NOTAS
DE
CLASE

Educación Matemática
Vol. 11 No. 2 Agosto 1999
pp. 120-127

Visualización de la recta tangente a una curva

Fecha de recepción: Enero, 1998

José Luis Llorens Fuster
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, España
llorens@mat.upv.es

Resumen. *La utilización de las posibilidades gráficas que brindan los programas de cálculo simbólico y las calculadoras gráficas permite visualizar el concepto de recta tangente a una curva en un punto. De este modo se facilita la comprensión de ese concepto y se resuelven dificultades en su integración con el concepto de derivada de una función en un punto.*

Abstract. *Graphic possibilities in both symbolic calculus software and graphic calculators make it possible to visualize the tangent to a curve in a given point. This practice makes the concept easier to grasp and solves some of the difficulties in integrating tangent concept to derivative concept.*

Introducción

Resulta casi sorprendente que en la mayoría de los textos en los que se introducen los conceptos básicos del Análisis Matemático, se usen términos cuya definición no se ha dado expresamente. En la mayor parte de los casos, esos términos no definidos involucran conceptos geométricos: "Curva", "tangente", "área" e, incluso, "recta" y "punto", son algunos ejemplos. Frecuentemente se justifica la omisión de una definición más o menos rigurosa presuponiendo que los alumnos *deben conocer su significado* o señalando que *son intuitivos*.

Ciertamente, si preguntáramos a los estudiantes de los últimos cursos de enseñanza secundaria o de un primer curso de Cálculo en la Universidad, si saben —si creen saber— el significado de esos términos, la respuesta casi unánime sería afirmativa pero, como se ha puesto de manifiesto en varios estudios (por ejemplo, *Castela, 1993; Llorens, 1996; Vinner, 1982 y 1991*), eso no se corresponde con la realidad. Más bien al contrario, los problemas en la comprensión de esos conceptos se manifiestan de formas diversas pero con una raíz común: *La existencia de imágenes conceptuales contradictorias*. Usando la conocida terminología de *Vinner*, el *concepto imagen* que los estudiantes asocian a esos conceptos está en contradicción con su *concepto-definición* o, al menos, ambos conceptos no se integran adecuadamente. El resultado de ello es la incapacidad para aplicarlos correctamente –especialmente en un contexto geométrico– junto con una interpretación puramente mecánica, algebraica, de las ideas.

Interpretación geométrica de la derivada

Un ejemplo bien conocido a este respecto se refiere, precisamente, a la *interpretación geométrica de la derivada*. El propio *Vinner* ya puso de manifiesto la aparente contradicción que supone que la mayoría de estudiantes de un primer curso de Análisis en la Universidad considere, a la vista de una gráfica como la que aparece en la figura 1,

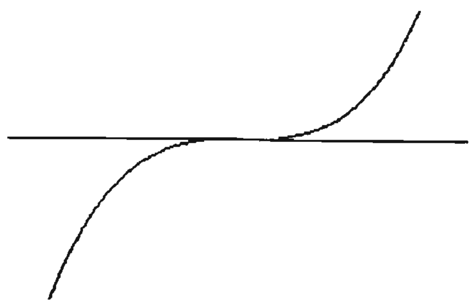

Figura 1

que la recta no puede ser tangente a la curva: La recta "corta" a la curva, afirman, y, por tanto, es *secante*, no tangente. Sin embargo, esos mismos alumnos considerarían una trivialidad que se les pidiese hallar la derivada de $y = x^3$; obtener la derivada de esa función en $x = 0$ y hallar la ecuación de la recta tangente a esa "curva" en $x = 0$. (La ilustración anterior muestra precisamente un aspecto de la gráfica de $y = x^3$ y de su tangente en $x = 0$).

Como se ha demostrado (cfr. *Llorens, 1997*), el origen de esas contradicciones puede resumirse en dos aspectos:

- La mencionada omisión de la definición explícita de recta tangente a una curva en un punto.
- La insistencia desmesurada en los aspectos mecánicos o algebraicos relacionados con el concepto de derivada, reduciéndolo prácticamente todo al cálculo de la función derivada de funciones más o menos complicadas.

En efecto, en la secuencia de contenidos que aparece en casi todos los textos que introducen el concepto de derivada de una función en un punto, se presenta la recta tangente como *la interpretación geométrica de la derivada*, a renglón seguido de su definición formal, omitiéndose una definición explícita de recta tangente a la gráfica de una curva en un punto. Así, la expresión

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

va seguida de alguna ilustración como la de la figura 2.

Poco más o menos, el razonamiento geométrico que se hace es, según dicen, el siguiente: La derivada es la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto porque las **rectas secantes** de la figura (que lo son porque "tocan" a la curva en dos puntos) se convierten en la **recta tangente** cuando, en el límite, x se confunde con a y, por tanto, **la recta ya sólo "toca" a la curva en un punto.**

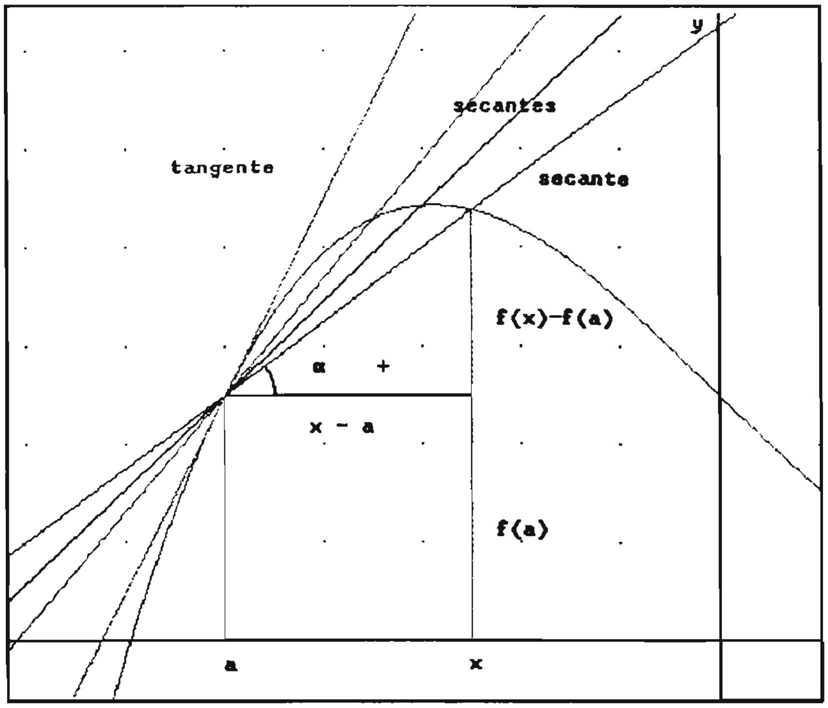

Figura 2

Así pues, de forma implícita, se está "definiendo" la recta tangente como la recta que "toca" a la curva en un punto, evocando en el estudiante la definición **que ya sabía**, válida para la circunferencia, tal como se estudia en la enseñanza primaria. Esa "evocación" es, en algún caso, la única información que el alumno ha recibido desde aquella enseñanza primaria y, por tanto, significa una confirmación mucho más eficaz que un enunciado explícito. Ése es, en definitiva, el *concepto-imagen* que permanece sin que la nueva definición (la de derivada) que se ha introducido más o menos confusamente, sirva para revisarlo.

Definición de recta tangente a una curva

Insistamos en que presentar la recta tangente como el límite de las secantes no cambiaría sustancialmente la situación pues el problema se suscita porque **no se *redefine* lo que es la recta tangente a una curva en uno de sus puntos**. Obervemos que lo definido es la derivada, no la recta tangente. Como la definición de derivada es complicada, pues se basa en la de límite de una función en un punto, para tratar de facilitar su comprensión se recurre a una "intuición geométrica" (recta tangente). Luego, quizá tras resolver algunos ejercicios, se abandonará enseguida esa perspectiva para centrarse en el cálculo de derivadas.

La definición de recta tangente, de cualquier modo que se haga, requiere el concepto de límite. Por tanto, es evidente que no se la puede calificar de "intuitiva". Así pues, si se quiere utilizar el concepto de recta tangente para explicar lo que es la derivada, parece justo definirlo previamente, a lo que habrá que dedicar la atención suficiente dado que el alumno se enfrenta a un concepto difícil (concepto de límite) que, además, ofrece la dificultad añadida de su ámbito geométrico, ámbito que, tal como están diseñados los planes de estudio, suele ser el más hostil y desconocido para los estudiantes.

Pero, además, para asegurar una adecuada integración de la "nueva" definición con la que el alumno conoce para el caso de la circunferencia, sería imprescindible mostrar que aquella vieja definición es un caso particular de la nueva; que sólo en algunas curvas particulares como la circunferencia se produce la *casualidad* de que la existencia de un único punto de contacto entre la recta y la curva asegura la tangencia. Pero, naturalmente, esto plantea un nuevo problema: **La circunferencia no es la gráfica de una función**. Eso significa una nueva objeción al modo habitual de proceder ya que si la revisión del concepto de tangente se hace a partir de la derivada de una **función**, difícilmente se podrá considerar el caso de la circunferencia que es, justamente, uno de los pocos casos (sino el único) en el que el alumno sabía obtener la recta tangente.

Así pues, en toda esta cuestión aparece también la necesidad de precisar lo que se entiende por **curva**, pues no hace falta insistir en que los términos "función" y "curva" no se pueden identificar a pesar de que, en la práctica, eso se haga con demasiada frecuencia, con efectos nada convenientes (ver, por ejemplo, *Vinner y Dreyfus, 1989*). Admitiendo que la definición rigurosa de curva excede las posibilidades de un curso de enseñanza secundaria o, incluso, del primer año en la Universidad (ver, por ejemplo, *Del Castillo*, 1982), habría que aspirar, al menos, a que los estudiantes fuesen capaces de distinguir entre curvas y funciones, viendo estas últimas como una clase de las primeras y, además, a que tuvieran una cierta "cultura visual" al respecto, de modo que, a la vista de las gráficas respectivas, pudieran distinguir entre unas y otras.

Visualización

Lo afirmado en el párrafo anterior nos conduce inmediatamente a la cuestión de la *visualización* que, como es bien sabido, viene adquiriendo en los últimos años un papel primordial como recurso didáctico, potenciado aún más por los recursos que brinda la tecnología actual (calculadoras gráficas, programas de cálculo simbólico). "*Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulta muy provechosa tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de problemas*" (*Guzmán, 1996, p. 16*). De modo particular, la visualización en el Análisis Matemático se ha redescubierto como un instrumento eficacísimo para la mejora en la comprensión de conceptos abstractos e, incluso, como remedio a las situaciones conflictivas derivadas de las duplicidades de imágenes conceptuales como las que hemos considerado anteriormente (cfr. *Zimmerman, 1991*). Sin duda, la visualización se opone al *formalismo* o *rigorismo* (que no a la formalización o al rigor) por cuanto esta corriente, afortunadamente ya en declive, conducía a presentar los conceptos matemáticos de una forma totalmente desgajada del mundo real y, en particular, sin apoyos gráficos que pudieran "contaminar" las ideas.

La misma oposición entre "curva" y "función" que hemos considerado antes podemos interpretarla a la luz de estas consideraciones. En algún momento se ha podido tener la impresión que una definición "seria" como la de derivada no hacía falta relacionarla con nada del mundo físico o geométrico y que la motivación del concepto podía reducirse a la frase "sea $y = f(x)$ una función defininida en un entorno de a"...

Por el contrario, si se acepta una perspectiva más geométrica, tal como sugeríamos antes, inmediatamente hay que utilizar otro lenguaje ya que con expresiones del tipo $y = f(x)$ nos dejamos fuera curvas tan importantes como la circunferencia, las cónicas en general, etc. En ese caso, parece igualmente inevitable la referencia a los aspectos gráficos y geométricos. La posible objeción de que esos aspectos son difíciles de llevar a la práctica cotidiana del aula ahora ha desaparecido gracias a los recursos tecnológicos que antes mencionábamos.

Tangentes y "zoom"

Usaremos, precisamente, esos recursos para proponer una forma alternativa de introducir la recta tangente a una *curva* en uno de sus puntos.

Como es sabido, muchas calculadoras gráficas y programas de cálculo simbólico permiten adquirir fácilmente esa "cultura visual" a la que acabamos de referirnos gracias a la facilidad que brindan para representar gráficamente toda clase de curvas. Así, con un programa relativamente sencillo como DERIVE se pueden obtener rápidamente gráficas de funciones escritas en forma explícita y gráficas de curvas de las que se conoce su ecuación en forma implícita o paramétrica. Este útlimo aspecto, en particular, quizá puede aprovecharse para introducir una definición de curva como una *parametrización*, definición que puede ser asequible en los niveles educativos a los que nos referimos.

Así, la parametrización natural de $y = f(x)$ sería $[x, f(x)]$. De este modo, puede ser relativamente fácil conseguir la familiaridad de los estudiantes de estos niveles con curvas de toda clase, incluyendo, por supuesto, la circunferencia. Precisamente, el programa mencionado admite la representación de curvas escritas en forma paramétrica de la manera indicada.

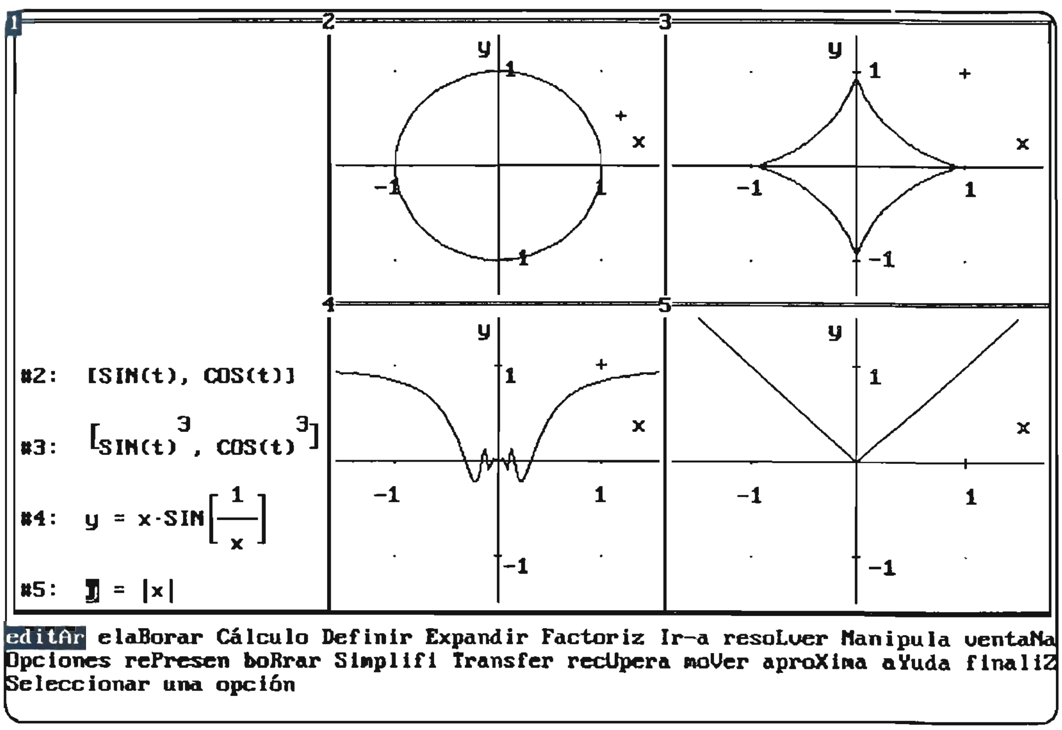

Figura 3. Una pantalla obtenida con DERIVE

Estos mismos recursos suelen llevar incorporado un efecto "zoom", es decir, un cambio de escala, que permite estudiar el comportamiento **local** de la gráfica. Normalmente, sin más que pulsar repetidamente un botón, pueden obtenerse las gráficas con escalas pequeñas o, incluso, muy pequeñas. Una mínima capacidad de observación lleva pronto a la conclusión de que "muchas" curvas parecen convertirse en rectas cuando se actúa con un *zoom* sobre su gráfica de forma suficiente, es decir, cuando se contempla la gráfica con una pequeña escala. En otras ocasiones, la gráfica parece no alterarse: En particular, en los "picos" como el de la gráfica no. 5 de la figura 3; también pueden considerarse curvas en las que el efecto del *zoom* prácticamente deje inalterado el aspecto de la gráfica porque aparezca una especie de "repetición", como en el caso de gráfica nº 4 (ver también la figura 4):

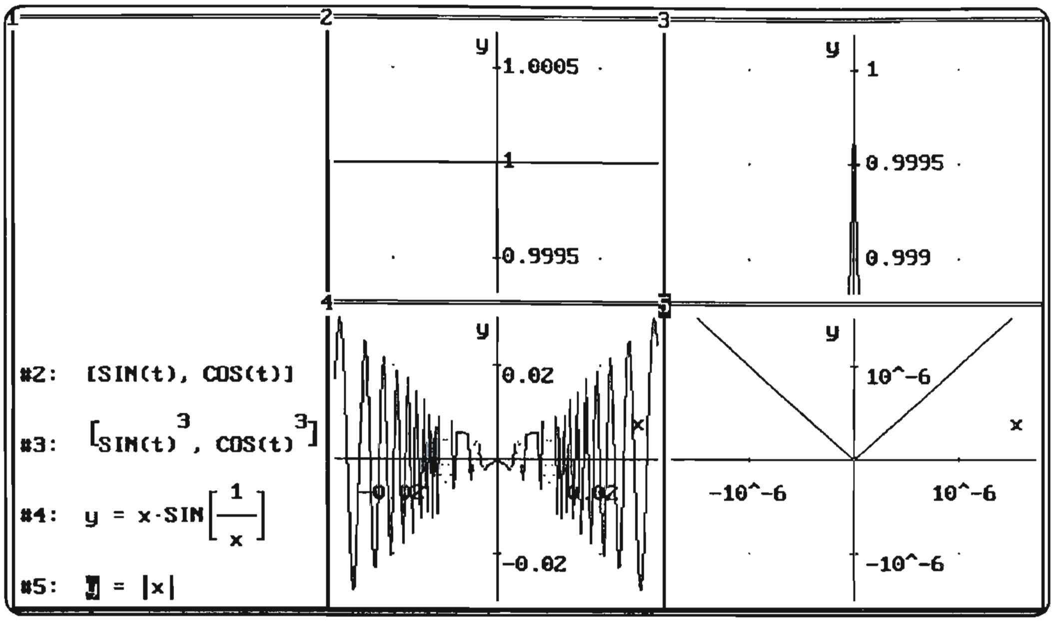

Figura 4. Efecto de un cambio escala.

En fin, la consideración de distintos y variados ejemplos facilita la motivación de la siguiente definición: *Cuando la gráfica de una curva es, localmente, una recta, decimos que la curva tiene* ***tangente*** *en el punto considerado. En tal caso, la recta tangente a una curva en un punto de su gráfica es, por definición, la recta con la que, localmente, coincide.* Por tanto, como ya se ha visto, no todas las curvas tienen tangente, de acuerdo con esa definición. El carácter *local* queda suficientemente resaltado tanto en la definición como por lo visto en los ejemplos: Según en qué punto se considere la ampliación de la gráfica, podemos encontrarnos con un comportamiento "patológico" (un pico que nunca se deshace, una oscilación que no cesa) o con el "normal" de la aparición de la recta tangente. En tono distendido puede aprovecharse esta situación para explicar el convencimiento que se tenía en la antigüedad de que la Tierra era plana. En efecto, la Tierra es *localmente* plana, de modo que tampoco se iba tan desencaminado, además de que, por el efecto del *zoom*, ciertamente es difícil percibir otra cosa.

Como es natural, según el contexto, no hay inconveniente en formalizar más esa definición (aun cuando pueda ser un poco engorroso introducir algún tipo de *medida* para las gráficas). Pero, en todo caso, si que deben destacarse algunos detalles importantes:

- La existencia de tangente depende de la propia curva (y del punto considerado): Se puede identificar con una cierta *lisura* o *suavidad* en el aspecto de la gráfica, que se opone a la existencia de picos u oscilaciones no amortiguadas. No es, por tanto, algo externo, algo que dependa de la mayor o menor pericia del "dibujante" que debe trazarla, sino de la propia curva, de su forma.
- En el caso de que la tangente exista en un punto, se puede hablar de *pendiente de la curva* en ese punto: Sería la pendiente de la recta tangente. La pendiente podría ser "*infinita*", si es que se define de esa forma la pendiente de una recta "vertical". El valor de la pendiente de la curva sería un número que mediría la *rapidez* en el crecimiento (o decrecimiento) **local** de la función.
- Si se representan gráficamente una curva y su tangente en un punto, lo que se percibiría, como consecuencia de la *confusión local* entre ambas, sería la apariencia de que tienen muchos puntos en común.

Este último aspecto debe destacarse suficientemente. Lo característico de la tangencia no sería tener un sólo punto común sino, precisamente, la apariencia contraria. Por tanto, que una recta y una curva tengan un punto común no garantiza, evidentemente, que sean tangentes, salvo en algún caso particular que habrá que tratar con suficiente detalle.

Relación con la derivada de una función

Aunque la obtención de la recta tangente sea importante, sin duda lo es más el aspecto que se deriva de ella relativo a la *pendiente* de la curva. La conexión con el mundo físico es evidente. Disponer de un método práctico para medir esa pendiente parece una necesidad de primer orden que, desde luego, no termina de estar bien resuelta con la "técnica" utilizada, sugerida con esta definición. ¿Qué se hacía antiguamente, cuando no se disponía de estos recursos, con esa facilidad para hacer un *zoom* sobre una gráfica y, a la vez, se quería medir una *velocidad* en un instante determinado?

De ésta o de cualquier otra forma semejante, se puede motivar para la *algebrización* del cálculo de la pendiente de la curva para el caso concreto en que dicha curva sea la gráfica de una función. La derivada sería, de este modo, una solución práctica al problema considerado, aunque con limitaciones (tangente vertical, curvas que no sean gráficas de funciones). En realidad, lo verdaderamente práctico sería la posibilidad de obtener el valor de la derivada de una forma algebraica, rutinaria, puesto que la definición de derivada de una función en un punto es, en este contexto, la "transcripción" formal de la definición de pendiente de una curva que se ha considerado previamente.

En resumen, se está invirtiendo el proceso normal. La derivada no se presenta ahora como algo artificial, algo tan abstracto que requiere una curiosa interpretación geométrica cargada de falsas intuiciones. La derivada es, de este modo, una técnica para obtener con facilidad y en muchos casos (aunque, lamentablemente, no en todos) una solución efectiva al *verdadero* problema, es decir, a la pendiente de una curva en un punto que coincide con el de la recta tangente.

Las reglas de derivación adquieren, de este modo, la importancia que les corresponde y, además, una motivación precisa. Pero no estará de más insistir en el aspecto mecánico y, en cierta medida, accesorio de esas reglas. De hecho, el ordenador o la calculadora suplen **perfectamente** en esos aspectos, de modo que un adiestramiento desmesurado en ejercicios que consistan en obtener la derivada de funciones caprichosamente complicadas tiene un sentido didáctico más que dudoso, tanto por el alejamiento de la realidad que suponen (¿qué representan esas extrañas funciones en las que ponemos tanto empeño para conocer la pendiente?) como por la generalización en el uso de las calculadoras y ordenadores pues, en el mejor de los casos, el estudiante habrá aprendido a hacer, con grandes esfuerzos, lo que la máquina le da en pocos segundos y sin equivocaciones.

Conclusiones

Las sugerencias que hemos resumido permiten usar el ordenador como soporte de la visualización que, en definitiva, es el aspecto metodológico que se reivindica. Pero, como se ha puesto de manifiesto, ni la visualización ni el ordenador ni la calculadora son capaces de suplir en el razonamiento. La definición de recta tangente a una curva en un punto, estrictamente hablando, no es visualizable ya que ningún ordenador puede hacer *infinitas* ampliaciones de la gráfica de la curva. Pero es evidente que el ordenador puede usarse con éxito para facilitar la comprensión de un concepto esencialmente abstracto, para motivarlo adecuadamente. La visualización es, en el contexto de un concepto que involucra un proceso de razonamiento infinito, el primer y fundamental paso para la comprensión adecuada de ese concepto.

Bibliografía

Castela, C.: "*A propos de la tangente, comment l'ancien puet engendrer un nuveau qui le* dépasse". Equipe Didirem. Rouen, 1993.

Del Castillo, F.: "*Análisis Matemático II*". Ed. Alhambra. Madrid, 1982.

Guzmán, M. De: "*El rincón de la pizarra*". Ed. Pirámide, Madrid, 1996.

Llorens, J.L.: "*Aplicaciones de DERIVE al Análisis Matemático-I*". S. Public. de la Universidad Politécnica de Valencia. ISBN 84-7721-237-6. Valencia, 1993.

Llorens, J.L.: "*Aplicación del Modelo de Van Hiele al Concepto de Aproximación Local*". Suma, v. 22, pp. 13-24, 1996.

Llorens, J.L., y Pérez Carreras, P.: "*An Extension of Van Hiele's Model to the study of local approximation*". International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. *Pdte. de public.* 1997.

Vinner, S.: "*Conflicts between definitions and intuitions: The case of the tangent*". Proc. Of PME 6, Antwerp, pp. 24-28, 1982.

Vinner, S.: "*The Role of Definition in the Teaching and Learning of Mathematics*", en "*Advanced Mathematical Thinkink*", cap. 5, pp. 65-81. Kluwer Ac. Pub., 1991.

Vinner, S. Y Dreyfus, T.: "*Images and definitions for the concept of function*". Journal for Research in Math. Educ., v. 20, n4, pp.356-366. 1989.

Zimmerman, W., Cunningham, S. (Eds.): "*Visualization in Teaching and Learning Mathematics*". MAA Notes, n.19, 1991.