Educación Matemática
Vol. 11 No. 2 Agosto 1999
pp. 128-136

Pensamiento axiomático[1]

David Hilbert (Gotinga)

En la vida de las sociedades, la prosperidad de los pueblos depende de la de todos sus vecinos; los Estados, así mismo, tienen un interés vital en que el orden reine no solamente en el interior de cada uno de ellos, sino que exista también en las relaciones mutuas. No es diferente en la vida de las ciencias. Prueba de ello es el vivo interés que los representantes más notables del pensamiento matemático han mostrado siempre por la estructura y las leyes de otras ciencias, distintas de la propia; sobretodo, no han cesado de estudiar las matemáticas (y por el más grande bien de estas últimas) en sus relaciones con los vastos dominios de la física y de la teoría del conocimiento que les es más cercana. Me parece que la naturaleza de estas relaciones y su profunda fecundidad estarán expresadas claramente si designo bajo el nombre de *método axiomático* el método general de investigación que las caracteriza y que en las matemáticas modernas toma una importancia cada vez más grande.

Si agrupamos los hechos de un dominio científico determinado, más o menos extenso, pronto notaremos que estos hechos son susceptibles de ser ordenados. El orden se efectúa constantemente a la manera de un *edificio de conceptos* de tal forma que un concepto, y sólo uno, corresponde a cada uno de los objetos del dominio científico y que, al interior de este último, un estado de hechos es equivalente a una relación lógica entre conceptos. El edificio de los conceptos no es otra cosas que la *teoría* del dominio científico considerado.

Es así que los hechos geométricos se ordenan en una geometría, los hechos aritméticos en una teoría de números, los hechos estáticos, mecánicos, electrodinámicos en teorías de la estática, de la mecánica, de la electrodinámica, y los hechos de la física de los gases se agrupan en una teoría de los gases. Lo mismo en lo que se refiere a los dominios científicos de la termodinámica, de la óptica geométrica, de la teoría de las radiaciones, de la conducción del calor, o del cálculo de probabilidades y de la teoría de conjuntos. El mismo comentario se impone, finalmente, ya sea que se trate de matemáticas puras (teoría de superficies, teoría de ecuaciones de Galois, teoría de números primos) o de ciencias sin relación directa con las matemáticas puras como la teoría monetaria o ciertos capítulos de la psicofísica.

Si ahora consideramos de más cerca una teoría determinada, constatamos invariablemente que el edificio de los conceptos en el dominio científico debe tener como base un número restringido de proposiciones excepcionales que se basten a sí mismas para construir todo el edificio de acuerdo a los principios lógicos.

En geometría, por ejemplo, es suficiente invocar únicamente la proposición que concierne la linealidad de la ecuación del plano y la transformación ortogonal de

[1] *Axiomatisches Denken.* conferencia dictada en la reunión anual de la Sociedad Matemática Suiza, que tuvo lugar en Zurich el 11 de septiembre de 1917. Traducción al francés de A. Reymond, profesor de la Universidad de Neuchâtel. Reproducido en *L'Enseignement Mathématique*, año 20, 1918, pp 122-136.

las coordenadas puntuales para construir enseguida, y únicamente por medio del análisis, una ciencia tan vasta como la geometría euclidiana del espacio. De la misma forma la teoría de números se edifica enteramente de acuerdo con las reglas y las leyes del cálculo que son válidas para los números enteros. Juegan un papel análogo en la estática, el principio del paralelogramo de fuerzas; en la mecánica, las ecuaciones diferenciales de Lagrange sobre el movimiento, y en la electrodinámica, las ecuaciones de Maxwell, a condición de agregar a estas últimas un postulado relativo a la rigidez y a la carga del electrón. Análogamente, la termodinámica puede construirse enteramente sobre el concepto de la función de energía y sobre las definiciones de temperatura y de presión tomadas como variables (entropía y volumen). De la misma forma, encontramos en el centro de la teoría de radiación, la ley de Kirchoff que regula las relaciones entre la emisión y la absorción; en el cálculo de probabilidades, la ley de los errores de Gauss; en la teoría de los gases, el principio de la entropía concebido como el logaritmo negativo de la probabilidad de un estado dado; en la teoría de las superficies, la representación de un elemento curvilíneo por una forma cuadrática diferencial; en la teoría de ecuaciones, el teorema de existencia de las raíces; en la teoría de números primos, el principio relativo a la realidad y a la frecuencia de los ceros en la función riemanniana $\zeta(t)$.

Todos estos principios fundamentales pueden, desde un primer punto de vista, ser pensados como *axiomas de dominios científicos especiales* cuya extensión progresiva termina después de una manera puramente lógica en el interior del edificio conceptual ya elaborado. Este punto de vista se afirma con toda claridad, sobretodo, en las matemáticas puras y, a los trabajos que ahí se inspiran, debemos el desarrollo prodigioso de la geometría, de la aritmética, de la teoría de funciones y de todo el análisis.

Siendo éste, y para los casos de los que hemos hablado, el problema de los fundamentos de un dominio científico especial, aparentemente se ha encontrado una solución; pero ésta sólo puede ser provisoria. De hecho, en cada dominio se sentía la necesidad de fundamentar hasta las proposiciones específicas más elevadas, aunque fuesen consideradas como axiomas fundamentales. De esta manera la gente se esforzaba por probar, ya fuera la linealidad de la ecuación del plano y la ortogonalidad de la transformación que expresa un movimiento, ya fuera las leyes del cálculo aritmético, o el paralelogramo de fuerzas y aún las ecuaciones de movimiento de Lagrange y la ley de Kirchoff sobre emisión y absorción, o bien el principio de la entropía y la proposición relativa a la existencia de las raíces de una ecuación.

Pero el examen crítico de estas "pruebas" hizo que se reconociera que no son tales; en realidad, sólo hacen posible el regreso a ciertas proposiciones más fundamentales todavía que, en sí mismas, aparecen como nuevos axiomas, en el lugar de las leyes por demostrar. De esta manera han nacido los *axiomas,* llamados así a título justo hoy en día, de la geometría, de la aritmética, de la estadística, de la mecánica, de la teoría de radiaciones o de la termodinámica. Estos axiomas forman un estrato subyacente más profundo en oposición al estrato axiomático superficial, caracterizado por los principios fundamentales planteados primeramente y que hemos enunciado para cada dominio científico especial. El procedimiento del método axiomático, tal como lo hemos descrito, viene entonces a plantear más profundamente los cimientos que sostienen cada uno de los dominios científicos especiales, trabajo análogo al que es necesario para reedificar un edificio sin comprometer su seguridad.

Para que una teoría científica representada por un edificio de conceptos responda a sus objetivos, se requiere ante todo de dos exigencias: la primera concierne a la *dependencia* y al mismo tiempo, a la *independencia* de las proposiciones de esta teoría; la segunda, la *ausencia de contradicción* de la que deben participar las proposiciones tomadas en su conjunto.

Ocupémonos de entrada de la dependencia y la independencia de los axiomas.

El ejemplo clásico del que uno echa mano para probar la independencia de un axioma lo proporciona la geometría en el postulado de las paralelas que Euclides, remarquémosle, clasificaba ya como axioma. Por aquel entonces, Euclides hacía a un lado la cuestión de saber si esta proposición no estaba en sí misma condicionada por los otros axiomas. Así, el método de investigación preconizado por Euclides se perpetuó como típico de toda investigación axiomática y, después de este gran sabio, la geometría se volvió el ejemplo modelo de la ciencia axiomática.

La mecánica clásica nos ofrece otro ejemplo de investigación relativo a la independencia de los axiomas. Como hemos hecho notar, las ecuaciones de Lagrange sobre el movimiento podrían ser consideradas provisionalmente como los axiomas de la mecánica, porque son completamente suficientes para fundar las fórmulas generales relativas a fuerzas cualesquiera y cualesquiera condiciones que las acompañen. Pero una investigación más profunda muestra que es inútil para la edificación de la mecánica, postular a la vez fuerzas y condiciones cualesquiera, y que entonces puede disminuirse el sistema de los postulados. Esta constatación conduce, por un lado, al sistema de axiomas postulado por Boltzmann, que sólo supone las fuerzas, especialmente centrales es verdad, pero que no exige ninguna condición adicional. Por otra parte, al sistema de axiomas definido por Hertz, que rechaza las fuerzas para apelar a las condiciones, y más específicamente, a las relaciones rígidas. Estos dos sistemas constituyen así un estrato más profundo en la axiomatización progresiva de la mecánica.

Si consideramos ahora en la teoría de ecuaciones de Galois la existencia de las raíces de una ecuación como un axioma fundamental, éste ya no es más un axioma dependiente; puesto que, en tanto que es una proposición existencial, puede ser derivada de los axiomas de la aritmética como lo demostró por primera vez Gauss.

Sucede lo mismo si en la teoría de números primos consideramos como axiomática la proposición relativa a la realidad de los ceros de la función riemanniana z(t): para ahondar más el estrato de los axiomas puramente aritméticos, sería necesaria la prueba de esta afirmación de realidad, porque esta prueba es la única que garantizaría la certeza de consecuencias importantes que, a partir de su postulación, hemos podido establecer.

Es necesario señalar, con un interés muy particular para un proceso axiomático, la cuestión relativa a la independencia de los principios de un dominio científico en relación al axioma de *continuidad*.

En la teoría de números reales, se muestra, por ejemplo, que el axioma llamado de Arquímedes sobre la medida es independiente de todos los otros axiomas aritméticos. Esta constatación es, como se sabe, de una importancia capital para la geometría; pero también para la física tiene, aparentemente, un interés principal porque nos conduce al resultado siguiente: por una parte podemos, yuxtaponiendo longitudes terrestres, calcular las dimensiones y las distancias de los cuerpos en el espacio, es decir, medir magnitudes celestes a través de una medida terrestre; por otra parte, las medidas métricas permiten expresar las distancias hasta en el interior de los átomos. Estos hechos no son, de ninguna manera, una consecuencia lógica de los principios relativos a la congruencia de triángulos y a la configuración geométrica, sino únicamente el resultado de una investigación empírica. En el mundo físico, la validez del axioma arquimediano tiene entonces, según indican los sentido, la necesidad de tener una comprobación experimental directa casi como la de la proposición relativa a la suma de los ángulos de un triángulo en el sentido conocido.

De manera general, podría formular el axioma de continuidad en física como sigue: "Cuando se asigna de antemano un grado cualquiera de precisión a la validez de una fórmula física, existen pequeños dominios al interior de los cuales las hipótesis hechas para establecer dicha fórmula pueden variar libremente sin que el alejamiento de esta última sobrepase el grado de precisión prescrito". Este axioma sólo expresa, en el fondo, lo que hay de inmediato en la naturaleza de la experiencia; siempre ha sido implícitamente supuesto por los físicos, sin haber sido hasta ahora formulado de una manera particular.

Si, por ejemplo, del axioma relativo a la imposibilidad de un *"perpetuum mobile" de segunda especie* se deriva, de acuerdo con Planck, el segundo principio de la termodinámica, se está usando este axioma de continuidad.

Este último es igualmente indispensable para fundamentar la estática utilizando el axioma del paralelogramo de fuerzas, o al menos eligiendo ciertos otros axiomas que se le acercan. Es lo que Hamel ha mostrado de una manera muy interesante por medio del empleo del principio relativo a la posibilidad de que el continuo sea bien ordenado.

Se puede igualmente desplazar en profundidad los axiomas de la mecánica clásica si, en virtud del axioma de continuidad, uno se representa el movimiento continuo como descompuesto en impulsos de movimientos rectilíneos y uniformes que se suceden uno al otro con rapidez; hace falta entonces utilizar como un axioma mecánico esencial el *principio del trabajo máximo de Bertrand* de acuerdo al cual, después de cada choque, el movimiento que en realidad se produce es siempre aquél por el cual la energía cinética del sistema es un máximo entre todos los movimientos compatibles con el principio de conservación de la energía.

En cuanto a los más recientes intentos de fundamentar la física, y especialmente la electrodinámica, éstos descansan completamente en las teorías del continuo y, en consecuencia, implican en gran medida la idea de continuidad; sin embargo, no los examinaré aquí, porque las investigaciones no tienen todavía el grado suficiente de perfección.

Pasemos ahora al examen del segundo problema que mencionamos arriba, a saber, la cuestión relativa a la *ausencia de contradicción de los axiomas*. Esta cuestión es de primordial importancia, porque la presencia de una contradicción en una teoría comprometería toda su estabilidad.

Ahora bien puede suceder que la noción de no-contradicción interna se concilie muy difícilmente con teorías aceptadas desde hace mucho tiempo y que han establecido sus propias pruebas. Recuerdo, por ejemplo, en la teoría cinética de los gases la dificultad relativa a la reversibilidad periódica.

A menudo también sucede que la no-contradicción interna de una teoría es considerada como algo natural, mientras que en realidad serían necesarios profundos desarrollos matemáticos para probarla.

Para ilustrar este hecho, consideremos el problema siguientes tomado de la teoría de la conducción del calor: la distribución de la temperatura en el interior de un cuerpo homogéneo cuya superficie se mantiene a una temperatura determinada que varía de acuerdo a las regiones. Dado esto, el postulado relativo al mantenimiento del equilibrio de temperaturas no encierra de hecho ninguna contradicción interna. Pero en teoría es necesario probar que el problema bien conocido de los valores límite de la función de potencial siempre es resoluble, porque sólo la solución de este problema mostraría que una distribución de la temperatura que satisface la ecuación de la conducción calorífica es, en principio, posible.

Pero sobretodo en física no basta probar que los principios de una teoría son acordes entre sí; es necesario también demostrar que éstos no contradicen los principios de un dominio científico vecino.

Por ejemplo y como lo he hecho ver recientemente, el axioma de la teoría de la radiación comporta, además de la ley fundamental de Kirchoff sobre la emisión y la absorción, una proposición especial sobre la reflexión y la refracción de los rayos luminosos aislados que puede ser enunciada en estos términos: sean dos rayos de luz natural de la misma energía, que caen cada uno de un lado de la superficie que separa dos medios en direcciones tales que, el primero, después de su pasaje y el segundo, después de su reflexión, siguen la misma dirección. En estas circunstancias, el rayo resultante de la unión es de nuevo un rayo de luz natural de la misma energía. Esta proposición, como uno lo constata de hecho, no sólo no está en contradicción con la óptica; sino que puede ser derivada como una consecuencia de la teoría electromagnética de la luz.

Como se sabe, los resultados de la *teoría cinética de los gases* están en perfecto acuerdo con la *termodinámica*.

De la misma manera, la *inercia electromagnética* y la *gravitación de Einstein* son compatibles con los conceptos correspondientes de la teoría clásica, en tanto que estos últimos son considerados casos límite de los conceptos más generales que están en la base de las nuevas teorías.

Por el contrario, la *teoría moderna de los quanta* y el conocimiento progresivo de la estructura interna de los átomos han construido leyes que contradicen directamente la electrodinámica edificada hasta ahora sobre las ecuaciones de Maxwell. Es por eso que en el momento actual la electrodinámica, como todos lo reconocen, tiene la necesidad imperiosa de una nueva base y de una transformación radical.

Como se ve por todo lo anterior, la refutación de las contradicciones que surgen debe siempre efectuarse mediante un cambio en la elección de los axiomas; la dificultad consiste entonces en descubrir una selección tal que todas las leyes físicas constatadas se deriven lógicamente de los axiomas elegidos.

Es muy diferente cuando las contradicciones surgen al interior de las ciencias teóricas puras. Como ejemplo clásico de tal evento se puede citar la teoría de conjuntos y la *paradoja del conjunto de todos los conjuntos* cuyo origen se sitúa ya en Cantor. Esta paradoja es tan grave que, a causa de ella, algunos matemáticos ilustres, como Kronecker y Poincaré, han rechazado el derecho de existencia de toda la teoría de conjuntos que es, no obstante, una de las ramas más ricas y más vigorosas de las matemáticas.

El método axiomático viene, felizmente, a remediar este precario estado de cosas. Con la puesta al día de los axiomas apropiados, Zermelo, por un lado, restringió la arbitrariedad de las definiciones concernientes a los conjuntos y, por el otro, limitó con precisión los enunciados admisibles, refiriéndolos a los elementos de los conjuntos. De esta manera, logró desarrollar la teoría de conjuntos removiendo las contradicciones verbales pero conservando, a pesar de las restricciones impuestas, la misma extensión y la misma capacidad de aplicación.

En todos los casos revisados hasta aquí, se trata de contradicciones que habían surgido en el curso del desarrollo de una teoría y cuya remoción necesitaba la refundación del sistema de axiomas. Pero no basta evitar las contradicciones que puedan presentarse, si uno no quiere comprometer la reputación de las matemáticas como el modelo de ciencia rigurosa. Por su esencia aún el método axiomático tiene exigencias más extensas; debe, en particular, probar que en cada caso y sobre la base del sistema de axiomas propuesto, las contradicciones son *absolutamente imposibles* en el interior de un dominio científico.

Conforme con esta exigencia, he demostrado en los *Fundamentos de la geometría* la no-contradicción de los axiomas propuestos haciendo ver que toda contradicción que se deriva lógicamente de axiomas geométricos debía necesariamente manifestarse también en la aritmética del conjunto de los números reales.

Para las teorías físicas, de manera no menos evidente basta referir el problema de la *no-contradicción interna* a la no-contradicción de los axiomas aritméticos. Es así que he demostrado la no-contradicción de los axiomas indispensables para la *teoría de radiaciones* construyendo para ella un sistema de axiomas compuesto de elementos analíticamente independientes, lo que supone la no-contradicción del análisis.

Se puede y se debe, llegado el caso, proceder de manera análoga en la edificación de una teoría matemática. Consideremos, por ejemplo, como axiomas la proposición que, en el desarrollo de la teoría de grupos de Galois, se refiere *a la existencia de las raíces* y el principio que, en la teoría de números primos, define la *realidad de los ceros* de función riemanniana $\zeta(t)$; hace falta entonces, en cada uno de estos casos, probar la no-contradicción del sistema de axiomas considerado y, para ello, demostrar por medio del análisis la proposición relativa a la existencia de las raíces, y el principio riemanniano concerniente a la función $\zeta(t)$, porque sólo de esta manera se asegura la conclusión de esta teoría.

Asimismo, el problema de la no-contradicción de un sistema de axiomas para los *números reales* se puede referir a un problema que contempla los números enteros. Es mérito de Weierstrass y de Dedekind el haberlo mostrado en su teoría de los números irracionales.

El axioma de los *números enteros* y las bases de la *teoría de conjuntos* constituyen, sin embargo, casos únicos de excepción. El camino que conduciría a un dominio científico más específico que el suyo parecería inaccesible, porque fuera de la lógica no existe ninguna disciplina a la cual apelar como último recurso.

No obstante, como el deber de establecer la no-contradicción es ineluctable, es necesario, me parece, axiomatizar la lógica y probar que tanto la teoría de números como la de conjuntos son sólo partes de la lógica.

Esta vía fue preparada desde hace tiempo, sobretodo por las profundas investigaciones de Frege; pero fue finalmente abierta con éxito por Russell, lógico profundo y matemático penetrante. En la terminación de la tarea grandiosa que este último ha emprendido para *axiomatizar la lógica* se podría, con todo derecho, ver la coronación de la obra misma de axiomatización.

Este logro, sin embargo, requiere todavía de un trabajo nuevo y múltiple. En efecto, una reflexión más profunda muestra pronto que el problema de la no-contradicción en los conjuntos y en los números enteros no se limita a ellos mismos, sino que se relaciona con un vasto dominio de preguntas difíciles que competen a la teoría del conocimiento aunque tengan un carácter netamente matemático. Para caracterizar brevemente este conjunto de preguntas, me limitaré a una simple enumeración. *Un problema matemático, ¿supone siempre una solución?* Pregunta capital a la que se relaciona subsidiariamente la siguiente: el resultado de una investigación matemática ¿es siempre *controlable*? En el mismo orden de ideas, ¿qué se entiende por *criterio de simplicidad* de las pruebas matemáticas? ¿Cómo definir en la matemática y en la lógica la relación entre *contenido y forma*? Finalmente, ¿en qué consiste la *determinación* de un problema matemático por medio de un número finito de operaciones?

La axiomatización de la lógica sólo podrá satisfacernos enteramente cuando todas las preguntas de esta naturaleza sean resueltas y su relación aclarada.

La última, sobretodo, que se refiere a la determinación por medio de un número finito de operaciones es la más conocida y la que más frecuentemente se discute porque está dirigida al punto más elevado del pensamiento matemático.

Quisiera aumentar el interés que uno le atribuye refiriéndome a algunos problemas matemáticos especiales en los que tiene ciertamente un papel.

Como se sabe, la teoría de *invariantes algebraicos* contiene un teorema fundamental de acuerdo al cual existe siempre un número finito de invariantes racionales, gracias a los cuales todos los otros invariantes semejantes pueden ser representados de una manera completamente racional. La primera demostración general de este hecho ha sido dada por mí; y satisface plenamente, me parece, nuestra necesidad de simplicidad y claridad; es imposible, sin embargo, transformarla de manera que sea posible, a través de ella, asignar límites al número, que, no obstante, es finito, de invariantes que componen todo el sistema o establecer realmente estos últimos. Se han necesitado reflexiones y principios novedosos para constatar que la determinación del sistema total de invariantes exige únicamente operaciones cuyo número es finito y se encuentra confinado entre límites que pueden ser asignados con antelación.

La *teoría de superficies* nos ofrece otro ejemplo de este hecho. En efecto, la geometría de superficies de cuarto orden plantea una pregunta fundamental, a saber: ¿de cuántas hojas a lo más, separadas entre sí, puede estar compuesta una superficie de esta especie?

Para responder a esta pregunta la primera tarea que se impone es probar que el número de estas hojas debe ser finito. Parece fácil dar la prueba haciendo entrar en acción la teoría de funciones como sigue. Se supone la existencia de una infinidad de hojas y se elige un punto y uno solo en el interior de cada porción del espacio acotado por una hoja. Pero el lugar donde se condensan estos puntos que, por su elección son una infinidad, sería un punto de una singularidad tal que haría falta sustituirlo por una superficie algebraica.

La vía indicada por la teoría de funciones no permite entonces, de ninguna manera, asignar una cota superior al número de hojas de la superficie. Es por eso que es mejor recurrir a consideraciones basadas en el número de puntos de intersección; estos últimos nos enseñan finalmente que el número de regiones buscadas no puede ser superior a 12.

Aunque este segundo método sea tan diferente del primero, no podemos, sin embargo, ni reducirlo ni transformarlo al punto de decidir si existe realmente una superficie del 4o. orden con 12 hojas.

Pero, puesto que una forma cuártica de 4o orden posee 35 coeficientes homogéneos, podemos representar intuitivamente una superficie determinada de 4o orden por un punto situado en un espacio de 34 dimensiones. El discriminante de la forma cuártica de 4o orden es, por los coeficientes que posee, de grado 108; igualado a cero, representa en el espacio de 34 dimensiones una superficie del 108o orden. Como, por otra parte, los coeficientes del discriminante son números enteros determinados, el carácter topológico de la superficie del discriminante se deja fijar con precisión de acuerdo a las leyes que nos son familiares en el espacio de dos o tres dimensiones. De esta manera podemos informarnos exactamente de la naturaleza y significación de las regiones particulares que la superficie del discriminante define en el espacio de 34 dimensiones. Representadas ahora por los puntos de cada región así definida, las superficies de 4o orden, con toda seguridad, poseen todas el mismo número de hojas. Dado esto, es posible por medio de una enumeración finita, aunque fatigante y de largo aliento, confirmar si existe o no una superficie de 4o orden con un número de hojas ≤ 12.

Las consideraciones geométricas que acabamos de desarrollar constituyen la tercera vía para responder a la pregunta planteada. Estas consideraciones permiten hacerlo en un número finito de operaciones. En principio, entonces, nuestro problema se ha agotado por mucho: ha quedado referido a un problema de orden casi análogo a la tarea de descubrir la cifra de rango $(10^{10})^{10}$ que se obtiene desarrollando π en forma de fracción decimal. Este problema, decididamente, puede ser resuelto aunque la solución permanezca desconocida.

A fin de cuentas, vale más utilizar las investigaciones profundas y difíciles que Rohn ha realizado por medio del álgebra y la geometría. Estos estudios[2], en efecto, nos hacen ver que una superficie de 4o orden no puede contener 11 hojas: en realidad sólo pueden existir 10. Este cuarto método es entonces el único que aporta una solución completa al problema planteado.

Estos desarrollos especiales indican cómo se pueden aplicar al mismo problema métodos diversos de demostración, y permiten estudiar más de cerca, como hace falta, la naturaleza en sí de la demostración matemática, si se quieren aclarar preguntas análogas a la de la determinación de un problema por el número muy grande, pero finito, de operaciones.

Todos los problemas esenciales que acabo de caracterizar, entre los que el relativo al número de las operaciones sólo es el último tratado y mencionado, me parece un campo importante cuyo descubrimiento es muy reciente. Para conquistar este campo debemos, ésta es mi convicción, considerarlo como el objeto de una investigación, independientemente del concepto de la demostración específicamente matemática; exactamente como el astrónomo debe tomar en consideración el movimiento de la estación en donde se encuentra, y el físico, la teoría de los aparatos que emplea, o aún el filósofo, que está obligado a criticar la razón en sí.

La realización de este programa constituye una tarea que, por el momento, está lejos de concluirse.

Para terminar, quisiera resumir en algunas palabras mi concepción general sobre la naturaleza del método axiomático.

Según yo, todo lo que puede ser objeto de pensamiento científico es decididamente partidario, tan pronto como la forma está madura para una teoría, del método axiomático y, por esa vía, indirectamente de las matemáticas. A medida que penetramos en los estratos siempre más profundos de los axiomas en el sentido indicado ante-

[2] Una exposición resumida fue hecha por F. Klein en sus "Conferencias sobre las matemáticas" Paris, Hermann, p. 29 (N. T. A.).

riormente, más nos apropiamos de la naturaleza del pensamiento científico, desde puntos de vista siempre más profundos; más, también, nos hacemos conscientes de la unidad de nuestro saber. En el edificio de las ciencias, concebido por medio del método axiomático, las matemáticas parecen estar llamadas a tener un papel directriz.

Traducción: Guillermina Waldegg