NOTAS DE CLASE

Educación Matématica
Vol. 11 No. 1 Abril 1999
pp. 119-134

Modelación matemática: Estrategia para enseñar y aprender matemáticas

Fecha de recepción: Diciembre, 1996

María Salett Biembengut y Nelson Hein
Departamento de matemática-CCEN
Universidad Regional de Blumenau-FURB- Brasil
salell@furb.rct-sc.br

RESUMEN: *En este artículo, se presenta un punto de vista sobre el uso de la Modelación Matemática como auxiliar en el proceso de enseñanza y aprendizaje en cursos regulares donde hay un programa que se debe cubrir (curriculum); se presentan ejemplos y algunos parámetros que permiten al profesor obtener la información de un modelo matemático para posteriormente "traducirlo" para la enseñanza.*

RESUMO: *Neste artigo, apresentamos sobre o que é Modelação Matemática no processo de ensino e aprendizagem em cursos regulares onde há um programa a ser cumprido (currículo), exemplos e algun parâmetros que permitem o professor informar-se de um modelo para então "traduzir-lo" para ensinar.*

1. INTRODUCCIÓN

El modelaje matemático, esencia de nuestro trabajo de investigación, nos ha llevado en los últimos años, a resultados significativos para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Los resultados han sido contrastados a partir de trabajos experimentales que iniciamos en 1986 con un grupo de alumnos de quinto grado de la red oficial brasileña de enseñanza extendiéndolos, posteriormente, a otros grupos de primero a tercer grado y adquirieron consistencia a través del estudio de la bibliografia disponible sobre teorías de la enseñanza y aprendizaje.

Lo que nos motivó a difundir estos resultados a comunidades de educadores matemáticos, tornándolos actualmente objeto central de nuestra investigación, fué el número de actividades en las cuales participamos por invitación de simpatizantes de nuestra propuesta. En estas actividades, a través de conferencias, cursos de extensión o de especialización, tuvimos la oportunidad de estar con profesores de las más diversas regiones de Brasil y del exterior. Independientemente de la región, de las condiciones socio- económicas y culturales en que viven, la mayoría de estos profesores nos expresaron sus preocupaciones en relación con la poca motivación de sus alumnos en lo que se refiere al aprendizaje de las matemáticas, asumiendo de forma explícita o implícita sus dificultades en responder los "por qués" de enseñar este o aquel contenido.

Estos encuentros nos permitieron identificar necesidades emergentes y suplir los "vacíos" de nuestras propuestas resultado de los trabajos experimentales hasta entonces realizados, llevándonos a proponer acciones graduales, para conseguir mejorías en la enseñanza-aprendizaje de matemáticas, respetando las condiciones estructurales de los educadores.

En este trabajo, presentamos una síntesis sobre lo que es Modelo y Modelaje Matemático y Modelación y Modelaje en el proceso de la enseñanza y aprendizaje de Matemáticas.

2. MODELOS Y MODELAJE

2.1. Modelo Matemático

Muchas situaciones del mundo real pueden presentar problemas que requieran soluciones y decisiones. Algunos de estos problemas tienen un aspecto matemático relativamente simple, involucrando un matemática elemental, como por ejemplo:

- el tiempo necesario para recorrer una distancia de 40 kilómetros, manteniendo la velocidad del vehículo de 80 kilómetros por hora;
- el interés que cobra una institución financiera por un determinado préstamo;
- el área de un terreno de forma rectangular.

Otros problemas, "camuflados" en una determinada área del conocimiento, necesitan un análisis más preciso de las variables involucradas, como:

- la mejor manera para reducir el "retrabajo" en una fábrica;
- la cantidad permitida y el periodo apropiado para la caza de un animal predador sin que esto interfiera en el ecosistema.

Cualquiera que sea el caso, la solución de un problema requiere una formulación matemática detallada.

Un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que traducen, de alguna manera, un fenómeno en cuestión o problema de situación real, lo denominamos Modelo Matemático.

En la ciencia, la noción de modelo es fundamental para la construcción y expresión del conocimiento. En especial, la matemática permite la elaboración de modelos que posibilitan una mejor comprensión, simulación y previsión del fenómeno estudiado.

Un modelo puede ser formulado en términos familiares, tales como: expresiones numéricas o fórmulas, diagramas, gráficos o representaciones geométricas, ecuaciones algebraicas, tablas, programas computacionales, etcétera.

Por otra parte, cuando se propone un modelo, éste proviene de aproximaciones realizadas para poder entender mejor un fenómeno, sin embargo, no siempre tales aproximaciones están de acuerdo con la realidad. Sea como sea, un modelo matemático retrata, aunque con una visión simplificada, aspectos de la situación investigada.

2.2. Modelaje Matemático

Modelaje Matemático es el proceso involucrado en la obtención de un modelo. Este proceso, desde cierto punto de vista, puede ser considerado artístico, ya que para elaborar un modelo, además del conocimiento profundo de matemáticas, el modelador debe tener una dosis significativa de intuición-creatividad para interpretar el contexto, discenir qué contenido matemático se adapta mejor y sentido lúdico para jugar con las variables involucradas. Las formulaciones, resoluciones y expresiones creadas deberán servir no sólo para una solución particular, sino también, posteriormente, como soporte para otras aplicaciones y teorías.

Grosso modo, podríamos decir que **matemáticas y realidad** son dos conjuntos disjuntos y el modelaje es un medio de vincularlos. El siguiente esquema, representa esta propuesta:

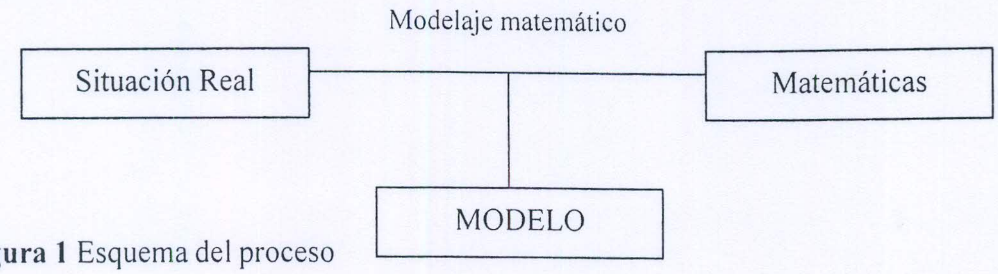

Figura 1 Esquema del proceso

Actualmente, este proceso es usado en toda la ciencia, y ha contribuido en la evolución del conocimiento humano. Sabemos que la matemática se está usando en los fenómenos microscópicos en tecnobiología y también en los macroscópicos cuando se pretende conquistar el universo.

El modelaje matemático, ciertamente, no es una idea nueva. Su esencia siempre estuvo presente en la creación de las teorías científicas y, en especial, en la creación de las teorías matemáticas. A inicio del siglo XX fue muy utilizado en la solución de problemas de biología y economía. Durante la Segunda Guerra Mundial, por ejemplo, intentos de resolver cuestiones de defensa y ataque propiciaron el desarrollo de otra ramificación de la matemática - investigación operativa - que posee, hoy en día, extensa aplicación en la industria.

Representar una situación "real" con "instrumental" matemático - modelo matemático - involucra una serie de procedimientos. Identificamos tres etapas en el proceso, subdivididas en cinco sub-etapas, a saber:

1ª Interacción con el asunto

(i) reconocimiento de la situación problema;

(ii) familiarización con el asunto a ser modelado (investigación);

2ª Construcción matemática

(i) formulación del problema (hipótesis);

(ii) resolución del problema en términos del modelo;

3ª Modelo matemático

(i) interpretación de la solución (convalidación);

El diagrama de la siguiente página, representa el proceso:

1ª) Interacción con el asunto

Una vez delineada la **situación** que se pretende estudiar, debe hacerse una **investigación** sobre el asunto, indirectamente (a través de libros y revistas especializadas) y directamente *in situ* (a través de datos experimentales obtenidos con especialistas del área).

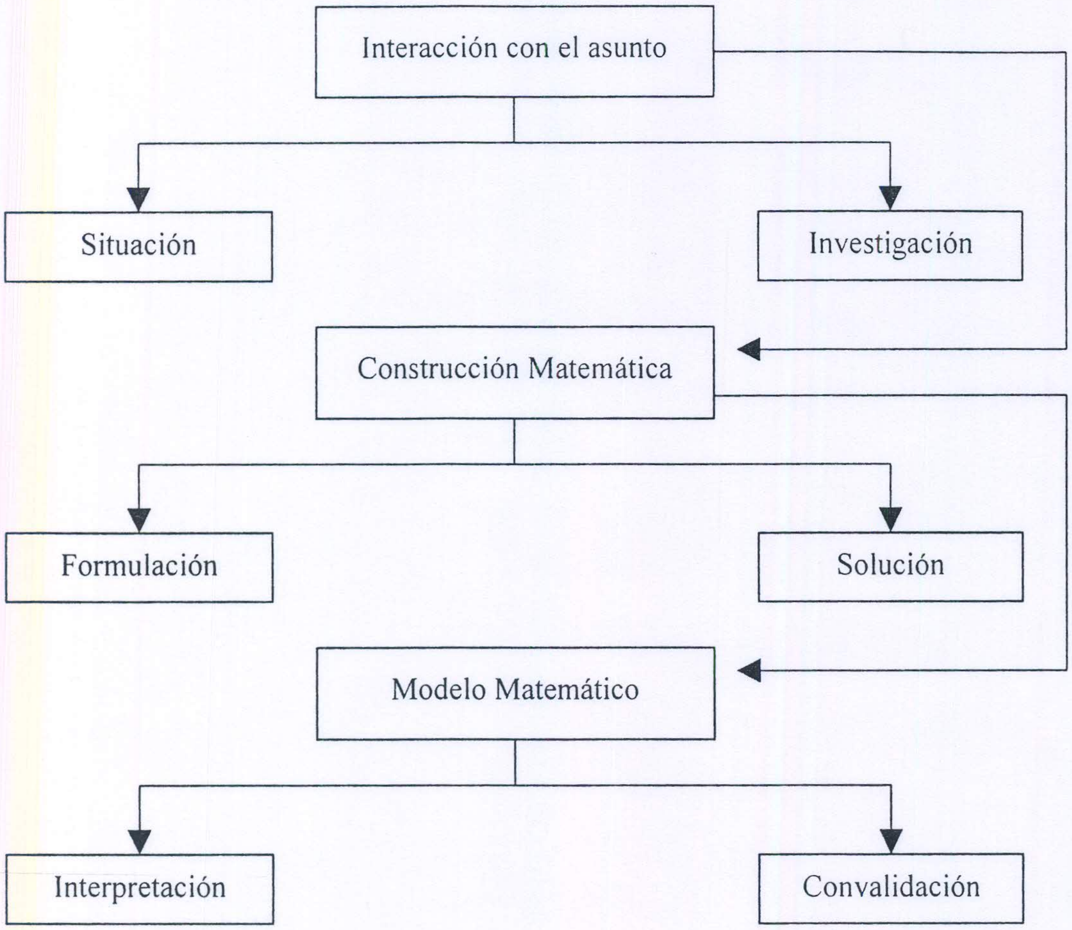

Figura 2

Aunque hayamos subdividido esta etapa en dos subetapas, el reconocimiento de la situación-problema se torna cada vez más claro, a medida que se van conociendo los datos.

2ª Construcción Matemática

Esta es la etapa (subdividida en la formulación del problema y solución) más compleja y desafiante. Es aquí que se da la "traducción" de la situación-problema al lenguaje matemático. Intuición y creatividad son elementos indispensables.

En la formulación del problema es necesario:

- clasificar las informaciones (relevantes y no relevantes) identificando los hechos involucrados;
- decidir cuales son los factores a ser perseguidos - formulando hipótesis;
- generalizar y seleccionar variables relevantes;
- seleccionar símbolos apropados para estas variables;
- describir estas relaciones en términos matemáticos.

Esta sub-etapa debe concluir con un conjunto de expresiones aritméticas y fórmulas, ecuaciones algebraicas, graficos, representaciones, o programa computacional que lleve a la solución, o que permita la deducción de una solución.

En la solución del problema en términos del modelo, la situación pasa a ser resuelta o analizada con el "instrumental" matemático de que se dispone. Esto requiere un agudo conocimiento sobre las entidades matemáticas usadas en la formulación.

La computadora puede ser un instrumento imprescindible, especialmente en las situaciones donde no fuese posible resolver por procesos contínuos; de esa manera, se obtienen resultados por procesos discretos.

Cabe aquí destacar que muchos modelos matemáticos no resueltos en el siglo pasado condujeron al desarrollo de otras ramificaciones de la matemática.

3ª Modelo Matemático

Para poder concluir el modelo, se torna necesario una revisión para así comprobar en qué nivel éste se aproxima a la situación-problema modelada y, a partir de ahí, poder utilizarlo. De esta forma, se hace primero la **interpretación** del modelo y posteriormente, se comprueba la adecuación - **convalidación**.

Para interpretar el modelo se analizan las implicaciones de la solución, derivada del modelo que está siendo investigado y, entonces, se comprueba la adecuación del mismo, volviendo a la situación problema investigada, evaluando cuan significativa y relevante es la solución.

Si el modelo no atiende a las necesidades que lo generaron, el proceso debe ser retomado en la segunda etapa (**construcción matemática**), cambiando hipótesis, variables, etcétera.

Es importante al concluir el modelo, elaborar un informe comunicando toda las facetas del desarrollo, con el fin de propiciar el uso.

3. MODELAJE MATEMÁTICO EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

Desde hace algunos años, se están procesando reestructuraciones en el curriculum y métodos de enseñanza de las matemáticas, con el objetivo, entre otros, de aumentar el interés por la aplicación de éstas en las situaciones cotidianas.

Autores como Bruner (1987;75) sustentan que el aprendizaje no es un mero sumar conocimiento sino un "proceso de crecimiento". "Saber es un proceso y no un producto". En este sentido, el sistema educativo debe proveer elementos para que el individuo desarrolle sus potencialidades, propiciándole capacidad para pensar crítica e independientemente.

Ya que las matemáticas no sólo contribuyen sobremanera al ejercício intelectual, sino que también es el lenguaje de la ciencia, Adler (1968;60) destaca la importancia de esta asignatura, defendiendo que "debemos buscar maneras de desarrollar precozmente, en los alumnos, la capacidad para leer e interpretar el domínio de las matemáticas". Este autor pone de relieve que los símbolos no deben ser seccionados de sus raíces ya que se tratan de "herramientas de pensamiento" y que el "divorcio entre el pensamiento y la experiencia directa priva al primero de cualquier contenido real y lo transforma en una concha vacía de símbolos sin significado".

Bajo éste punto de vista, Bassanezi (1990) afirma que la enseñanza debe estar volcada hacia los intereses y necesidades prácticas de la comunidad. "Aunque su interés no se agote ahí, no es intención hacer una apología de para qué sirve" y Adler (1968;60) completa: "Ni tampoco querer que el alumno, en pocos años de experiencia, descubra lo que la humanidad, incluso a través de sus mejores inteligencias, descubrió a lo largo de miles de años".

Las afirmaciones de los autores anteriormente citados constituyen, a nuestro modo de ver, una fuerte defensa del proceso de modelaje matemático en la enseñanza. La escuela es un ambiente indicado para la creación y evolución de modelos pues esta forma, se le oferece a los alumnos la oportunidad de estudiar situaciones-problema, a través de investigación, desarrollando su interés y agudizando su sentido crítico.

3.1. ¿Como utilizar el Modelaje Matemático como estrategia de enseñanza de Matemática?

El Modelaje Matemático en la enseñanza puede ser un camino para despertar en el alumno el interés por tópicos matemáticos que aún desconoce, al mismo tiempo que aprende el arte de modelar matemáticamente.

Para utilizar esta estrategia en la enseñanza, es necesario saber, *a priori*, el tiempo disponible de los participantes para el trabajo extra-clase, el número de horas de clases del curso en cuestión y el conocimiento matemático común a todos los participantes.

Definidas estas condiciones, el profesor puede optar por presentar primero los modelos matemáticos o iniciar con el modelaje, intercalando adecuadamente la exposición de los modelos.

3.1.1. Etapas que pueden ser seguidas para la realización del Modelaje Matemático en la enseñanza:

a) Presentación del Proceso

Se inicia definiendo Modelaje Matemático y mostrando cómo éste método puede valer para el aprendizaje de contenidos matemáticos.

La comprensión de los procedimentos involucrados en el Modelaje puede ser facilitada si el profesor presenta un modelo matemático, resaltando los pasos para obtener resultados justificando, cuando sea necesario, los conceptos matemáticos utilizados.

Es importante que este modelo esté en "sintonia" con el conocimiento y las expectativas de los alumnos participantes.

b) Elección de un tema

El Modelaje se comienza proponiendo que los participantes se reunan en grupos de interés, eligiendo un tema por grupo.

La actuación del profesor en ese momento, debe estar primordialmente volcada hacia estrategias que faciliten a los alumnos la elección de un tema amplio, motivador y sobre el cual de cierta manera sea fácil de obtener datos o informaciones.

c) Plan de trabajo a ser desarrollado por los grupos.

Muchas veces el tema elegido es muy amplio frente al tiempo disponible; en este caso, planear mejora el trabajo.

Así, el profesor propone a cada grupo:

- plantear preguntas sobre el tema;
- hacer una investigación (reunir datos), para familiarizarse con el tema elegido;
- entrevistar un especialista en el tema, en el momento adecuado, si fuera conveniente.

Los datos reunidos proporcionarán otras cuestiones. Cuanto mayor sea el tiempo disponible para la investigación y familiarización con el tema elegido, mejor será el resultado del curso.

d) Orientación en el proceso.

El profesor debe tomar este plan, no sólo para integrarse al tema elegido, sino también para sugerir un orden para la resolución de las cuestiones (desde la más simple a la más compleja) y definir una forma para orientar y encaminar a los grupos.

Los procedimientos para llegar a la elaboración del modelo (modelaje) deben seguir el orden especificado en el ítem 2.2 de este escrito.

e) Contenido Matemático

Cabe aquí destacar que la matemática desarrollada no rebasa los límites del modelo que está siendo trabajado por el grupo lo que, bajo cierta perspectiva puede ser poco amplio, dependiendo del tema y del conocimiento matemático del grupo.

Si la matemática requerida por un grupo fuera la misma para la mayoría, el profesor puede hacer una explicación para toda la clase. En caso de que un determinado contenido fuese de interés solamente de un cierto grupo, el profesor induce a la investigación, manteniéndose como orientador.

f) Presentación de Modelos Matemáticos

Si el profesor cree conveniente puede, simultáneamente, seleccionar otros modelos matemáticos disponibles y presentarlos a los grupos con un doble objetivo:

- aclarar el trabajo que vienen realizando;
- introducir contenidos matemáticos que considere relevantes para toda la clase.

En este sentido, a medida que se está exponiendo un modelo matemático, el profesor debe interrumpir temporalmente la exposición, desarrollar las matemáticas necesarias para la resolución de las cuestiones involucradas, volviendo, a retomar el modelo inicial. El tiempo de interrupción depende de la amplitud del contenido. Lo importante es no perder de vista la motivación.

g) Validez y extensión de los trabajos desarrollados

Al final del trabajo es fundamental que cada grupo:

- Verifique la adecuación del Modelo.

Por más sencillo que sea el Modelo elaborado, debe retornar a la fuente de investigación para verificar el grado de validez.

- Exponga su trabajo.

Se puede planear uno o más días para que cada grupo dé a conocer su trabajo a los demás compañeros o a la Comunidad Escolar, o si fuera el caso, a quien le interese.

- Haga un informe.

Es la mejor forma de registrar ideas: presentarlas a través de un trabajo escrito.

3.1.2. Ejemplo

Presentamos en seguida un ejemplo para facilitar la comprensión del modelaje en la enseñanza. Suponiendo que un grupo de alumnos eligió el tema "abejas" y las cuestiones levantadas fueron:

1. Panal: geometría del panal;
2. Formación de la Colmena: dinámica poblacional;
3. Comunicación: el baile de las abejas;

4. Polinización: proceso y composición de la miel;
5. Comercialización de la miel.
6. Utilización de la miel.

A partir de una breve investigación, el grupo decide iniciar el trabajo estudiando la construcción de una colmena (dinámica poblacional).

Una colmena de abejas mielíferas en plena producción está compuesta por:

1	reina
80 000	obreras
400	zánganos

- La reina tiene una doble función durante sus cinco años (en promedio) de vida:

  - comandar la colmena (los científicos aseguran que esto se hace a través de una hormona en la saliva).
  - reproducir (condición adquirida debido a la alimentación recibida con la jalea real).

- Los zanganos son apenas reproductores. No trabajan y comen dos veces más que una obrera durante toda su vida, la cual puede llegar a 80 días.

- Las obreras viven, en promedio, 40 días pasando por cuatro etapas de trabajo en este período:
  - ama de casa (limpieza de las celdas);
  - nodriza (alimentación de la reina y de las larvas);
  - ingeniera (responsable por las celdas y la miel);
  - campesina (recolectora de néctar, agua y polen).

La postura de huevos de la reina llega a 3 000 unidades por dia, reduciéndola hasta cerca de la mitad cuando ya cuenta con 3 años de edad.

El huevo tiene 21 días de incubación.

La condición de vejez de la reina es percibida por las obreras nodrizas que pasan a alimentar otra larva com jalea real, con el fin de convertirla en una nueva reina.

La nueva reina, una vez adulta (con 10 días) se prepara para un vuelo nupcial atrayendo a los zanganos de diversas colmenas. Vuela muy alto, haciendo que centenares de zánganos vuelen detrás, lo que termina por llevar a la muerte a la mayoría de ellos. Solamente los más fuertes consiguen alcanzarla (cerca de 8 o 10). Todos éstos logran fecundar a la nueva reina, después de ello mueren.

Cuando esta nueva reina retorna a la colmena, expulsa a la vieja reina que sale junto con aproximadamente, 10.000 obreras. Estas operarias y la reina saliente formarán una nueva colmena.

Analizando el texto surge una pregunta:

¿Cuanto tiempo tardará en formarse esta nueva colmena en condiciones normales, o sea entre 60 000 y 80 000 operarias?

Para responder esa pregunta vamos a hacer algunas consideraciones relativas al proceso de nacimiento y muerte de las abejas:

- 10 000 obreras (vida media 40 días)
- Cada huevo tarda 21 días para nacer.
- Postura media de una reina: 2 000 huevos.

Cómo el texto no informa la edad de las obreras que acompañan a la reina vieja, y juzgando que es necesario en la formación de la colmena que haya suficientes en cada fase de vida, vamos a comenzar con la siguiente hipótesis:

Cómo el texto no informa la edad de las obreras que acompañan a la reina vieja, y juzgando que es necesario en la formación de la colmena que haya suficientes en cada fase de vida, vamos a comenzar con la siguiente hipótesis:

<u>Hipótesis</u>: supongamos que las abejas están equidistribuídas.

Esto significa que: $\dfrac{10.000}{40} = 250$ obreras de cada edad

Sabemos que en los primeros 20 días no habrá nacimientos sino sólo muertes. De allí es que podemos representar:

$P(0) = 10\,000$ (momento en que se instalan)
$P(1) = 10\,000 - 250 = 9\,750$ (250 han muerto en el día siguiente)
$P(2) = 10\,000 - 2(250) = 9\,500$ (250 más han muerto el día siguiente)
$P(3) = 10\,000 - 3(250) = 9\,250$ (250 más han muerto el segundo día)
....
$P(20) = 10\,000 - 20(250) = 5\,000$

Para un día *t* cualquiera, se obtienen:

$$P(t) = 10\,000 - 250t, \qquad \text{para} \quad 0 \le t \le 20$$

Dando continuidad al modelo, recordemos que a partir del 20º día comienzan a nacer nuevas abejas. Supongamos que el número de nacimientos es de 2 000 abejas por día. Sin embargo, continuan muriendo diariamente las 250 obreras que estuvieron en el éxodo, hecho que ocurrirá durante los próximos 20 días.

$P(20) = 5\,000$
$P(21) = 5\,000 - 250 + 2\,000$
$P(22) = 5\,000 - 2(250) + 2(2\,000)$
....
$P(t) = 5\,000 - (t-20)250 + (t-20)2\,000$ o bien

$P(t) = 1750t - 30\,000,$ para $20 < t \le 40$

En el cuadragésimo día morirá la última de las obreras del éxodo. Por otro lado, las abejas que nacieron a partir del 21º día, tendrán su muerte (natural) a partir del 61º día. Esto significa que el 41º y el 61º día no habrá muerte, sino sólo nacimientos. Así, podemos escribir:

$P(40) = 40\,000$
$P(41) = 40\,000 + 2\,000$
$P(42) = 40\,000 + 2(2\,000)$
$P(43) = 40\,000 + 3(2\,000)$
....
$P(t) = 40\,000 + (t-40)2\,000$ o

$P(t) = 2\,000t + 40\,000,$ para $40 < t \le 60$

A partir del 61º día comenzarán a morir, cada día, 2 000 abejas que nacieron a partir del 21º día. Esto significa que nacen 2 000 y mueren 2 000, manteniéndose constante la población:

$$P(60) = 80\,000$$
$$P(61) = 80\,000 - 2\,000 + 2\,000 = 80\,000$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P(t) = 80\,000 \qquad \text{para } t > 60$$

Así podemos escribir:

$$P(t) = \begin{cases} -250t + 10\,000 & ; 0 \leq t \leq 20 \\ 1\,750t - 30\,000 & ; 20 < t \leq 40 \\ 2\,000t + 40\,000 & ; 40 < t \leq 60 \\ 80\,000 & ; \quad t > 60 \end{cases}$$

Entonces, bajo estas condiciones, la respuesta a la pregunta propuesta es: **Se necesitarán 60 días para que se forme una nueva colmena.**

La función determinada por la primera hipótesis puede ser considerada un Modelo Matemático independiente de su veracidad.

Para validar, sin embargo, el grupo debe retornar a las fuentes de investigación.

Como el proceso de nacimiento y muerte, sin embargo, no siempre es lineal, el profesor puede proponer que se mejore el modelo planteando otras hipótesis.

3.1.3. Algunas consideraciones sobre Modelaje Matemático en la enseñanza

En los cursos que venimos realizando, hemos observado una tendencia de los participantes a elaborar modelos que se restringen al contenido matemático conocido y que deriva de los modelos que nosotros hemos presentado. O sea, si presentamos modelos que implican geometría, la mayor parte de los trabajos serán hechos con geometría; si usamos ecuaciones, funciones o programación lineal, los modelos quedan restringidos al contenido expuesto.

De esta forma, si queremos mejorar las condiciones propuestas, debemos guiar a los alumnos participantes a la resolución de cuestiones que los lleven a un contenido matemático del cual necesiten obtener mayor conocimiento o profundización regresando, posteriormente, al problema. Esto, de cierta manera, recae en la cuestión: disponibilidad y duración del curso.

Por otro lado, es bueno recordar que la habilidad para construir modelos se obtiene con la experiencia, a medida que nos colocamos en disposición de buscar solución a situaciones reales. Un curso sobre modelaje, apenas nos da una orientación indicando la dirección que debemos proseguir.

La enseñanza de matemáticas con el método de modelaje, bajo nuestro punto de vista, es más gratificante una vez que el alumno aprende lo que le interesa, tornándose así co-responsable de su aprendizaje. El profesor-orientador, a su vez, también se torna "ganador" en el sentido que, a cada tema escogido por sus alumnos, facilita su conocimiento.

Nuestra opinión es que el modelaje, en la forma de la propuesta arriba citada, puede ser plenamente utilizada, si los alumnos ya han participado en experiencias con modelación o en cursos de extensión o de postgraduación. Sin embargo, en cursos regulares donde hay un programa que cubrir - curriculum y una estructura espacial y de organización en los moldes tradicionales (como son la mayoría de las instituciones de enseñanza) - el método de modelaje sufre algunas alteraciones, teniendo principalmente en consideración: el grado de escolaridad de los alumnos; el tiempo disponible que tendrán para realizar el trabajo extra - clase; el programa a ser cumplido; la etapa en que el profesor se encuentra en relación al conocimiento del modelaje y el apoyo por parte de la comunidad escolar para implantar cambios.

El método que utiliza la esencia del modelaje en cursos regulares, con un programa, lo denominamos **Modelación Matemática**.

3.2. Modelación Matemática como método de enseñanza-aprendizaje de matemáticas

La Modelación Matemática puede valer como método de enseñanza y aprendizaje de la matemática en cualquier nivel escolar: de los primeros grados a un curso de postgraduación ¡No hay restricción!

El tema es único para toda la clase y de él se extrae el contenido programático. Puede utilizarse un tema diferente para desarrollar cada tópico matemático del programa o para cada período lectivo (bimestre, semestre). En el caso de utilizarse un único tema durante todo el periodo lectivo, el tema debe ser suficientemente abarcativo para poder desarrollar el programa y, al mismo tiempo, interesante para que no se agote la motivación de los alumnos.

Sugerimos que el método tenga la siguiente secuencia:

a) Justificación del proceso

Cuando el método sea aplicado por primera vez en determinado grupo, es de esencial importancia que el profesor justifique el proceso, no sólo para exponer su interés en el proceso de aprendizaje, sino también para tornar a los alumnos participantes activos y, por lo tanto, corresponsables de la enseñanza - aprendizaje.

Se inicia con un análisis crítico sobre la enseñanza convencional de las matemáticas y se muestra la posibilidad de presentar el contenido matemático a partir de situaciones reales, dándose, así, un sentido práctico.

Para esto el profesor ejemplifica, exponiendo un modelo matemático conocido, dirigiendo su exposición de forma que aclare cuáles son los conceptos y operaciones matemáticas que se tornan necesarios para la comprensión de la situación propuesta. Por encima de todo, es necesario encontrar medios eficaces para motivar a los alumnos de manera que, voluntariamente, opten por un desarrollo activo del aprendizaje.

b) Elección del tema

A medida que los alumnos vayan sugiriendo temas, se hace una lista en la pizarra, para una posterior elección. El profesor también puede aprovechar para intercalar algunos temas (como sugerencia), principalmente aquéllos que ya son conocidos con relación a la amplitud relativa al contenido del curso. La elección del tema por los alumnos hará que se sientan participantes del proceso.

c) Desarrollo del contenido programático.

El proceso es semejante al del curso de modelaje debiendo tener en cuenta, no obstante, el contenido programático que deberá fluir del tema.

El profesor puede optar por hacer una primera cuestión sobre el tema y pedir que indiquen sugerencias a lo que se puede estudiar para entender o proponer que ellos mismos indiquen las cuestiones.

Para facilitar la comprensión vamos a utilizar del modelo de las abejas, presentado en el tópico 3.1.2.

Suponiendo que estamos tratando del 2° año del secundario y que entre los temas sugeridos se eligió las *abejas*.

c.1) El profesor propone que se hagan cuestionamientos sobre el asunto o sugestiones de que se puede estudiar para entender mejor la vida y la importancia de las abejas.

Toca al maestro determinar: nivel que el alumno desconoce, contenido programático a ser desarrollado y cuál cuestión deberá ser resuelta primero.

Cuestiones Planteadas	*Programa Regular*
1. Formación de la colmena: dinámica poblacional	1. Secuencias y series: aritmética y geométrica
2. Polinización: proceso y composición de la miel;	2. Análisis combinatorio
3. Comunicación: el baile de las abejas	3. Probabilidades
4. Panal: geometría del panal	4. Geometría espacial.
5. Comercialización de la miel	
6. Utilización de la miel.	

Si, por ejemplo, el contenido matemático a ser desarrollado es "Secuencias y Series: Aritméticas y Geométricas", la cuestión ideal será la número uno, o sea, estudiar Dinámica Poblacional.

c.2) El profesor puede proponer a los alumnos que hagan una investigación sobre la constitución de una colmena o él mismo presenta una síntesis sobre el tema.

c.3) Los datos recabados en la investigación permitirán plantear distintas cuestiones. Por ejemplo:

- *¿Cómo vivirán las abejas mientras no dispongan de una colmena?*
- *¿Dónde la reina pondrá sus huevos en los primeros días?*
- *¿Qué edad tienen las obreras?*
- *¿Cuanto tiempo este enjambre volador llevará para tener una colmena en condi ciones normales, o sea, entre 60 000 y 80 000 obreras?*

c.4) A partir de las sugestiones, el profesor debe seleccionar la cuestión y la hipótesis más adecuadas al contenido a ser desarrollado.
Por ejemplo:

¿Cuanto tiempo este enjambre volador llevará para tener una colmena en condiciones normales, o sea, entre 60 000 y 80 000 obreras?

1ª Hipótesis: "Las abejas tienen edades equidistribuidas"

$$\frac{10.000}{40} = 250$$

Cómo estas10 000 abejas tienen edades entre 0 a 40 días, la mortalidad media diaria es de:

P (0) = 10 000
P (1) = 10 000 - (250) = 9 750
P (2) = 10 000 - 2 (250) = 9 500
P (3) = 10 000 - 3 (250) = 9 250
....
P (20) = 10 000 - 20 (250) = 5 000

Se define el contenido:

Este conjunto dispuesto en un cierto orden (10 000;9 750; 9 500;...; 5 250; 5 500) se llama secuencia o sucesión.

En el ejemplo, se puede llegar a una fórmula general, o sea, para un día **t** cualquiera, se obtiene:

P (t) = 10 000 - t (250) o
P (t) = -250t + 10 000

Una secuencia real es una función cuyo domínio es N+ y cuyos valores están en $\Re$.

Llamando la población inicial a1, la población de día siguiente a2, ...

a1 = 10 000
a2 = 10 000 - 250 = 9 750

viene: (a1, a2, a3, a4, ...a20)

Una secuencia, generalmente, es dada a través del término general, por la ley que asocia a cada **n** su image **an**. Entonces:

an = 10 000 + (n - 1)(-250)

Haciendo un análisis de la secuencia dada, tenemos que la diferencia entre un término y su sucesor es siempre constante. Este es un ejemplo de una secuencia aritmética o progresión aritmética.

Se llama progresión aritmética (PA) toda sucesión de términos (a1, a2, a3, ...an) tal que la diferencia a2 - a1 = a3 - a2 = an -an-1 = r, sea una constante.

Entonces, substituyendo en la ecuación: 10 000 por a1 y (-250) por r, tendremos:

an = an + (n - 1)r

es el término general de una P.A.

Cabe aqui enfatizar que parte importante del proceso se hace a partir de la hipótesis, y que los propios alumnos proponen las definiciones, aunque informalmente.

La primera hipótesis permite conceptuar Secuencias generales y en particular Secuencias Aritméticas.

d) Ejemplos análogos - fijación de conceptos

Después de desarrollar el contenido matemático necesario y suficiente para responder o resolver esta etapa del trabajo, el profesor debe proponer ejemplos análogos para que el contenido no se restrinja al modelo.

Los ejemplos análogos darán una visión más clara sobre el asunto, supliendo deficiencias, rellenando posibles lagunas en lo referente a la comprensión del contenido. Según

Adler (1968;70] "Nuestro conocimiento no está limitado a las percepciones adquiridas empíricamente. Está organizado y adquiere profundidad a través de los conceptos creados por la mente humana".

e) Evaluación y convalidación de los resultados.

A partir de ahí, el profesor pasa a proponer que analicen el resultado obtenido, con un doble objetivo:

$e._1$) aplicar y ejercitar el contenido propuesto;

$e._2$) comprobar si el trabajo (modelo) está de acuerdo con las condiciones exigidas (convalidación)

¡Éste es un momento adecuado para hacer una evaluación!

Si los alumnos demostraran interés en continuar con el tema propuesto se pasa a una segunda cuestión, siguiendo los pasos definidos anteriormente.

Como el modelo determinado por la primera hipótesis no puede ser evaluado con la realidad, o sea, el proceso de nacimiento y muerte puede no ser lineal, se propone que se planteen otras hipótesis. Por ejemplo:

2ª Hipótesis: "La muerte de las abejas es proporcional a la cantidad que se tiene a cada instante".

Se tiene que la tasa de mortalidad es de 1/40 = 0.025, luego, la tasa de supervivencia será: **1 – 0. 025 = 0. 975**.

$$P(0) = 10\,000$$
$$P(1) = 0.975\,(10\,000) = 0.975\ P(0)$$
$$P(2) = 0.975\ P(1) \quad = (0.975)^2\ P(0)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P(n) = (0.975)^n\ P(0)$$

Se presenta el concepto:

Considerando la secuencia: 10 000; 9 750;......... se nota que el cociente entre un término cualquiera y su antecesor es siempre constante, esto es:

$$\frac{0{,}975x10.000}{10.000} = \frac{0{,}975^2x10.000}{0{,}975x10.000} = \ldots\ldots 0{,}975 \quad \text{razón} = q$$

Progresión Geométrica (P.G.) es toda sucesión de términos ($a_1, a_2, \ldots, a_n$) no nulos tales que los cocientes $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots\ldots \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$ **son constantes**

a6) Después de propuestas las definiciones y ejercicios relativos al contenido ya determinado, se puede concluir el modelo, dejándose primero como tarea y posteriormente discutir los resultados, buscando verificar la validez del mismo con la realidad.

Otro ejemplo:

Supongamos ahora, que estamos tratando de quinto grado y que entre los temas sugeridos, se escogió *construcción civil.*

En este caso el profesor podría iniciar el trabajo con la siguiente pregunta:

¿ Qué es necesario para hacer una casa?

Seguramente, los alumnos contestarán: mano de obra, material de construcción, terreno, diseño, etc.

A partir de las sugerencias, el profesor debe seleccionar la que es más adecuada para desarrollar el contenido matemático programático.

Supongamos que el contenido sea geometría, el trabajo se inicia por el diseño del plano de la casa. Así el profesor propone que los alumnos hagan un esbozo de una planta baja y a partir de este esbozo se pasa a explorar la geometría necesaria.

Con el diseño preliminar, que deberá ser hecho de acuerdo con el conocimiento o deseo de cada uno, sin ninguna interferencia, el profesor puede hacer una evaluación sobre lo que ya se conoce de geometría pasando, posteriormente, a desarrollar lo que aún se desconoce y que es necesario para poder hacer el boceto de la planta correctamente.

Una vez presentado el contenido y ejemplos análogos para fijar los conceptos el profesor solicita a los alumnos que analicen el boceto de la planta baja que hicieron.

Si el maestro pretende enseñar sistema de medida lineal, lo que de cierta forma da continuidad a la geometría, puede continuar con el tema propuesto, por ejemplo con la cuestión:

¿Cómo sabrá el constructor el tamaño de la casa que se quiere construir teniendo como referencia el diseño?

En el ejemplo de construcción civil, el profesor puede orientar a los alumnos para que busquen más información con un profesional del área, en este caso un maestro de obras o un ingeniero, etcétera. Esas informaciones podrán obtenerse, también, a través de una disertación en la escuela. En este caso, la investigación, parte de la tarea, no sólo propiciará una mejor visualización sobre la importancia de las matemáticas estudiadas, sino también el conocimiento y valorización del trabajo de un profesional.

Mantener un clima de cierta libertad, estimulando la participación, la tranquilidad y la creatividad individual permitirá obtener resultados satisfactorios relacionados con el aprendizaje de las matemáticas.

4. CONSIDERACIONES FINALES

La adopción de modelos matemáticos, ya sea como forma de presentación o como proceso de creación, adecuadamente dimensionados en la realidad de las comunicaciones escolares, incorporando nuevas tecnologías, sin dejar de preservar identidades culturales, es un medio por el cual el alumno alcanza mejor desempeño, tornándose un agente de cambio.

Al participar de un trabajo con Modelaje o Modelación donde el contenido no está disociado de la realidad, conectando lo que se ha aprendido con lo que se ha ejecutado, estimulando la creatividad (condiciones esenciales para obtener éxito en la sociedad futura), creemos que los alumnos y el profesor tendrán más entusiasmo con la posibilidad de transformar la escuela, aúnque de forma lenta y gradual, para que ésta ejerza el papel que le corresponde: preparar al individuo para actuar en el medio circundante.

Para eso, el profesor tendrá que ser abierto, dispuesto a conocer y aprender.

Lo que proponemos no es tarea fácil y sabemos de eso por propia experiencia. Un curso, una conferencia o un artículo conteniendo definiciones y/o resultados positivos de trabajos realizados no son suficientes para empezar un trabajo aplicando Modelación y mucho menos Modelaje con todas nuestras clases. Habilidad y seguridad sólo se adquieren con la experiencia. Es una experiencia que debe hacerse de forma gradual, en consonancia con el tiempo disponible que se tiene para planificar.

No importa el tiempo de trabajo que tenemos como profesores, cuando vamos a enseñar algún contenido por primera vez, sentimos menos recelo si lo hacemos por el camino que ya conocemos.

Aquéllos que quieren hacer un trabajo con Modelaje o Modelación, pero no se sienten suficientemente seguros, pueden empezar por un trabajo de pre-Modelación, esto significa:

- presentar cada uno de los contenidos del programa a partir de modelos matemáticos ya conocidos;
- aplicar trabajos o proyectos realizados por compañeros, por corto tiempo, con un único grupo, y de preferencia con aquél que tiene mejor dominio de las matemáticas; y
- como trabajo extra-clase, para los alumnos, se solicita que busquen ejemplos o intenten crear sus propios modelos, siempre a partir de la realidad.

Estamos seguros que el resultado será satisfactorio y servirá como incentivo para la aplicación en otros grupos.

Los resultados positivos nos han llevado a creer y a apostar, cada vez más, en este trabajo que tiene como punto central estimular la creatividad: para que el individuo se desarrolle y enfrente con éxito el tercer milenio.

Bibliografía

ADLER, Irving.(1968): *Mathematics and Mental Growth*. New York: National Council of Teachers of Mathematics.

BASSANEZI, R.C. e BIEMBENGUT,M.S. (1997): "Modelación Matemática: Una antigua forma de investigación-un nuevo método de enseñanza" en: *Números*: Revista de didáctica de las matemáticas, nº 32, 13-25.

BAUM, Robert J. (1973): *Philosofy and Mathematics*. Freem Cooper and Co.

BIEMBENGUT, Maria Salett.(1990). "Modelação matemática como método de ensino aprendizagem de matemática no 1º e 2º.grau", Dissertação de Mestrado, Rio Claro - SP : UNESP.

BIEMBENGUT, Maria Salett. (1997): "Qualidade no Ensino de Matemática da Engenharia: Uma proposta curricular e metodológica", tese de doutorado., Florianópolis-SC: UFSC.

BIEMBENGUT, Maria Salett e Hein Nelson.(1997). "Modelo, Modelacón y Modelaje: métodos de enseñanza-aprendizage de Matemáticas" en *Epsilon*: Revista de la SAEM Thales, nº38.209-221.

BRUNER, Jerome S. (1987). "O Processo de Educacao". 8ª Ed. Sao Paulo. Editora Nacional.

GRANGER, G. G. (1969): *A Razão*. 2ª edição, São Paulo: Difusão Européia do Livro.

GOODSON, Ivor F. (1995): *Currículo: Teoria e História,* tradução de Attilio Brunetta, Petrópolis-RJ: Editora Vozes.