 + e^{-Da_i(\theta - b_i)}}$$

donde

θ es el rasgo latente que se desea medir con el ítem i, por ejemplo, el nivel de conocimientos alcanzados por un estudiante en un determinado tema. El origen y unidad de la escala de q son arbitrarios; es decir, están indeterminados.

$P_i(\theta)$: *función característica o de respuesta al ítem i.* Es la probabilidad de contestar correctamente el ítem i para un nivel dado de θ. Su gráfica se denomina *curva característica del ítem.*

b_i : *índice de dificultad del ítem i.* Coincide con el valor θ necesario para tener probabilidad $0,5+c_i/2$ de contestar correctamente el ítem i.

a_i: *índice de discriminación del ítem i.* Es proporcional a la pendiente de la recta tangente en el punto de inflexión de la curva característica del ítem, salvo el factor $1-c_i$.

c_i: *índice por azar del ítem i.* Es la probabilidad de contestar correctamente el ítem i cuando el nivel de habilidad θ tiende a $-\infty$. (Valor asintótico de $P(\theta)$).

D: es un factor de escala. Para $D = 1,7$, las curvas logísticas de los modelos de uno y dos parámetros difieren de las correspondientes al modelos de de ojiva normal[3] en menos de 0,01 para todos los valores de θ.

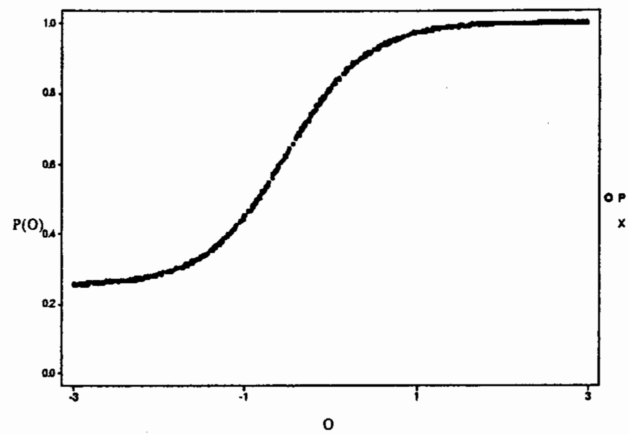


FIGURA 1. Curva característica de un item de parámetros a = 1,25 b = –0,5 c = 0,25

Cuando $c_i = 0$ se tiene el modelo de dos parámetros. En este caso el índice de dificultad b_i corresponde al nivel de θ necesario para tener una probabilidad de 0,5 de contestar correctamente el ítem y a_i resulta proporcional a la pendiente de la recta tangente en el punto de inflexión.

Si además todos los índices de discriminación coinciden, pueden considerarse iguales a 1, con lo que resulta el modelo de un parámetro o modelo de Rasch (1960).

Por rasgo latente se entiende una variable que por su carácter abstracto no es directamente observable; por ejemplo, algún tipo de capacidad como la habilidad matemática, la comprensión verbal, la inteligencia general o, como en la presente aplicación, el nivel de conocimientos (rendimiento) alcanzado por un estudiante. Un ítem será más difícil que otro si se requiere de un mayor nivel de habilidad o conocimiento para tener la misma probabilidad de responderlo correctamente; de allí que b exprese el índice de dificultad del ítem, ya que puede interpretarse como el nivel de rendimiento requerido para tener 0,5 de probabilidad de respuesta correcta en los modelos de uno o dos parámetros y $0,5 + c/2$ en el modelo de tres parámetros.

Cuanto mayor sea a, más variará la probabilidad de respuesta correcta por unidad de cambio en el nivel de rendimiento θ, lo que le da sentido a su interpretación como índice de discriminación.

Finalmente, c refleja la probabilidad de contestar correctamente por azar; por cuanto a niveles nulos de rendimiento ($-\infty$) corresponde alguna probabilidad $c > 0$ de respuesta correcta.

[3] Modelo de Ojiva Normal de Tres Parámetros:

Supuestos

Independencia local

Significa que la probabilidad de una determinada respuesta correcta al ítem para un valor dado de θ coincide con la probabilidad de dicha respuesta al ítem para el mismo valor de θ y de respuesta a cualquier subconjunto de ítemes $i_1, i_2, \ldots, i_k$. En lenguaje matemático,

Si $U_i = u_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, es la variable Bernoulli asociada a la respuesta al ítem i, entonces $P(U_i = u_i/\theta) = P(U_i = u_i/\theta, u_{i_1}, \ldots u_{i_k})$ $(i \neq i_1, \ldots, i_k)$ o, equivalentemente, $P(U_{i_1} = u_{i_1}, \ldots, U_{i_k} = uik/\theta) = P(U_{i_1} = u_{i_1}/\theta). \ldots .P(U_{i_k} = u_{i_k}/\theta)$ $(i_j \neq i_k$ si $j \neq k)$

Unidimensionalidad

La probabilidad de contestar correctamente a un ítem depende sólo de un factor, que es el rasgo latente. Por tanto, dicha probabilidad queda determinada para cada sujeto por su nivel del rasgo latente, nivel que se desea estimar por el proceso de medición.

Lo contrario de la unidimensionalidad es el "sesgo" de un ítem; esto es, que de dos sujetos con el mismo nivel del rasgo latente, uno tenga más probabilidad de responder correctamente que otro debido a que hay otro factor implicado.

Lord (1980) afirma que la unidimensionalidad no es un supuesto adicional a la independencia local, sino que ésta última se deriva necesariamente de aquélla.

Funciones de Información

La TRI permite obtener las funciones de información de los puntajes en una prueba y de cada ítem. La función de información del ítem i es

$$I_i(\theta) = P'^2_i(\theta) / P_i(\theta)Q_i(\theta)$$

donde $P'_i(\theta)$ es la derivada de la función característica $P_i(\theta)$ y $Q_i(\theta)$ es $1-P_i(\theta)$.

La función de información del puntaje total en la prueba es la suma de las funciones de información de los ítemes que la componen: $\Sigma P'^2_i(\theta)/ P_i(\theta)Q_i(\theta)$.

Ellas indican para qué niveles de rendimiento q de los sujetos, el puntaje asignado constituye una medición más precisa. Por ejemplo; si la función de información del puntaje en una prueba tuviera la forma de la figura 2, indicaría que medirá con mayor precisión a los sujetos de rendimiento medio.

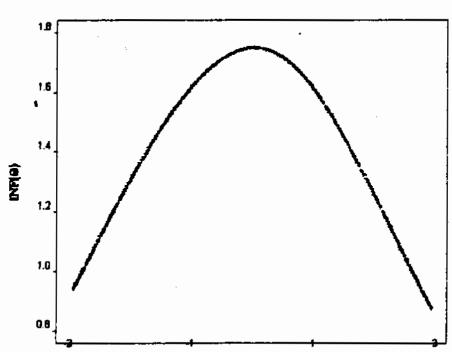


FIGURA 2. Función de información de un ítem

Aplicaciones de la Teoría de Respuesta al Ítem

En los modelos de la Teoría de Respuesta al Ítem se caracteriza a cada ítem en función de sus parámetros propios independientemente de cómo se distribuya el rasgo latente en la población de sujetos que los contestan y de cuáles sean las características del resto de los ítemes que componen el test mientras sean unidimensionales; es decir, mientras midan todos al mismo rasgo en una sola dimensión. Del mismo modo, la medida q característica de cada sujeto no depende de los parámetros de los ítemes ni de las medidas de los otros sujetos de la población. Es precisamente esta independencia entre el instrumento de medición y los sujetos de la misma lo que hace a la diferencia esencial entre los enfoques de la TCT y de la TRI y constituye su principal ventaja ya que, si se satisfacen los supuestos, se sigue que:

- Fijada una escala para θ, salvo fluctuaciones de muestreo, se obtiene la misma estimación del rendimiento de un sujeto cuando es medido por diferentes subconjuntos de ítemes, aún cuando éstos difirieran por ejemplo, en sus índices de dificultad. En la TCT, en cambio, la medida del sujeto es el puntaje verdadero V en un determinado test, la cual será más alta si el test es fácil que si es difícil.
- La estimación del rendimiento de un sujeto depende sólo de sus respuestas a los ítemes y no de las características del nivel de rendimiento en la población de respondentes, como ocurre en la TCT cuando se infieren los puntajes verdaderos mediante la expresión [1], que depende de la media y desvío estándar de los puntajes verdaderos en la población.
- A su vez, los parámetros de los ítemes tampoco dependen de los rendimientos de los sujetos que los responden como ocurre en la TCT donde, por ejemplo, el índice de dificultad —proporción de respuestas correctas al ítem— variaría entre dos poblaciones de estudiantes que, en promedio, difirieran en su desempeño.

Este enfoque permite, pues, interesantes aplicaciones que detalla Lord (1980); entre ellas:

- Elaboración de bancos de ítemes. Un banco de ítemes es un conjunto de ítemes calibrados; esto es, ítemes cuyos parámetros ya han sido estimados. Disponer de un banco de ítemes permite seleccionar subconjuntos de ítemes para elaborar tests con características prefijadas (p.ej. tests para obtener estimaciones más precisas de la habilidad en determinados rangos de la escala) y elaborar tests adaptativos o "a la medida de los sujetos", eligiendo para cada sujeto los ítemes que arrojarán mediciones más precisas de su rasgo. Estas aplicaciones se basan en las *funciones de información* de los ítemes y del test.
- Estudio del Funcionamiento Diferencial del Ítem. El sesgo de los tests es un problema clásico y se refiere a la posibilidad de que ciertos sujetos se vean desfavorecidos con respectos a otros al ser medidos en una determinada habilidad, no por razón de su capacidad sino de su pertenencia a cierta población, por ejemplo, por su sexo, edad, raza, etc. La formulación de los modelos de la TRI mediante la función característica permite dar una definición precisa del sesgo: un ítem es sesgado (o

tiene un funcionamiento diferencial) si su función característica no es la misma entre poblaciones; y se proponen diversos métodos estadísticos para abordar este estudio. Eliminando los ítemes con DIF es posible satisfacer la invarianza pretendida por la TRI.

Condiciones de aplicabilidad de la metodología

- Las pruebas deben consistir de ítemes dicotómicos: cada respuesta es clasificada como satisfactoria o no satisfactoria. En el contexto de las pruebas de rendimiento escolar, los ítemes son las cuestiones que el alumno debe resolver: problemas, ejercicios, preguntas, etc. Las preguntas pueden ser de respuesta abierta o, si se trata de pruebas de elección múltiple, deberán elegirse por lo menos cuatro opciones a fin de que la probabilidad de responder bien por azar sea pequeña para no sobreestimar el nivel, especialmente de aquellos sujetos de menores rendimientos. En otras palabras, se requiere que los datos se adecuen al modelo de dos parámetros.
- Los ítemes deben ser en lo posible independientes unos de otros: la probabilidad que tienen los individuos de un determinado nivel de rendimiento de contestar bien un ítem no aumenta ni disminuye si responden bien a otro ítem. Por ello deben ser evitados aquellos ítemes cuyas respuestas puedan ser deducidas del conocimiento de otros ítemes o que tengan similar estrategia específica de resolución.
- El nivel de conocimiento alcanzado por los sujetos se distribuye normalmente. Esto requiere que la mayoría de los alumnos haya alcanzado un rendimiento próximo al rendimiento medio y una minoría rendimientos excesivamente altos o bajos.
- Unidimensionalidad: la performance en el ítem debe depender sólo del rasgo que se desea medir; en el presente caso el rendimiento, y no de otros factores. Es decir; si dos sujetos tienen el mismo nivel de rendimiento, deben tener la misma probabilidad de contestar bien el ítem; aun cuando pertenezcan a poblaciones muy diferentes. Por ejemplo: Supongamos que para medir la comprensión lectora se construye un ítem basado en un relato de una escena que transcurre en el campo. Posiblemente un niño de la ciudad tenga menor probabilidad de contestarlo correctamente que un niño del campo, aun cuando ambos tengan la misma capacidad de comprensión lectora. Esto ocurriría porque el éxito en la resolución no depende sólo de la capacidad de comprensión lectora que se desea medir sino de otro factor: la familiaridad con el ambiente en el que transcurre la escena. Este tipo de situaciones suelen darse en variables de difícil acceso a la observación directa como son los distintos tipos de habilidades: razonamiento lógico, comprensión lectora, capacidad para discriminar relaciones, etc. En las pruebas de rendimiento no es tan problemático lograr la unidimensionalidad porque el nivel de conocimientos alcanzado es una variable que puede observarse directamente: la cantidad de conocimientos alcanzados.

Pesos óptimos de los ítemes en el puntaje total

El concepto de función de información proporciona un criterio para definir qué se entiende por "pesos óptimos": serán óptimos aquéllos que la maximicen; en otras palabras, serán óptimos los pesos que arrojen mediciones lo más precisas posibles.

Lord (1980) demuestra, en una de las aplicaciones de los modelos de la TRI, que los pesos óptimos de los ítemes, bajo las condiciones antes mencionadas, los constituyen los coeficientes de discriminación de la TRI. El puntaje de cada alumno resultará, pues, de sumar los índices de discriminación de los ítemes que ha contestado correctamente.

Cuando dichos índices no pueden ser calculados, ya por carecerse del software específico, ya porque la muestra es pequeña, dichos índices pueden aproximarse mediante la siguiente expresión:

$$a_i = \frac{r'_{iX}}{\sqrt{1 - r'^2_{iX}}} \qquad [4]$$

donde r_{iX}' es el coeficiente biserial del ítem i.

Procedimiento para el cálculo

Las fórmulas que anteceden están basadas en el cálculo de promedios y desvíos estándar que actualmente se llevan a cabo con calculadoras de bolsillo o con softwares estadísticos de fácil manipulación. Con todo, ejemplificaremos su cálculo manual sobre las calificaciones de 34 alumnos obtenidas en una prueba de elección múltiple de 14 ítemes.

Conviene presentar los resultados de la evaluación en una matriz de unos y ceros, donde los unos significan que los ítemes fueron bien respondidos y cero lo contrario. Cada fila de la matriz es el patrón de respuestas de un sujeto. El primer sujeto contestó correctamente las preguntas 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 13 y 14, es decir, tiene 9 respuestas correctas.

	Itemes														Total de respuestas
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	correctas por sujeto
Sujeto 1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	9
Sujeto 2	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	10
Sujeto 3	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	9
Sujeto 4	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	13
Sujeto 5	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	9
Sujeto 6	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	9
Sujeto 7	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	9
Sujeto 8	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	10
Sujeto 9	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	4
Sujeto 10	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	5
Sujeto 11	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	7
Sujeto 12	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	12

Sujeto 13	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	8
Sujeto 14	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	7
Sujeto 15	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	9
Sujeto 16	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	6
Sujeto 17	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	11
Sujeto 18	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	6
Sujeto 19	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	10
Sujeto 20	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	7
Sujeto 21	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	8
Sujeto 22	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	5
Sujeto 23	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	12
Sujeto 24	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	8
Sujeto 25	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	8
Sujeto 26	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	5
Sujeto 27	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	11
Sujeto 28	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	12
Sujeto 29	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	3
Sujeto 30	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	6
Sujeto 31	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	8
Sujeto 32	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	6
Sujeto 33	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	7
Sujeto 34	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	7
Cantidad de aciertos al ítem.	25	22	24	17	23	26	19	8	19	21	7	21	15	29	
Indice p_i	.735	.647	.706	.500	.676	.765	.559	.235	.559	.618	.206	.618	.441	.853	

Cálculo del promedio de la cantidad de respuestas correctas: X

Se suman todos los valores de la columna del total de respuestas correctas por sujeto y se lo divide por el número de sujetos.

$$S X_i = 9 + 10 + 9 + 13 + 9 + 9 + 9 + \ldots + 6 + 7 + 7 = 276$$

$$X = 276 / 34 = 8.118$$

Cálculo del desvío estándar de la cantidad de respuestas correctas: S_x

Se suman los cuadrados de los valores de la columna del total de respuestas correctas y se reemplaza en la fórmula [3].

$$\Sigma X_i^2 = 9^2 + 10^2 + 9^2 + 13^2 + 9^2 + \ldots + 6^2 + 7^2 + 7^2 = 2438$$

$$S_x = \sqrt{\frac{2438 - 34 \times 8.118^2}{34}} = 2.409$$

Se ejemplificará el cálculo del peso óptimo aproximado para el primer ítem.

Los individuos que contestaron bien el ítem 1 tienen un 1 en la primera columna: son los sujetos 1, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 27, 28, 32, 33 y 34.

Promediando la cantidad de respuestas correctas de este grupo se obtiene

$$\overline{X}_a = (9 + 9 + 13 + ... + 7 + 7) / 25 = 215/25 = 8.600$$

La proporción de respuestas correctas para el ítem 1 es

$$p_1 = 25 / 34 = 0.7353 \cong 0.74$$

Según la tabla del apéndice resulta que $p/y = 2.281$

Reemplazando estas cantidades en la fórmula [2] se obtiene el coeficiente de correlación biserial para el ítem 1.

$$r_{1X} = \frac{(8.600 - 8.118) \times 2.281}{2.409}$$

Sustituyendo en la fórmula [4] se obtiene el índice de discriminación aproximado de la TRI para el ítem 1, el que constituirá su peso.

Operando de la misma manera se obtienen los pesos para los otros ítemes. Éstos son:

Ítem	Peso
1	0.512
2	0.592
3	1.165
4	0.356
5	0.420
6	1.055
7	0.514
8	0.294
9	0.775
10	0.741
11	0.094
12	0.878
13	0.578
14	0.576
Peso total	8.558

El puntaje de un sujeto es la suma de los pesos de los ítemes que contestó correctamente. Así, como el sujeto 1 contestó correctamente los ítemes 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 13 y 14, le corresponde un puntaje igual a

$$0.512 + 0.592 + 1.165 + 0.420 + 1.055 + 0.294 + 0.775 + 0.578 + 0.576 = 5.971$$

Observemos que el sujeto 5 también tiene 9 respuestas correctas y sin embargo el puntaje que le corresponde (6.656) es diferente ya que su patrón de respuestas lo es.

Transformación a la escala de calificaciones

Una vez asignados los puntajes es preciso transformarlos a la escala usual de calificaciones. Para ello Cano de Becerra (1971) propone diferentes e interesantes criterios que toman en cuenta el desempeño general del grupo. Aquí ejemplificaremos con el criterio más sencillo que consiste en hacer corresponder el máximo puntaje posible -suma de todos los pesos- con la mayor nota en la escala de calificaciones y el mínimo puntaje -cero- con el mínimo de la escala.

Por ejemplo, si la escala de calificaciones va de cero a diez el problema se resuelve aplicando la sencilla regla de tres simple, se hace corresponder el peso total 8.558 con el diez. La constante de proporcionalidad es 10 / 8.558 = 1.168. Cada calificación se obtiene multiplicando el puntaje de cada sujeto por esta constante. Luego podrán redondearse a la precisión deseada.

Para el sujeto 1 la calificación será

$$5.971 \times 1.168 = 6.975$$

y para el sujeto5, $6.656 \times 1.168 = 7.778$

Resultados

Se muestran en la siguiente tabla. Para cada sujeto se registra:

- En la primera columna su puntaje bruto, esto es, la cantidad de respuestas correctas (cada ítem vale lo mismo).
- En la segunda columna, el puntaje bruto expresado en la escala de calificaciones de 0 a 10.
- En la tercera columna, el puntaje pesado; es decir, la suma de los pesos de los ítemes que cada sujeto contestó correctamente.
- En la cuarta columna, el puntaje pesado expresado en la escala de calificaciones de 0 a 10.

SUJETO	PUNTAJE BRUTO	PUNTAJE BRUTO ESCALADO DE 0 A 10	PUNTAJE PESADO	PUNTAJE PESADO ESCALADO DE 0 A 10
1	9	6.429	5.971	6.975
2	10	7.143	6.631	7.747
3	9	6.429	6.458	7.546
4	13	9.286	8.264	9.655
5	9	6.429	6.657	7.778
6	9	6.429	6.322	7.387
7	9	6.429	6.023	7.037
8	10	7.143	7.237	8.455
9	4	2.857	2.341	2.735
10	5	3.571	3.891	4.546

11	7	5.000	3.958	4.624
12	12	8.571	7.426	8.677
13	8	5.714	5.637	6.585
14	7	5.000	5.146	6.012
15	9	6.429	6.641	7.759
16	6	4.286	4.131	4.826
17	11	7.857	7.591	8.869
18	6	4.286	4.323	5.051
19	10	7.143	7.076	8.267
20	7	5.000	4.576	5.347
21	8	5.714	5.126	5.989
22	5	3.571	3.680	4.299
23	12	8.571	7.426	8.677
24	8	5.714	5.587	6.528
25	8	5.714	5.455	6.374
26	5	3.571	2.327	2.719
27	11	7.857	7.655	8.944
28	12	8.571	8.170	9.545
29	3	2.143	1.107	1.293
30	6	4.286	2.905	3.394
31	8	5.714	5.109	5.969
32	6	4.286	3.823	4.467
33	7	5.000	4.452	5.202
34	7	5.000	4.844	5.659

A manera ilustrativa se muestra a continuación cómo resultaron ordenados algunos de los sujetos según sus puntajes cuando éstos corresponden a pesos iguales y a pesos diferentes respectivamente.

Pesos Iguales

Lugar en el ranking	Sujetos
1	4
2	12, 23, 28
3	17, 27
4	2, 8, 19
5	1, 3, 5, 6, 7, 15

Pesos diferentes

Lugar en el ranking	Sujetos
1	4
2	28
3	27
4	17
5	12, 23
6	8
7	19

8	5
9	15
10	2
11	3
12	6
13	7
14	1

Si se ordenaran los sujetos con respecto a su calificación considerando pesos iguales resultarían varios grupos de sujetos "indistinguibles" como, por ejemplo, los sujetos 12, 23 y 28 en la segunda posición, 17 y 27 en la tercera, 2,8 y 19 en la cuarta, 1, 3, 5, 6, 7 y 15 en la quinta posición, etc. La ponderación de los ítemes, en cambio, permitió no sólo discriminar entre dichos sujetos sino también una corrección en el ranking. Así, el sujeto 27 pasó a estar por delante de los sujetos 12 y 23.

Discusión

Esta metodología ofrece una manera objetiva de asignar los pesos a los ítemes de modo que el puntaje total rescata no sólo la cantidad de respuestas correctas sino su calidad; en otras palabras, no sólo tiene en cuenta cuántas sino cuáles. Esto permite discriminar mejor a los sujetos en función de su patrón de respuestas y obtener mediciones más precisas.

Puesto que el procedimiento demanda un trabajo computacional mayor que la manera usual de asignar calificaciones, es razonable plantearse hasta qué punto la ganancia en precisión justifica tal esfuerzo. No puede darse una respuesta en términos absolutos. En primer lugar dependerá del objetivo de la evaluación. Si es muy importante el aspecto competitivo -por ejemplo, una evaluación para otorgar becas a los mejores- deberá extremarse la precisión con el fin de discriminar y jerarquizar de la manera más justa posible a los individuos de mejores rendimientos. En segundo lugar, dependerá de las características propias de los ítemes; si todos ellos tienen una similar potencia discriminatoria, la calificación asignada por pesos óptimos no diferirá mucho de la que considera los pesos iguales. Finalmente, como la ganancia en precisión que aporta esta metodología, se pierde en parte por efecto del redondeo, no debe usarse una escala de calificaciones restringida a pocos valores enteros. Se recomienda el uso de una escala de 0 a 1000.

Por otra parte, el docente puede ir elaborando su propio banco de ítemes; esto es, ir acopiando la experiencia que obtiene de las sucesivas administraciones de los mismos. Si los grupos a los que se fue administrando la prueba guardan una cierta homogeneidad, como podría ser el caso de sucesivas promociones de un determinado curso y si los ítemes están bien construidos y son suficientemente representativos del contenido, éstos suelen tener un comportamiento similar entre los diferentes grupos en lo que hace a su poder de discriminación, por lo que no será necesario calcular los pesos cada vez, sino que podrán utilizarse los ya calculados. Es prudente, sin embargo, revisarlos cada tanto a fin de constatar que siguen vigentes o bien reactualizarlos.

El trabajo computacional se evita completamente si el docente aprende a trabajar (lo que sería muy deseable dada la importancia actual de la informática) con algún software estadístico sencillo, como por ejemplo el Statistix. El trabajo se reduce, entonces, a sólo cargar los datos y a efectuar algunas transformaciones sencillas.

Referencias

Birnbaum, A. (1968). "Some Latent Trait Models and Their Use in Inferring an Examinee's Ability" en Lord, F.M. y Novick, M.R., *Statistical Theories of Mental Test Scores. Reading*, Mass., Addison-Wesley.

Cano de Becerra, F. (1971). "Elementos de Estadística al Servicio de la Evaluación del Rendimiento". *Revista de Psicología*, 16 (1/2): 61-77.

Cortada de Kohan, N. (1968). *Manual para la Construcción de Tests Objetivos de Rendimiento.* Ed. Paidós, Buenos Aires.

D'Agostino, R.B. & Cureton, E.E. (1975). The 27 Percent Rule Revisited, *Educational and Psychological Measurement*, 35, 1975, pp. 45-50.

Ebel, Rober L. (1977). *Fundamentos de la Medición Educacional.* Ed. Guadalupe. Buenos Aires.

Hurtado de Mendoza, Ma. (1982). *Pruebas de Rendimiento Académico y Objetivos de la Instrucción.* Ed. Diana, México.

Lord, F. (1980). *Applications of Item Response Theory to Practical Testing Problems.* Hillsdale, N.J. Erlbaum.

Mehrens, W. y Lehmann , I. (1982). *Medición y Evaluación en la Educación y en la Psicología.* Ed. CECSA, México.

Muñiz, J. (1992). *Teoría Clásica de los Tests.* Ed. Pirámide, Madrid.

Rasch, G. (1960). *Probabilistic models for some intelligence and attainment tests.* Copenhagen: Danish Institute for Educational Research.

Santisteban Requena, C. (1990). *Psicometría.* Ed. Norma, Madrid.

Spearman, C. (1904). "The Proof and Measurement of Association betwen two Things". *American Journal of Psychology*, 15, 23 - 35.

[2] El coeficiente de correlación de Pearson es una medida entre -1 y 1 para cuantificar el grado de relación lineal entre dos variables.

Sobre la medida de las magnitudes[1] (Primera parte)

Educación Matemática
Vol. 11 No. 3 Diciembre
1999 pp. 120-126

Henri Lebesgue (París)

> ***Henri-Léon Lebesgue**: matemático francés nacido en Beauvais el 28 junio de 1875 y muerto en París el 26 de julio de 1941. Su generalización de la integral de Riemann revolucionó el campo de la integración por lo que se le considera fundador del análisis moderno. Lebesgue se empeñó en dar a conocer sus reflexiones sobre la matemática, sobre sus métodos de investigación y sobre las condiciones de su enseñanza. En sus escritos figuran numerosos pasajes que hubieran podido servir para la obra que él reclamaba "una filosofía de las matemáticas escrita por un matemático".* N. T.

Introducción

Agradezco al Profesor H. Fehr el que haya aceptado en su Revista artículos de naturaleza más elemental que aquéllos que ordinariamente aparecen en ella, y que no tienen otro motivo para reclamar esta hospitalidad que el hecho de referirse a cuestiones de enseñanza matemática. Le debo además una mayor gratitud porque los artículos son demasiado largos para un contenido científico tan limitado; se trata más de opiniones que de hechos, de ahí la necesidad de evitar malos entendidos y de argumentar ampliamente en favor de estas opiniones. He aquí cómo me vino la idea de escribir estos artículos.

Desde 1910 me ocupo de la preparación de futuros profesores de enseñanza secundaria en dos escuelas normales superiores, una masculina y la otra femenina. Uno de los ejercicios de esta preparación consiste en lecciones relacionadas con los programas de estudio de las clases de la enseñanza secundaria. He tenido así la ocasión de reflexionar sobre estos programas, de ver cuáles son las dificultades que más a menudo hacen titubear a los jóvenes profesores, de asombrarme por la frecuencia de ciertas cualidades y de ciertos errores; también he podido examinar manuales y, a través de ellos así como a través de los reportes de los jueces, he podido advertir las tendencias actuales del cuerpo docente. Como, por otra parte, soy capaz de juzgar los

[1] *L'Enseignement Mathématique*, año 31, 1932, pp 173-181

resultados de la enseñanza puesto que, desde hace treinta años, aplico los exámenes para el bachillerato o para el ingreso a las escuelas, no es de sorprender que me haya surgido la idea de escribir artículos de naturaleza pedagógica, atreviéndome a emplear este calificativo que suele hacer huir a los matemáticos.

En las páginas que van a aparecer en *L'Enseignement mathématique* me ocuparé de la medida de las magnitudes. No hay tema más fundamental: la medida de las magnitudes es el punto de partida de todas las aplicaciones de las matemáticas y, como las matemáticas aplicadas preceden, evidentemente, a las matemáticas puras, a la lógica matemática, es usual que uno se imagine que la medida de las áreas y de los volúmenes está en el origen de la geometría; por otra parte, esta medida da lugar al número, es decir, al objeto mismo del análisis. Así, se habla de la medida de las magnitudes en los tres niveles de enseñanza: primaria, secundaria y superior; la comparación de lo que se hace en los tres niveles de enseñanza proporciona un ejemplo de esfuerzo de comprensión de conjunto, de coordinación que parecerían poder servir más eficazmente a la formación de los futuros profesores que el trabajo que actualmente se exige de ellos: el refinamiento verbal de lecciones aisladas.

En los artículos que siguen se verá que me he esforzado por tratar las cuestiones de la manera más simple y más concreta posible, sin sacrificar por ello el rigor lógico. Este ideal podrá parecer algo arcaico en una época en que las condiciones arbitrarias y eruditas juegan un papel capital hasta en las ciencias experimentales; pero aquéllos a quienes se deben estas consideraciones han podido moverse en la abstracción y realizar una obra útil, precisamente porque tenían un sentido particularmente agudo de la realidad. Es éste el sentido que hace falta esforzarse en despertar en los jóvenes; después, pero solamente después, el pasaje a lo abstracto puede ser favorable; cuando bajo lo abstracto se sigue viendo lo concreto y, en lo general, todos los casos verdaderamente útiles.

En dos artículos, de alguna manera preliminares, me ocuparé de los números enteros y de los números en general, indispensables para las medidas de magnitudes. Para abordar a continuación mi tema propiamente dicho, me ocuparé de las áreas, de los volúmenes y de las magnitudes en general[2]

I- Comparación de colecciones; números enteros

1. Un niño pequeño, invitado a tomar un dulce y a darles también a sus dos hermanas, asegurará primero su parte, después llevará un dulce a una de sus hermanas y regresará a buscar otro para la otra. Más grande, este niño evitará las idas y venidas y tomará los tres dulces diciendo: para mí, para Luisa y para Renata.

Uno se imagina de buena gana, y las constataciones hechas en ciertas poblaciones primitivas parecen confirmar esta hipótesis, que los hombres, cuando quieren comparar dos colecciones llegan, por un mecanismo análogo, a *contar*; es decir a comparar las dos colecciones con un mismo tipo de colección,

[2] Se incluye aquí sólo el primera artículo que menciona Lebesgue (Sobre los números enteros) N. T.

la colección de palabras de una cierta frase. Estas palabras se llaman *números*. Para contar o enumerar, uno asocia mentalmente un objeto diferente de la colección considerada a cada una de las palabras sucesivas de la frase (o serie) de números; el último número pronunciado es el número de la colección.

Ese número es considerado como el resultado de la operación experimental de enumerar porque en él está el informe completo de tal operación. Un resultado experimental sirve para eximir de otras experiencias: las reglas de las cuatro operaciones nos eximen de las operaciones de enumeración para ciertas colecciones que se pueden formar a partir de colecciones ya numeradas. Con motivo de estas reglas uno puede constatar diversos hechos enunciados habitualmente como teoremas, pero cuyas pretendidas demostraciones son en realidad verificaciones experimentales –por ejemplo, el teorema: un producto es independiente del orden de sus factores– los cuales derivan todos de esta constatación general: el número asociado a una colección no depende del orden el en cual se arreglen los objetos de la colección al contarlos.

2. Quizás no sea inútil subrayar en qué difiere la exposición que acabo de resumir de la que uno encuentra en los tratados de aritmética[3]. Abro el libro de Tannery[4]. ciertamente veo ahí descrita la operación de enumeración de una colección, leo las demostraciones que se reducen a descripciones de experiencias, sin embargo, bien parece que el número experimental sólo es ahí una utilización, una aplicación de una entidad metafísica de la cual nos da una suerte de definición en la segunda parte del libro: "La idea de número entero resulta, por abstracción, de la idea de una colección de objetos distintos; ella es independiente de la naturaleza de los objetos..." A menudo se dice "independiente de la naturaleza y del orden de esos objetos".

Se presenta así el número como un ser misterioso, pero con frecuencia, se apresuran a agregar que no hay nada más claro ni más simple. "Se ha discutido mucho y se discutirá mucho más todavía", escribe P. Boutroux en el § 2 de los *Principios del análisis matemático*, "sobre el origen y el significado lógico de la noción de número. Afortunadamente esta noción es de aquéllas que no requieren definiciones ni comentarios. Desde la época lejana en la que la humanidad aprendió a contar, el número se volvió uno de los datos fundamentales sobre los que trabaja nuestro pensamiento, dato tan inmediato, tan claro a la inteligencia, que, al quererlo analizar, sólo lograremos obscurecerlo. Es por ello que la aritmética ha podido edificarse sobre definiciones verbales e incompletas, y eso no ha impedido que se le considere siempre la ciencia perfecta por excelencia".

---

[3] Dejo de lado el hecho de que en estas presentaciones el número aparece de entrada con su significado cardinal en tanto que yo parto del número ordinal; sólo se vuelve cardinal en el momento en el que uno afirma que el resultado obtenido es independiente del orden en el que se han contado los objetos. N. A.

[4] Seguramente Lebesgue se refiere aquí a Jules Tannery, hermano de Paul Tannery, nacido el 24 de marzo de 1848 en Mantes-sur-Seine, Francia y muerto el 11 de diciembre de 1910 en París, quien escribió algunos libros excelentes que tuvieron gran impacto entre los jóvenes matemáticos. N. T.

Que la aritmética se haya podido edificar se explica mucho más claramente, en mi opinión, porque disponemos de una definición completa de número: la descripción de la operación que se realiza y no, como dice P. Boutroux, porque el número sea inexplicable. A la definición experimental los hombres han querido agregar una mística y una metafísica. La enseñanza no se ocupa de la mística; se mantiene neutra ante ella, dejando que cada uno se sienta libre de considera que el número 13, por ejemplo, le es favorable o nefasto; pero la enseñanza, por tradición, por respeto, o por temor de ser calificada como elemental, se vale de la metafísica. Sólo que no la utiliza; y esto es porque importa poco para el logro de la aritmética que las nociones metafísicas sean obscuras. Constatado esto, saludo en voz baja a la metafísica, pero como exigiría tiempo libre y lo que tenemos es trabajo, me mantengo neutro ante ella y considero a la aritmética como una ciencia experimental a mismo título que las otras.

3. Pero, ¿en qué se transforma ahora la "certeza matemática", que ha atraído siempre la atención de los filósofos, si sólo hay "matemáticas aplicadas"? Pierde su rango y no es más que la menos precaria de nuestras certezas; la aritmética, a la que los hombres, en sus aspiraciones hacia lo absoluto, habían hecho "la ciencia perfecta por excelencia", es sólo la menos imperfecta de nuestras ciencias. Es la ciencia humanamente perfecta, que prácticamente no nos engaña jamás ¿de dónde le viene esta superioridad?

Para comenzar, ¿cómo es que nos equivocamos tan frecuentemente cuando creemos aplicar un resultado experimental? Sucede que las fronteras de tales resultados nunca son bien conocidas; cuando decimos: una barra de vidrio, frotada, atrae pequeños pedazos de papel, esto supone que se han cumplido condiciones sobreentendidas y poco conocidas. Tendría que poderse precisar qué es lo que uno llama vidrio, papel, lo que uno llama frotar, precisar los tiempos, las distancias, las masas, así como las condiciones atmosféricas, etc.

La aritmética sólo utiliza un pequeño número de experiencias, cada una de las cuales ha sido repetida un número prodigioso de veces por cada hombre, desde que hay hombres. Así, sabemos, sin dudar, en qué casos se aplica la aritmética y en qué casos no se aplica. En estos últimos, la idea de aplicar la aritmética nunca se nos ocurre, sólo pensamos en aplicar la aritmética cuando se aplica, si bien nos olvidamos de que hay casos en los que no se aplica: dos y dos son cuatro, afirmamos. "En un vaso vierto dos líquidos, en otro, dos líquidos. Vierto todo en una jarra, ¿contendrá la jarra cuatro líquidos? Esa es mala fe, dirán ustedes, esa no es una pregunta aritmética-

En una jaula meto dos animales, después dos más, ¿cuántos animales contiene la jaula? Su mala fe, dirán ustedes es más patente ahora; eso depende de la especie de los animales, algunos de ellos podría devorar a los otros; habría que saber si el conteo debe realizarse inmediatamente o dentro de un año, cuando los animales podrían estar muertos o haber tenido crías. En suma, se habla de colecciones de las que uno no sabe si son inmutables, si cada objeto guarda su individualidad, si no hay objetos que aparecen y desaparecen

¿Hay que decir que se deben cumplir ciertas condiciones para que se aplique la aritmética? En cuanto a la regla que me acaban de dar para reconocer si se aplica la aritmética, es ciertamente excelente desde el punto de vista práctico, experimental, pero no tiene ningún valor lógico. Es el reconocimiento de que la aritmética se aplica cuando se aplica, y es por eso que no se puede demostrar que dos y son cuatro, lo que es, no obstante, la verdad por excelencia, porque jamás nos equivocamos al utilizarla"

En las presentaciones puramente lógicas, donde la aritmética se ocupa de símbolos vacíos de todo significado, es sólo gracias a un axioma que dos y dos son cuatro. No voy a hablar aquí de ese tipo de presentaciones, pero bien puedo decir que, si bien su importancia matemática es considerable, si bien hemos aprendido mucho de este tipo de presentaciones, me parecen destinadas a un fracaso absoluto si se les quiere considerar como aclaradoras de la noción de número, sin aludir a la experiencia. En estos juegos lógicos hace falta, en efecto, manipular colecciones de símbolos, reales o pensados, poco importa, entonces intervienen todos nuestros conocimientos adquiridos gracias a la experiencia relativos a colecciones, es decir, a números.

4. La filosofía ha pesado de tal forma sobre la enseñanza que, para evitar malos entendidos, sentí necesario dar estas explicaciones que me han apartado de mi tema únicamente pedagógico: regreso a él haciendo resaltar que la recomendación habitual: "no hay que confundir el número y el símbolo que lo representa" no tiene para nosotros ningún sentido. Desde ese momento, después de haber explicado lo que es contar, convendrá dar la serie de números, es decir, exponer la numeración decimal[5]. Poco importa que haya otras maneras de nombrar los números, eso no nos debe turbar más que el hecho de que las palabras son diferentes en inglés y en francés, lo que no tiene mayor importancia porque siempre se puede traducir de una lengua a la otra, aunque en este caso la correspondencia no esté enteramente determinada. De un sistema de numeración a otro, por el contrario, la correspondencia es de una precisión perfecta; no hay entonces ningún inconveniente para utilizar cualquier sistema de numeración. Poco importa que, quizás, los hombres hubieran adoptado el sistema de numeración de base 11 si hubiesen tenido once dedos; *tenemos la oportunidad única de tener a nuestra disposición una lengua universal, la numeración decimal escrita, utilicémosla.*

En suma, pido que se emplee en las clases avanzadas de enseñanza secundaria los mismos procedimientos que en las clases básicas y en la enseñanza primaria; procedimientos de los que actualmente se tiende a renegar, se tien-

[5] Lo que puede hacerse sin emplear los teoremas sobre los números. Que se observe bien por otra parte, que todos los pueblos o poblaciones que tienen la idea de número utilizan una numeración decimal más o menos rudimentaria. N. A.

de a menospreciar. Entre otras ventajas, esto permitirían a los alumnos comprender bien que el único propósito del estudio de la aritmética que se hace al final de la enseñanza secundaria, es el de elucidar completamente, hasta llegar a la formulación neta, hasta la comprensión consciente, lo que hasta entonces, sólo había sido sentido inconscientemente, sin analizar. Actualmente, sólo lo comprenden las mentes más dotadas, verdaderos anormales que no tienen necesidad ni de soporte ni de guía y de quienes no tiene que ocuparse la enseñanza; para los otros, esta revisión de la aritmética es una cosa nueva, enteramente nueva, que se aprende para los exámenes y que muchas veces sólo tiene una vaga relación con los cálculos efectivos.

5. ¿Qué puede oponerse al tipo de presentación propuesto aquí? Ante todo, nuestros hábitos metafísicos: "¿No es una blasfemia llamar símbolo al número que antes era la esencia misma de las cosas?" he aquí el temor que se actualiza bajo las formas más variadas. Por ejemplo, se dirá: se puede ciertamente emplear indiferentemente la palabra inglesa *chair* [silla] o la palabra francesa *chaise* [silla] porque se aplican al mismo objeto, ¿cuál es lo análogo al objeto silla en el empleo de los símbolos 101 de la numeración binaria y el 5 de la notación decimal? Como no hay una silla escondida detrás del 5, se podría ciertamente salir del atolladero por medio de una pirueta verbal y hablar de la entidad metafísica 5 que reemplazará a la realidad física silla; esto es, en suma, renunciar a dar una respuesta.

Para responder, hace falta hacer notar que, de lengua a lengua, la traducción sólo se hace palabra por palabra en el caso de los sustantivos con un significado concreto, en los otros casos, la traducción se hace frase por frase. No es entonces la palabra número lo que hay que explicar, sino la frase en donde figura el número. Por ejemplo: dos colecciones tienen el mismo número; dos colecciones no tienen el mismo número. Ahora bien, eso es precisamente lo que se ha explicado desde el principio describiendo la operación de enumeración de una colección; despojando así de todo pretexto a los temores metafísicos.

Al mismo tiempo, la descripción de las enumeraciones ha mostrado que la elección de la serie de los números (palabras o símbolos) tenía una importancia teórica accesoria; no es más que la elección de una lengua entre todas aquéllas que existen o que uno se puede imaginar. Pero uno no puede expresarse sin escoger una.

En la enseñanza secundaria, donde uno de los propósitos, si no el propósito principal, es la legitimación de las reglas del cálculo, propongo elegir, desde el principio, la numeración decimal. En una enseñanza superior, donde uno no se ocupa más de los cálculos efectivos, ésta sería una mala elección porque ahora el estudio de la aritmética se hace con vistas a generalizaciones diversas de las operaciones, y no sólo de la numeración decimal que no ha podido jamás ser imitada. Uno se contentará entonces con numeraciones momentáneas como las que se utilizan cuando se dice, por ejemplo, sean a, b, c tres números, d el producto de a por el cociente de b por c, ...

Si utilizo constantemente la numeración decimal en la enseñanza secundaria, es por razones pedagógicas simples: para una economía de tiempo y porque el número, escrito de acuerdo a la numeración decimal, es un objeto concreto sobre el cual los jóvenes cerebros razonan más fácilmente. No pretendo, en absoluto, exagerar la importancia de esta numeración[6]. Y, dirigiéndome a estos alumnos salidos de la enseñanza secundaria, adoptaría de buena gana, sin tener sentimientos encontrados, alguna presentación más abstracta: Los números son símbolos entre los que se ha establecido dos modos de composición: la adición y la multiplicación... [7]

6. Me disculpo por insistir tan largamente en los números enteros, pero es para mi la ocasión de explicar mi actitud frente a la metafísica –que me esfuerzo en alejar de la enseñanza en la débil medida permitida por nuestro lenguaje y nuestros hábitos de pensamiento, dejando, por otra parte, a cada uno la libertad de añadir metafísica y mística a la enseñanza recibida– y explicar el empleo constante que haré de la numeración decimal.

Este empleo constante me parece tan natural, tan pedagógicamente indicado, que quizás tendría que buscarse el porqué no se utiliza siempre la numeración decimal. Es ante todo porque los griegos, nuestros modelos, no la utilizaban. No podían hacerlo a causa de la metafísica y sobretodo porque sólo tenían una numeración imperfecta; vecina de nuestra numeración decimal, pero muy limitada. Tan limitada que Arquímedes debió prolongarla considerablemente por medio de los cálculos de ese extraordinario Arenario, donde se ve bien que la ausencia de una numeración concebida como indefinida impedía comprender el alcance exacto de la noción de número.

La notación decimal no es una herencia griega; este hecho ha bastado para que todo lo que tenga huellas de esta notación sea superpuesto a la enseñanza griega y no incorporado a ella. *Nuestra enseñanza no utiliza todavía plenamente este hecho histórico, el más importante quizás de la historia de las ciencias: la invención de la numeración decimal.*

Traducción y notas: Guillermina Waldegg

---

[6] Se podrá, por ejemplo, referirse al § IV de la nota final de la 2ª edición de mis *Lecciones sobre la integración.*

[7] Sobre este enunciado, haré notar que si es una blasfemia disminuir el número del rango de entidad al rango de símbolo, *es una blasfemia que todos los matemáticos profieren.* Uno no podría entonces reprochárselo especialmente a la presentación que preconizo.

Nota del Comité Editorial: A partir de este número, la sección de problemas estará a cargo de Marcela González Pelaez, Iñaqui de Olaizola Arizmendi y Javier Alfaro Pastor, quienes participan en la organización de los certámenes de la olimpiada matemática.

En los números subsiguientes se dará la solución a los problemas del número anterior indicando sugerencias, soluciones y estrategias. El comité editorial agradece la contribución de Santiago Valiente que hasta este número se hizo cargo de esta sección y da la bienvenida a los nuevos colaboradores.

Educación Matemática
Vol. 11 No. 3 Diciembre 1999 pp. 127-129

Solución a los problemas del número anterior

Problema 1.

Se eligen dos números enteros entre 1 y 100 inclusive tales que su diferencia es 7 y su producto es múltiplo de 5.

¿De cuántas maneras se puede hacer esta elección?

Solución:

Los números que cumplen con la primera condición son de la forma:

$$a, a + 7 \quad \text{con} \quad 1 \leq a \leq 93$$

Como el producto debe ser múltiplo de 5, entonces

$$a = 5k \text{ con } 1 \leq k \leq 18$$
$$\text{ó} \quad a + 7 = 5\text{k}; a = 5k - 7 \quad \text{con} \quad 2 \leq k \; 20$$

Entre 1 y 93 hay 18 múltiplos de 5, por lo que hay 18 parejas de la forma

Como $8 \leq a + 7 \leq 100$, entre 8 y 100 hay 19 múltiplos de 5, esto es, hay otras 19 parejas de la forma

$$5k - 7, 5k \quad \text{con} \quad 2 \leq k \leq 20$$

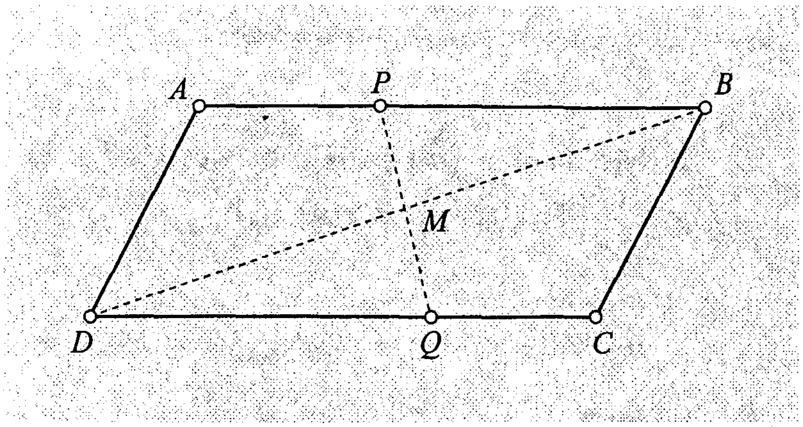
Como estas parejas son todas distintas, hay 37 maneras de elegir los dos números.

Problema 2

En un paralelogramo ABCD, BD es la diagonal mayor. Al hacer coincidir B con D mediante un doblez se forma un pentágono regular. Calcular las medidas de los ángulos que forman la diagonal BD con cada uno de los lados del paralelogramo

Solución:

Doblar es lo mismo que hacer una simetría de eje PQ que es la mediatriz de $\overline{BD}$
Después de doblar, la figura obtenida es:



Como el pentágono $APQC'D$ es regular, todos sus ángulos miden 108°.
Como el triángulo $\angle C'Q$ es isósceles, $\angle C'DQ = 36°$
Análogamente en el triángulo APD, $\angle ADP = 36°$ y como $C'DA = 108°$, $\angle QDP = 36°$.

Como las diagonales del pentágono son iguales, el triángulo QDP también es isósceles y como DM es perpendicular a QP, MD es la bisectriz del $\angle QDP$ así es que $\angle MDQ = 18°$.

Los ángulos de la diagonal con los lados son $\angle MDQ = 18°$ y $\angle MDA = 54°$ (36° + 18°).

Problema 3

En cada escalón de una escalera de 10 peldaños hay una rana.

Cada una de ellas puede, de un salto colocarse en otro escalón, pero cuando lo hace, al mismo tiempo, otra rana saltará la misma cantidad de escalones en sentido opuesto: una sube y otra baja.

¿Conseguirán las ranas colocarse todas juntas en un mismo escalón?

Solución: No, pues en la posición inicial, la suma de las distancias de todas las ranas al suelo es:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 9 + 10 = 55.$$

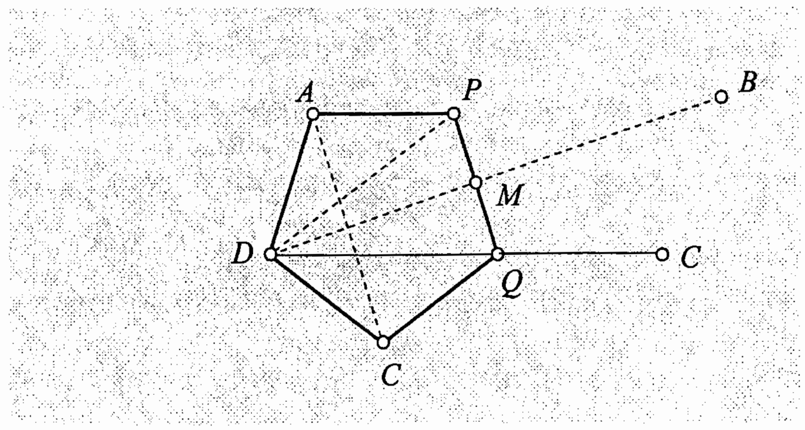
Cuando dos ranas saltan (una para arriba, otra para abajo) la suma de dichas distancias no cambia. Si en algún momento consiguieran colocarse en un mismo escalón, por ejemplo el k-ésimo, la suma de las distancias sería 10k, que nunca puede ser 55

Problemas Propuestos

V OLIMPIADA DE MAYO DE 1999
Segundo Nivel

Problema 1.

Un número natural de tres cifras se llama tricúbico si es igual a la suma de los cubos de sus dígitos. Hallar todas las parejas de números consecutivos tales que ambos sean tricúbicos.



Educación Matemática
Vol. 11 No. 3 Diciembre
1999 pp. 130-132

La resolución infantil de problemas

Stefhanie Thornton

Ediciones Morata, Serie Bruner. Colección: Psicología. El desarrollo del niño. Madrid, 1998.

Esta obra, breve por lo que es capaz de decir en poco espacio, amplia en el descubrimiento de nuevos hallazgos, y soberbia porque rompe con muchas ideas que se venían arrastrando como pesados fardos en las concepciones relativas a la resolución de problemas por los infantes, se nos presenta en seis capítulos:

Por qué es interesante la resolución infantil de problemas.

Una perspectiva histórica sobre resolución infantil de problemas: inferencia y el desarrollo de la lógica.

Herramientas conceptuales para resolver problemas: destrezas inherentes e información.

Resolver un problema y descubrir nuevas estrategias.

El contexto social de la resolución infantil de problemas.

Conclusiones

En la obra se aborda el proceso de resolución de problemas y cómo es que éste se desarrolla en la infancia.

En el capítulo primero, la tesis central es que, cuando el niño realiza uno de sus típicos juegos, las estrategias y actividades que desarrolla con este propósito, en cierta forma está implicada la resolución de algún tipo de problema y, además, en esa actividad de resolución está presente un cierto disfrute. La autora toma como definición de resolución de problema que ¡es lo que se hace cuando se tiene una meta y no se sabe cómo alcanzarla, de manera que podríamos haber esperado que fuera una experiencia bastante frustrante y negativa. Averiguar cómo resolver un problema nuevo también es una tarea intelectual estimulante, que empuja a los niños a valorar sus propios esfuerzos, a descubrir nuevos conceptos y a inventar estrategias nuevas...!.

Cuando se realiza un análisis acerca de estas actividades los investigadores recurren a hacer inferencias acerca de cómo actúan los procesos en la mente del infante cuando éste está resolviendo un problema, y ciertas maneras de interpretar lo que está realizando, además de construir teorías a partir de sus errores, aciertos y lo que ellos nos dicen de lo que hacen. Esto ha permitido una mejor comprensión acerca de las destrezas que desarrollan.

Una primera idea que la autora aporta es que estudios recientes hacen ver que en la resolución exitosa de problemas no depende tanto de qué tan listos sean los niños ni el uso que hagan de la lógica. Una segunda idea expresa que la experiencia de los niños y la retroalimentación que se les dé son determinantes en sus búsquedas hacia nuevas formas de resolución de problemas. Y una tercera idea se inscribe en que su habilidad en esta actividad es un proceso social relacionado con sus sentimientos en donde la confianza es determinante.

En el capítulo II la autora da una referencia histórica acerca de la resolución infantil de problemas. Se categoriza que la comprensión del desarrollo de las destrezas cognitivas llevan a la comprensión del cómo resuelven los niños los problemas. Se examinan las hipótesis que los especialista han venido considerando acerca del desarrollo en la resolución de problemas, a fin de comprender mejor lo que en la actualidad se concibe. Sobre esto, las ideas que campean acerca de las destrezas cognitivas son muy abarcativas y: 1) permiten que la comprensión sobre la resolución de problemas parezca sencilla, 2) hacen que el trabajo de enseñar a los infantes parezca más sencillo, y 3) hacen ver que usar las mismas detrezas en cualquier situación puede tener cierto sentido relacionado con su diseño. Con esto como principio la autora establece que las inferencias, al ser elementos fundamentales en toda actividad cognitiva, es deseable conocer cómo las utilizan los niños pues aportarían ideas sustantivas acerca de su inteligencia.

En relación con la teoría psicogenética la autora refiere que: ¡Piaget estudió el razonamiento de los niños desde el nacimiento hasta la adolescencia. Creía que la causa esencial de los cambios que observamos en la resolución de problemas de los niños a lo largo de su desarrollo era el crecimiento gradual de destrezas lógicas, desde su ausencia total en el nacimiento hasta la lógica compleja del adulto, a través de una sucesión de estadios...!.

Sin embargo, los nuevos estudios han venido demostrando que la teoría de Piaget es incorrecta, pues los niños muy pequeños son capaces de elaborar inferencias complejas en ciertos contextos y, el supuesto es que ílas tareas de Piaget no son las mejores medidas de la capacidad de los niños para extraer inferencias... (pues)... evitó deliberadamente utilizar situaciones familiares al diseñar sus tareas experimentalesî. Esto es, recientes investigaciones demuestran que los infantes de poca edad realizan inferencias apropiadamente, cosa que no se lograba con las tareas de Piaget, si los problemas que se les presentaban estaban definidos en situaciones concretas, comunes y conocidas y no de forma abstracta y descontextualizada. Con este concepto se llega a que ¡...la destreza lógica no es el factor principal que subyace al éxito o fracaso del niño en la resolución de problemas...!, y en igual forma, los estudios muestran que son otros factores más importantes, fuera de la lógica, los que son utilizados por los adultos en la resolución de problemas. Además, es contundente al afirmar: ¡...Pero en las situaciones familiares, la validez lógica está en conflicto a veces con la precisión objetiva. En estas situaciones, tanto los niños pequeños como los adultos tienden a abandonar la lógica y basar sus respuestas en lo que saben que es cierto. Los individuos mayores pueden resistir mejor esta tendencia en las situaciones adecuadas y pueden reconocer mejor cuándo es apropiado hacerlo. La lógica es sólo una de las estrategias de las que dispone quien resuelve problemas, y no es necesariamente el planteamiento preferido.

Seleccionar por el éxito. Es común que los infantes tengan más de una estrategia para resolver un problema y su tarea consiste en usar aquella que le va rindiendo mayores beneficios.

Aprender del éxito. Los niños dejan de lado las estrategias que no les han llevado al éxito, pero descubierta una que lo logra, son capaces de alterarla y mejorarla, sin que ello sea resultado aparente de una respuesta a la retroalimentación.

Cambiar entre estrategias similares. Cuando el niño ha tenido éxito con una estrategia y reconoce en un nuevo problema la posibilidad de su uso, realiza cambios a la estrategia original para aplicarla a las nuevas condiciones.

Descubrir algo diferente. A veces el niño se ve forzado a recurrir a nuevas estrategias, desechando aquella inicial, sin reconocer los elementos implícitos que le sirvan de apoyo para la resolución del nuevo problema.

Cambio guiado por estrategias. Las nuevas estrategias que aportan los niños en la resolución de problemas pueden observarse por la estrategia concreta que utilizan, así como los descubrimientos que ellos hacen en este proceso de aplicación.

Se concluye en el capítulo que aunque niños y adolescentes ítengan los mismos procesos dinámicos para resolver problemas!, no llegan a descubrimientos diferentes en una tarea concreta ni tienen la misma capacidad para resolverla, pues los diferentes conocimientos y experiencias llevan a aplicar estrategias diversas y ¡tácticas diferentes significan distintos descubrimientos y diversas posibilidades de éxito!. Sin embargo, esos procesos dinámicos son los mismos:

selección por el éxito

reflexión sobre y explicación de lo que sólo estaba implícito en las estrategias anteriores

los que generan nuevas estrategias por medio de la interacción entre las metas y la retroalimentación

Reseña de Santiago Valiente

RESEÑAS
DE
LIBROS

El conflicto para los alumnos entre lenguaje matemático y lenguaje común

Hermann Maier

Grupo Editorial Iberoamérica. Serie Pitágora Editrice Bolonga. México, D.F., 1999

Educación Matemática
Vol. 11 No. 3 Diciembre 1999 pp. 133-135

Es conocido y entendible que los maestros de español y los de matemáticas, aun cuando utilizan el mismo idioma de comunicación, lo usan con distinta intención y sus expresiones, en muchos casos, siendo idénticas tienen significados distintos.

El propósito de esta obra, breve en extremo, producida en un mínimo espacio discursivo, pretende alcanzar tres objetivos fundamentales: 1. Establecer las diferencias significativas entre el lenguaje matemático y el lenguaje cotidiano, 2. Introducir a los alumnos en las competencias entre el lenguaje formal matemático y el lenguaje común de que disponen, a fin de que sirvan como apoyo en el quehacer docente, y 3. Ofrecer sugerencias del maestro de matemáticas al de español para establecer líneas de colaboración.

La obrita, de 20 páginas, de fácil y apremiante lectura, se desarrolla en cuatro capítulos: 1. Ejemplos y problemas, 2. Características del lenguaje matemático, 3. Lenguaje matemático y comunicación en clase, y 4. Sugerencias para los maestros de español. Hablemos algo de cada capítulo.

1. Ejemplos y problemas.

En el lenguaje que se emplea en la enseñanza de las matemáticas se presentan diversas dificultades y problemas. El autor muestra varios de ellos a partir de cuatro ejemplos. Con ellos, se intenta destacar que los alumnos: a) usan sin mucho cuidado términos del lenguaje común como términos técnicos especializados; b) aplican expresiones inclusivas, reduciéndolas a exclusivas; c) carecen de percepción en reducciones analógicas debido a tratamientos previos de clasificación propiciados por el maestro; d) establecen falsas generalizaciones cuando se dan imprecisiones en las definiciones.

2. Características del lenguaje matemático.

En el capítulo anterior se habló de dificultades cuando los alumnos trabajan con la representación de hechos e ideas matemáticas, cosa que también se da entre los autores y los maestros. Como el lenguaje matemático se ha especializado mucho, fundamentalmente en este siglo, no puede ser aplicado estrictamente en las clases para la comunicación entre maestros con alumnos y entre los alumnos. Ello es debido a los principios del lenguaje matemático, pero esta situación puede salvarse cuando se establecen situaciones matemáticas apropiadas.

Atender las características del lenguaje matemático y sus diferencias con el lenguaje común ayudaría una mejor comunicación en el aula.

En tales consideraciones, el autor presenta varias ideas:

a) Las figuras geométricas, como representaciones geométricas, permanecen inmutables al aplicarles transformaciones como la rotación y la traslación; por esto, al usarse términos como ¡arriba! y ¡a la derecha! que usan los alumnos para describir y que son de orientación general física, no concuerdan con la descripción matemática de espacio, pero les ayudan como acercamientos al concepto matemático en tanto producen y acumulan más experiencia intelectual.

b) La mayoría de los conceptos matemáticos no pertenecen a las formas reales o se apoyan en relaciones entre objetos o conjuntos que se definen formalmente. Los teoremas se demuestran en matemáticas por relaciones lógicas y en el proceso escolar se hace uso de las imágenes-ejemplos para ir construyendo los conceptos matemáticos, modalidad ésta de la que no debe abusarse para no dejar anclado al alumno en este recurso.

c) En el lenguaje matemático, la no ambigüedad es necesaria; esto implica que: ¡el significado de cada término o símbolo particular está perfectamente definido en lo que respecta a su objetivo y a su extensión; cada término o símbolo tiene un significado único; cada significado particular de los conceptos mencionados en el texto corresponde a un solo término o símbolo!.

d) En relación con los términos y símbolos matemáticos no siempre la lista de ellos se usa para un único objeto o concepto y, ocasionalmente se utilizan términos que provienen del lenguaje cotidiano a los puede dárseles o no un significado distinto del semántico, y, adquirir un sentido de amplitud o de restricción en relación con el lenguaje común.

e) El lenguaje matemático no está supeditado al contexto en que se desarrolla: esto es, el lenguaje matemático y su interpretación es independiente de la referencia a un ámbito concreto, además de tomar en cuenta que el lenguaje matemático no es autosuficiente nunca.

f) También viene en característica del lenguaje matemático el hecho de que un texto matemático permite llegar a una consecuencia lógica y, derivado de ésta, al uso de un simbolismo mínimo, adecuado y conveniente.

3. Lenguaje matemático y comunicación en clase.

Existe un buen número de consideraciones para no seguir en estricto las reglas del lenguaje matemático. Entre ellas cuentan:

a) Las referidas al nivel de manejo de su idioma de comunicación y relacionado estrechamente con su desarrollo cognitivo e intereses personales.

b) Como lo ideal es que los alumnos vayan superándose en cada nivel de su educación, el uso del lenguaje matemático debe compaginarse a este propósito a fin de que pueda comunicar correctamente sus ideas, usando adecuadamente el lenguaje matemático que es posible que utilice.

c) Otra consideración se refiere a la tendencia metodológica en la que se esté pensando a fin de propiciar saltos cognitivos de calidad en los alumnos.

d) También es de considerar el enfoque que se adopte como guía pedagógica a lo largo de todo el desarrollo curricular, en el que predomine la aplicación práctica por sobre la teórica.

Aún con estas consideraciones, siempre que se pueda deben estar presentes los principios del lenguaje matemático a los que se ha hecho referencia.

4. Sugerencias para los maestros de español.

A partir de las conclusiones de las investigaciones conducidas por el autor acerca del uso del lenguaje en las clases de matemáticas, establece una serie de sugerencias dirigidas a los maestros de español para que en sus clases se analicen diferentes textos y publicaciones para poner en evidencia los variados tipos de expresión, incluyendo los de matemáticas, para:

a) videnciar las relaciones concreto/abstracto, verbalismo/formalismo y particular/general, entre otras.

b) establecer por comparación la claridad que se da en textos matemáticos en relación con lo polisémico y metafórico en textos literarios.

c) evidenciar la objetividad y coherencia que se persigue en un texto matemático contra la subjetividad y la interpretación que vienen implícitas en los textos literarios.

d) trabajar con las diferencias y semejanzas en la descripción de un artículo periodístico y la que se aplica en una construcción geométrica.

e) el manejo de la densidad y redundancia entre textos matemáticos y literarios.

f) las actividades de reflexión acerca del análisis del texto en lo matemático y en lo literario.

El autor termina haciendo hincapié en la necesidad de establecer en el aula la relación entre las palabras (o signos) y el sentido, pues el estilo literario permite aplicar palabras diferentes para un mismo sentido, pero que es impropia para la matemática y considerar que:¡...el sentido de una palabra difiere considerablemente de acuerdo a las situaciones de comunicación y al contexto...!. Sin embrago, la colaboración laboral entre el maestro de matemáticas y el de literatura es esencial para descubrir formas interesantes para el sentido correcto de los textos en uno y otro ámbitos.

Reseña de Santiago Valiente Barderas

Educación Matemática
Vol. 11 No. 3 Diciembre
1999 pp. 130-132

La resolución infantil de problemas

Stefhanie Thornton

Ediciones Morata, Serie Bruner. Colección: Psicología. El desarrollo del niño. Madrid, 1998.

Esta obra, breve por lo que es capaz de decir en poco espacio, amplia en el descubrimiento de nuevos hallazgos, y soberbia porque rompe con muchas ideas que se venían arrastrando como pesados fardos en las concepciones relativas a la resolución de problemas por los infantes, se nos presenta en seis capítulos:

Por qué es interesante la resolución infantil de problemas.

Una perspectiva histórica sobre resolución infantil de problemas: inferencia y el desarrollo de la lógica.

Herramientas conceptuales para resolver problemas: destrezas inherentes e información.

Resolver un problema y descubrir nuevas estrategias.

El contexto social de la resolución infantil de problemas.

Conclusiones

En la obra se aborda el proceso de resolución de problemas y cómo es que éste se desarrolla en la infancia.

En el capítulo primero, la tesis central es que, cuando el niño realiza uno de sus típicos juegos, las estrategias y actividades que desarrolla con este propósito, en cierta forma está implicada la resolución de algún tipo de problema y, además, en esa actividad de resolución está presente un cierto disfrute. La autora toma como definición de resolución de problema que ¡es lo que se hace cuando se tiene una meta y no se sabe cómo alcanzarla, de manera que podríamos haber esperado que fuera una experiencia bastante frustrante y negativa. Averiguar cómo resolver un problema nuevo también es una tarea intelectual estimulante, que empuja a los niños a valorar sus propios esfuerzos, a descubrir nuevos conceptos y a inventar estrategias nuevas...!.

Cuando se realiza un análisis acerca de estas actividades los investigadores recurren a hacer inferencias acerca de cómo actúan los procesos en la mente del infante cuando éste está resolviendo un problema, y ciertas maneras de interpretar lo que está realizando, además de construir teorías a partir de sus errores, aciertos y lo que ellos nos dicen de lo que hacen. Esto ha permitido una mejor comprensión acerca de las destrezas que desarrollan.

Una primera idea que la autora aporta es que estudios recientes hacen ver que en la resolución exitosa de problemas no depende tanto de qué tan listos sean los niños ni el uso que hagan de la lógica. Una segunda idea expresa que la experiencia de los niños y la retroalimentación que se les dé son determinantes en sus búsquedas hacia nuevas formas de resolución de problemas. Y una tercera idea se inscribe en que su habilidad en esta actividad es un proceso social relacionado con sus sentimientos en donde la confianza es determinante.

En el capítulo II la autora da una referencia histórica acerca de la resolución infantil de problemas. Se categoriza que la comprensión del desarrollo de las destrezas cognitivas llevan a la comprensión del cómo resuelven los niños los problemas. Se examinan las hipótesis que los especialista han venido considerando acerca del desarrollo en la resolución de problemas, a fin de comprender mejor lo que en la actualidad se concibe. Sobre esto, las ideas que campean acerca de las destrezas cognitivas son muy abarcativas y: 1) permiten que la comprensión sobre la resolución de problemas parezca sencilla, 2) hacen que el trabajo de enseñar a los infantes parezca más sencillo, y 3) hacen ver que usar las mismas detrezas en cualquier situación puede tener cierto sentido relacionado con su diseño. Con esto como principio la autora establece que las inferencias, al ser elementos fundamentales en toda actividad cognitiva, es deseable conocer cómo las utilizan los niños pues aportarían ideas sustantivas acerca de su inteligencia.

En relación con la teoría psicogenética la autora refiere que: ¡Piaget estudió el razonamiento de los niños desde el nacimiento hasta la adolescencia. Creía que la causa esencial de los cambios que observamos en la resolución de problemas de los niños a lo largo de su desarrollo era el crecimiento gradual de destrezas lógicas, desde su ausencia total en el nacimiento hasta la lógica compleja del adulto, a través de una sucesión de estadios...!.

Sin embargo, los nuevos estudios han venido demostrando que la teoría de Piaget es incorrecta, pues los niños muy pequeños son capaces de elaborar inferencias complejas en ciertos contextos y, el supuesto es que ílas tareas de Piaget no son las mejores medidas de la capacidad de los niños para extraer inferencias... (pues)... evitó deliberadamente utilizar situaciones familiares al diseñar sus tareas experimentalesî. Esto es, recientes investigaciones demuestran que los infantes de poca edad realizan inferencias apropiadamente, cosa que no se lograba con las tareas de Piaget, si los problemas que se les presentaban estaban definidos en situaciones concretas, comunes y conocidas y no de forma abstracta y descontextualizada. Con este concepto se llega a que ¡...la destreza lógica no es el factor principal que subyace al éxito o fracaso del niño en la resolución de problemas...!, y en igual forma, los estudios muestran que son otros factores más importantes, fuera de la lógica, los que son utilizados por los adultos en la resolución de problemas. Además, es contundente al afirmar: ¡...Pero en las situaciones familiares, la validez lógica está en conflicto a veces con la precisión objetiva. En estas situaciones, tanto los niños pequeños como los adultos tienden a abandonar la lógica y basar sus respuestas en lo que saben que es cierto. Los individuos mayores pueden resistir mejor esta tendencia en las situaciones adecuadas y pueden reconocer mejor cuándo es apropiado hacerlo. La lógica es sólo una de las estrategias de las que dispone quien resuelve problemas, y no es necesariamente el planteamiento preferido.

Seleccionar por el éxito. Es común que los infantes tengan más de una estrategia para resolver un problema y su tarea consiste en usar aquella que le va rindiendo mayores beneficios.

Aprender del éxito. Los niños dejan de lado las estrategias que no les han llevado al éxito, pero descubierta una que lo logra, son capaces de alterarla y mejorarla, sin que ello sea resultado aparente de una respuesta a la retroalimentación.

Cambiar entre estrategias similares. Cuando el niño ha tenido éxito con una estrategia y reconoce en un nuevo problema la posibilidad de su uso, realiza cambios a la estrategia original para aplicarla a las nuevas condiciones.

Descubrir algo diferente. A veces el niño se ve forzado a recurrir a nuevas estrategias, desechando aquella inicial, sin reconocer los elementos implícitos que le sirvan de apoyo para la resolución del nuevo problema.

Cambio guiado por estrategias. Las nuevas estrategias que aportan los niños en la resolución de problemas pueden observarse por la estrategia concreta que utilizan, así como los descubrimientos que ellos hacen en este proceso de aplicación.

Se concluye en el capítulo que aunque niños y adolescentes ítengan los mismos procesos dinámicos para resolver problemas!, no llegan a descubrimientos diferentes en una tarea concreta ni tienen la misma capacidad para resolverla, pues los diferentes conocimientos y experiencias llevan a aplicar estrategias diversas y ¡tácticas diferentes significan distintos descubrimientos y diversas posibilidades de éxito!. Sin embargo, esos procesos dinámicos son los mismos:

selección por el éxito

reflexión sobre y explicación de lo que sólo estaba implícito en las estrategias anteriores

los que generan nuevas estrategias por medio de la interacción entre las metas y la retroalimentación

Reseña de Santiago Valiente

Política Editorial

La revista *Educación Matemática* es una publicación cuatrimestral dedicada a difundir artículos de investigación sobre temas de educación matemática (v.g. procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas, currículum, evaluación, formación de profesores) en los distintos niveles escolares y dentro de un espectro amplio de corrientes, acercamientos, metodologías y escuelas de pensamiento. Considera para su publicación materiales originales, escritos en español, que den cuenta de resultados de investigaciones realizadas, preferentemente, en los países o comunidades hispanohablantes.

Son también susceptibles de ser publicados en *Educación Matemática* artículos referentes a análisis de experiencias didácticas; aplicaciones didácticas de los resultados de la investigación; análisis críticos de materiales, recursos y tecnologías; estudios sobre nuevas presentaciones o acercamientos de enseñanza a temas específicos, o ensayos sobre la disciplina o sobre las metodologías de investigación; siempre y cuando den cuenta explícita de los referentes teóricos y empíricos que los fundamentan.

Los artículos de matemáticas, física, historia, filosofía, epistemología, lingüística, psicología y otras disciplinas afines podrán ser considerados para su publicación *en Educación Matemática* sólo si su contenido se relaciona de manera significativa y explícita con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, ofreciendo a los lectores nuevas perspectivas de apreciación de las problemáticas de este campo.

La revista *Educación Matemática* recibe, adicionalmente, un número limitado de contribuciones en las siguientes secciones fijas:

1. *Problemas y soluciones*
   Problemas interesantes dirigidos a profesores o alumnos de matemáticas, así como soluciones ingeniosas y comentarios a problemas publicados en la revista o en otras publicaciones similares
2. *Notas de clase*
   Propuestas originales de presentación de un tema, acercamientos novedosos que hayan sido probados en clase, lecciones, prácticas, ejercicios y, en general, cualquier producto de la experiencia en el aula que el profesor considere valioso compartir con sus colegas, siempre y cuando se incluya el soporte bibliográfico correspondiente
3. *Reseñas*
   a) De libros y otras publicaciones
      Ensayos bibliográficos sobre materiales de interés para la comunidad de educadores de las matemáticas, descripciones breves y analíticas de libros y materiales relacionados con la matemática y su enseñanza o notas sobre novedades editoriales
   b) De tesis de posgrados
      Resúmenes breves de las investigaciones que dieron lugar a la obtención de un grado de maestría o doctorado en educación matemática
   c) De congresos, conferencias y reuniones
      Notas breves sobre actividades académicas organizadas por las comunidades de educadores de la matemáticas en cualquier parte del mundo
4. *Notas y noticias*
   Programas de actividades académicas futuras y otras notas de interés para la comunidad
5. *Foro del lector*
   Cartas dirigidas al Comité Editorial que sean de interés para la comunidad

Para algunos temas especiales que requieran mayor espacio, el Comité Editorial considerará la publicación de números monográficos adicionales

En casos excepcionales, el Comité Editorial podrá aceptar para su publicación la traducción al español de artículos inéditos escritos originalmente en otro idioma.

Guía para los árbitros

Todos los manuscritos se someten a un proceso de revisión por pares, anónimo en las dos direcciones: el árbitro no recibe el nombre del autor y el autor no conoce los nombres de los revisores. Cada artículo es enviado a tres árbitros cuya especialidad y trayectoria profesional garantice la calidad de los trabajos aceptados. Los comentarios y observaciones de los revisores se transcriben y envían al autor a fin de que éste los tome en cuenta para nuevas versiones. Se espera de los árbitros una revisión detallada y constructiva que ayude al autor a mejorar su manuscrito.

Para la revisión, los árbitros deberán tomar en cuenta los siguientes criterios generales:

- Si el artículo es, inequívocamente, un estudio en educación matemática
- Si constituye una contribución original al campo
- Si los referentes teóricos y empíricos son explícitos y apropiados
- Si es accesible e interesante para un lector internacional
- Si hace un análisis bien fundamentado y está coherentemente argumentado
- Si presenta un recuento apropiado de los trabajos previos pertinentes al tema
- Si la presentación es adecuada.

Como resultado de la evaluación, un manuscrito puede:

- Aceptarse para su publicación en su forma original
- Aceptarse para su publicación haciendo modificaciones menores
- Revisarse después de que se le hagan modificaciones mayores
- Rechazarse

Guía para el autor

Los artículos enviados a la revista *Educación Matemática* deben ser trabajos originales que no hayan sido publicados anteriormente. No se revisará ningún manuscrito que no cumpla las especificaciones siguientes:

Los manuscritos deberán ser enviados en original y tres copias, con un resumen de 150 palabras como máximo y las notas, tablas, figuras y referencias correspondientes; mecanografiados a doble espacio, por un solo lado de la hoja y con márgenes amplios. El nombre, institución y domicilio completo del autor (incluyendo código postal, teléfono, fax y dirección electrónica) deberán aparecer claramente escritos sólo en el original. Las copias deben contener el título del trabajo pero ninguna referencia al autor, para facilitar el proceso de revisión anónima. Las páginas del manuscrito deben ser numeradas de manera consecutiva; se sugiere, en la medida de lo posible, evitar las notas a pie de página y sustituirlas por notas al final del artículo. Las referencias dentro del texto deben señalarse indicando, entre paréntesis, el autor, año de la publicación y página o páginas (Freudenthal 1991, 51-53). Al final del artículo se debe incluir la ficha bibliográfica completa de todas las referencias citadas en el texto de acuerdo al siguiente modelo:

Bishop, A.J. (1988): *Mathematical Enculturation. A Cultural Perspective on Mathematics Education*. Londres: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (1983): «Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques» en *Recherches en didactique des mathématiques*, 4 (2) 167-198.

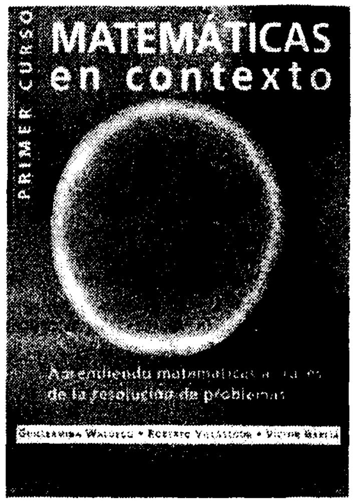
Kaput, J. (1991): «Notations and Representations as Mediators of Constructive Processes» en von Glasersfeld (ed.): *Constructivism and mathematical Education*, 53-74. Dordretch: Kluwer Academic Publishers.

Cuando el artículo haya sido aceptado para su publicación, el autor deberá enviar la versión definitiva completa en impresión y disquete, incluyendo el *resumen en español y en inglés o francés* con una extensión máxima de 150 palabras cada uno, y los datos completos del autor; en caso de discrepancia entre la impresión y el disquete, se tomará como base la versión impresa. Es responsabilidad del autor el contenido y la mecanografía del artículo. El Comité Editorial se reserva el derecho de modificar el título del artículo cuando lo considere conveniente, previa notificación al autor.

Sólo será posible procesar los manuscritos capturados en procesadores MS-Word o Word-Perfect (en cualquiera de sus versiones). Las figuras, gráficas e ilustraciones que así lo ameriten, deberán enviarse en hojas separadas, trazadas con tinta negra.

El autor recibirá gratuitamente cinco ejemplares del número de la revista que contenga su artículo. Cualquier publicación posterior del material requerirá la autorización por escrito del Comité Editorial.

Otros textos de Grupo Editorial Iberoamérica

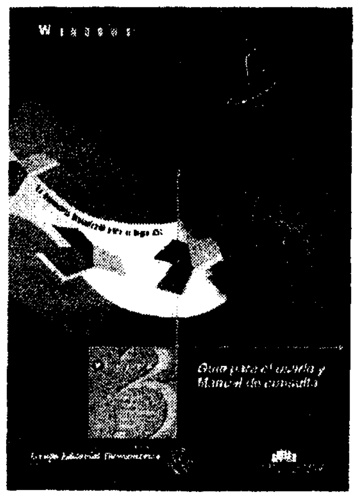


Matemáticas en Contexto (pimer, segundo y tercer curso)
Guillermina Waldegg / Roberto Villaseñor / Victor García

Esta serie cubre los contenidos de matemáticas en secundaria con el enfoque de solución de problemas y siguiendo el modelo constructivista. Cada libro esta organizado en lecciones que tienen una secuencia como la que sigue: situación problema, estrategia de solución, aplicaciones, ejercicios y lecturas complementarias.
Contamos con una guía para el maestro y material complementario.

GEOMETRÍA ANALÍTICA (con *software*)
Fernando Hitt / Hugo Mejía Cortés / Eugenio Filloy

El libro está dirigido a estudiantes y profesores de matemáticas del nivel medio superior. Los contenidos que trata han surgido de los planes y programas de estudio de la geometría analítica plana y del espacio correspondientes a ese nivel.
Los requisitos para abordarlos conciernen al álgebra y a la trigonometría plana elementales. El eje del libro es la resolución de problemas como parte esencial en el desarrollo de las habilidades matemáticas. La estrecha relación entre gráficas y expresiones algebraicas características de la geometría analítica, se aprovecha esta obra para promover en el estudiante la adquisición de habilidades en los procesos de modulación matemática en la resolución de problemas. Se diseñó un *software* de apoyo al profesor y al estudiante, con la finalidad de que el alumno pueda construir conocimiento matemático de los contenidos que se tratan en el aula. Los *softwares* Rectas y Cua-drat-X son un firme apoyo para ayudar al estudiante en ese aspecto, además de proporcionarle medios de auto evaluación y pomoción del desarrollo de habilidades matemáticas. Se incluye material de autoevaluación para facilitar al profesor la preparación de ejercicios y exámenes. También se incluyen ejercicios para la calculadora gráfica.



El Géometra Versión para Windows
Nick Jackiw

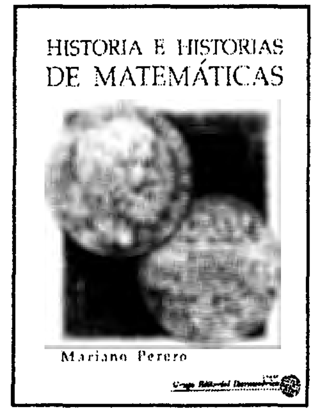
El mejor software para aprender y enseñar geometría a nivel mundial ahora en Español, muy versatil que puede ser usado desde la primaria hasta licenciatura y proyectos de investigación.
EL GEÓMETRA es una poderosa herramienta para la exploración de la geometría. Con **EL GEÓMETRA** usted puede construir una asombrosa variedad de figuras.

INFORMES Y PEDIDOS EN: Nebraska 199, Col. Nápoles Tel: 523 09 94 Fax: 543 11 73

Otros textos de Grupo Editorial Iberoamérica

Historia e historias de matemáticas

Mariano Perero

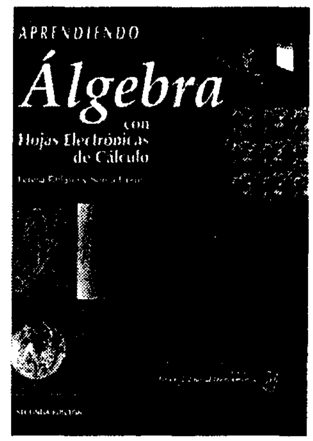


Libro interesante y ameno que muestra una novedosa perspectiva de las matemáticas. Presenta a los personajes que existen detrás de las fórmulas, por qué y cómo las inventaron, en qué momento de la historia y en respuesta a qué necesidades intelectuales y económicas aparecieron. Nos muestra a los hombres y mujeres que dedicaron su vida a esta disciplina como personajes reales, con angusias, alegrías y problemas propios, a través de historias y anécdotas que harán más activo, interesante e instructivo el conocimiento del mundo de las matemáticas. Además, está escrito en forma clara y amena.

Aprendiendo álgebra con hojas electrónicas de cálculo (Cuaderno para el alumno) 2a ed

(Complemento del libro para el profesor *Enseñando álgebra con hojas electrónicas de cálculo*)

Teresa Rojano•Sonia Ursini

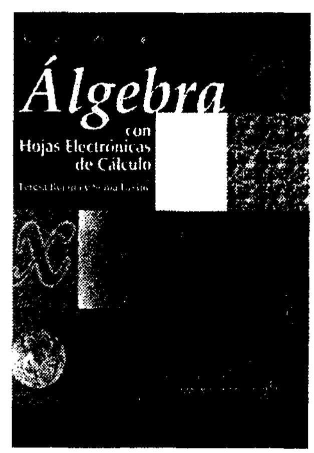


Este cuaderno de actividades para los estudiantes permitirá usar una computadora y el programa Excel como un instrumento para crear ambientes que propicien en los alumnos de secundaria y bachillerato el desarrollo y construcción de nociones y conceptos algebraicos que les sean útiles para comprender su entorno y resolver problemas de la vida cotidiana. Esta obra es el resultado de investigaciones y experiencias con alumnos de educación básica, media y media superior (10 a 18 años de edad). Todas las actividades se presentan a través de hojas de trabajo en las que se plantea un problema, y están pensadas para desarrollarse con todo un grupo de estudiantes durante las horas normales de clase.

Enseñando álgebra con hojas electrónicas de cálculo (Libro para el profesor)

(Complemento del cuaderno para el alumno *Aprendiendo álgebra con hojas electrónicas de cálculo*)

Teresa Rojano•Sonia Ursini



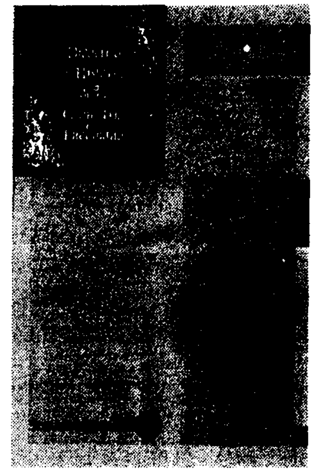
Este libro contiene la metodología necesaria para que el maestro utilice la computadora y el programa Excel para propiciar en el alumno la construcción de conceptos algebraicos. Proporciona las bases para que el profesor coordine las actividades, promueva la discusión y la cooperación entre los alumnos, aliente a la reflexión, aclare dudas, recuerde alguna pieza de información, haga sugerencias e involucre al alumno en el problema inicialmente planteado, ayudándolo a construir los conceptos. El texto inicia con un acercamiento a la hoja electrónica de cálculo. Cada capítulo contiene una introducción con problemas comentados, actividades para la hoja de cálculo y hojas de trabajo del cuaderno del alumno con observaciones. Cada sección cuenta con ejemplos, anotaciones acerca de la hoja de cálculo, notas para el salón de clases, notas didácticas, notas técnicas y observaciones.

INFORMES Y PEDIDOS EN: Nebraska 199, Col. Nápoles Tel: 523 09 94 Fax: 543 11 73

Otros textos de Grupo Editorial Iberoamérica

Didáctica e Historia de la Geometría Euclidiana

Eugenio Filloy Yagüe



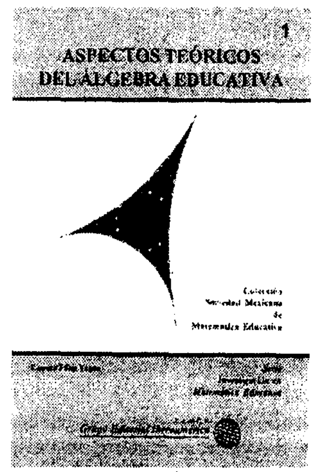
Libro que reseña los inicios de la geometría desde los babilonios, egipcios, la geometría pitagórica, la geometría de Platón y de Aristóteles, los elementos y método axiomático de Euclides, hasta los desarrollos axiomáticos de Bolyai-Lobachevski.

Aspectos sobresalientes

- Se combina el desarrollo histórico con problemas y aplicaciones clásicas, así como desarrollo de axiomas y teoremas.

Apectos Teóricos del Álgebra Educativa

Eugenio Filloy Yagüe



El álgebra educativa quedó en el centro de la investigación a partir de mediados de los ochenta. Por su carácter abstracto y porque las habilidades sintácticas requieren de un buen grado de competencia, este campo requirió de nuevos acercamientos: la presencia de conceptos provenientes de la semiótica y análisis cercanos a la historia de las ideas algebraicas.

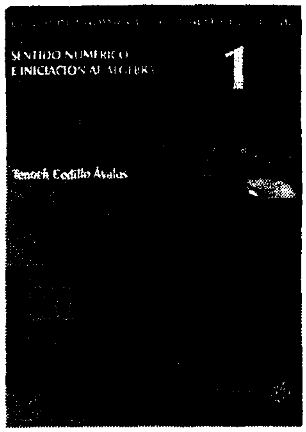
Este volumen contiene los materiales, relacionados con el tema en cuestión, empleados por el autor en sus cursos de doctorado dictados en las universidades de Valencia y Granada en 1997. En los primeros siete capítulos se hace una introducción al tema, mientras que en los cuatro restantes se da una idea de los estudios de corte empírico y epistemológicos realizados durante la presente década.

INFORMES Y PEDIDOS EN: Nebraska 199, Col. Nápoles Tel: 523 09 94 Fax: 543 11 73

SERIE LA CALCULADORA EN EL SALON DE CLASE

Sentido numérico e iniciación al álgebra

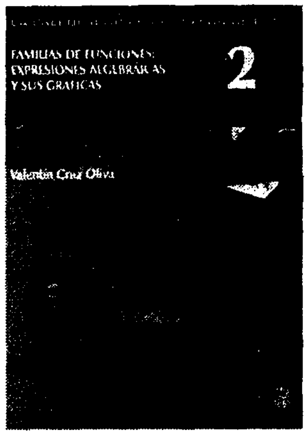
Tenoch Cedillo Ávalos



Texto dirigido a estudiantes de escuelas secundarias. El propósito de este texto es apoyar la enseñanza de la artimética desde una perspectiva didáctiva con el apoyo de la calculadora, introducir al estudio de los números y sus operaciones como un lenguaje que permira plantear y resolver problemas e introducir el uso del código algebraico.

Familias de funciones: expresiones algebraicas y sus gráficas

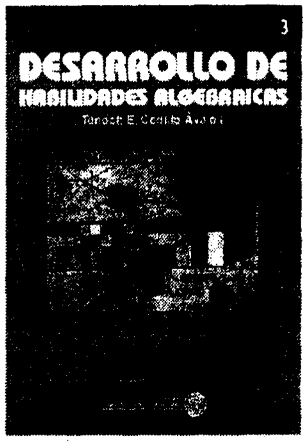
Valentín Cruz Oliva



Texto diseñado para desarrollar habilidades y conceptos a través de una constante interacción entre las representaciones gráfica y algebraica de familias de funciones. Utilizando la calculadora gráfica cubre los temas de funciones que se ven en escuelas secundarias. Propone actividades con hojas de trabajo de acuerdo con las siguientes familias de funciones.

Desarrollo de abilidades algebraicas

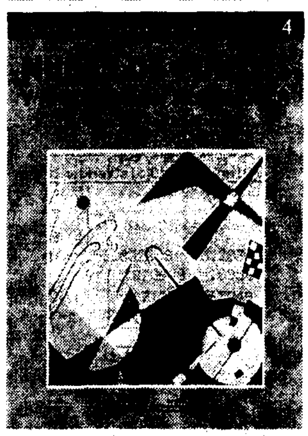
Tenoch E. Cedillo Ávalos



El propósito de este texto es poner a disposición de profesores e investigadores un libro que presenta un modelo didáctico para el uso de la calculadora en la clase de matemáticas, tambien ofrece un trabajo que ha sido conformado a lo largo de un estudio de seis años con cerca de 20 000 estudiantes y 200 profesores ubicados en distintas partes del país.

Nubes de puntos y modelación algebraica

Tenoch E. Cedillo Ávalos



Es un libro que puede ser de utilidad para investigadores en educación matemática y para profesores. Los investigadores y estudiantes de posgrado en educación matemática, encontrarán en este material una serie de reflexiones y un modelo didáctico sobre una problemática educativa de actualidad en el ámbito de la investigación nacional e internacional: el potencial de la calculadora como una herramienta que media el aprendizaje de nociones y el desarrollo de habilidades básicas en el estudio del álgebra escolar.

INFORMES Y PEDIDOS EN: Nebraska 199, Col. Nápoles Tel: 523 09 94 Fax: 543 11 73

VISUALIZANDO LA FUNCIÓN CON LA PC

FERNANDO HITT ESPINOSA / ARTURO TORRES OROZCO

Libro novedoso que presenta un nuevo acercamiento didáctico para comprender el concepto de función.

Discute las dificultades que tienen los alumnos para asimilar y visualizar el concepto de función.

Hace notar la falta de relación entre la definición (concepto) y la imagen (concepto).

Se utiliza el programa de cómputo CALCULA del Dr. José Lius Abreu y la M. en C. Marta Oliveró, como un laboratorio en el cual se pueden realizar experimentos con las funciones y sus gráficas.

VISUALIZANDO LAS CÓNICAS CON LA PC

FERNANDO HITT ESPINOSA / EUGENIO FILLOY

Este novedoso libro que puede considerarse como un laboratorio donde el alumno tendrá un nuevo acercamiento didáctico al estudio de la geometría analítica.

El autor analiza las dificultades que tiene los alumnos para asimilar los conceptos acerca de las cónicas.

Se utiliza el programa de cómputo CÓNICAS del Dr. Jose Luis Abreu y la M. en C. Marta Oliveró, como un taller donde el alumno puede axperimentar con las gráficas de parábolas, hipérbolas y elipses.

Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V.
Nebraska 199. Col. Nápoles. 03810 México, D.F. Tel. 523 09 94 Fax. 543 11 73