SECCIÓN DE PROBLEMAS

*Educación Matemática*
*Vol. 11 No. 2 Agosto 1999*
*pp. 137-142*

# Problemas Propuestos

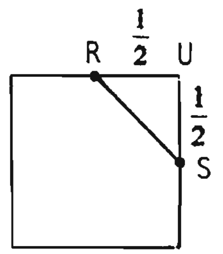
**Nota del Comité Editorial:** A partir de este número, la sección de problemas estará a cargo de Marcela González Pelaez, Iñaqui de Olaizola Arizmendi y Javier Alfaro Pastor, quienes participan en la organización de los certámenes de la olimpiada matemática.

En los números subsiguientes se dará la solución a los problemas del número anterior indicando sugerencias, soluciones y estrategias. El comité editorial agradece la contribución de Santiago Valiente que hasta este número se hizo cargo de esta sección y da la bienvenida a los nuevos colaboradores.

## RESPUESTA A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS EN EL NÚMERO 1 DEL VOLUMEN 11

### Nivel elemental.

Para todos los casos, pensemos que la arista de cada cubo mide 1.

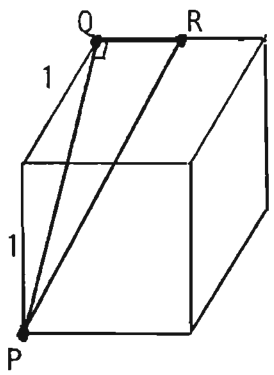



— En el primer cubo, los 3 puntos determinan una porción de plano en forma de triángulo equilátero, ya que cada lado del triángulo es diagonal de cuadrados congruentes.

Así que $\angle A = 60°$.

— En el segundo cubo, los 6 puntos determinan una porción de plano en forma de exágono regular, ya que sus lados resultan de unir, dos a dos y en forma continua, los puntos medios de seis aristas.

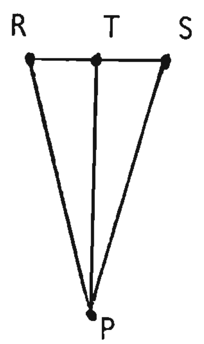
Así que $\angle B = 120°$.




En los cubos tercero y cuarto se forman, respectivamente, un triángulo isósceles y un trapecio isósceles. El cálculo de la medida de los ángulos $C$ y $D$ ya no corresponde al nivel elemental. Sin embargo, veamos cómo puede hacerse.

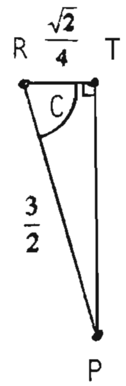
Para el tercer cubo, los 3 puntos determinan una porción de plano en forma de triángulo isósceles. Para él, calculemos:

a) La medida del lado base $RS$.
b) La medida del lado $PR$ que es hipotenusa en el triángulo rectángulo $PQR$.
c) Conocidos $PR$ y la mitad de $RS$, para el triángulo rectángulo $PTR$ calculemos la medida del ángulo $C$ por la función coseno.




Cálculo de $RS$:
En triángulo RUS rectángulo: $RU = US = \frac{1}{2}$
Por el teorema de Pitágoras:

$$RS = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$




Cálculo de PR:
En triángulo PQR rectángulo: QR = $\frac{1}{2}$

$$PQ = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

Por el teorema de Pitágoras:
También por el teorema de Pitágoras:

$$PR = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

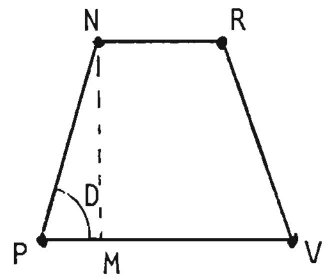
Cálculo de $\angle$C:

En triángulo $PTR$ rectángulo: $RT = \frac{1}{2}\,RS = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$

y $PR = \frac{3}{2}$

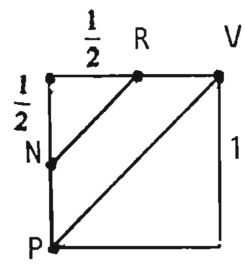
Entonces, $\cos C = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{12} = \dfrac{\sqrt{2}}{6} = 0.2357022$

$\therefore \angle C = 76^\circ\ 22'$




— Para el cuarto cubo, los 4 puntos determinan una porción de plano en forma de triángulo isósceles. Para él calculemos PM y PN, cateto e hipotenusa, respectivamente, del triángulo PMN rectángulo y calculemos $\angle$D por la función tangente.

Cálculo de NR:

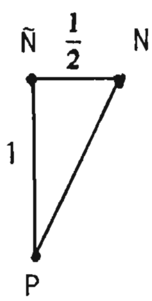



$\frac{\sqrt{2}}{2}$ Como ya calculamos RS en el tercer cubo,

$RS = NR =$

Cálculo de PV:
Como ya calculamos PQ en el tercer cubo,

$PQ = PV = \sqrt{2}$




Como se ve $NR = \frac{1}{2}PV.$

Cálculo de $PM$:

$$PM = \frac{1}{4}\,NR = \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

Cálculo de PN:
Por el teorema de Pitágoras, en triángulo
PÑN rectángulo:

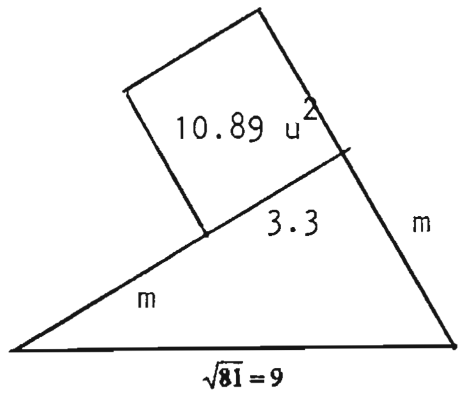
$$PN = \sqrt{(1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Cálculo de $\angle$D:
En triángulo PMN rectángulo:

$$\cos D = \frac{PM}{PN} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{8}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{8\sqrt{5}} = \frac{1}{4}\,(0.6324555) = 0.1581138$$

$\therefore \angle D = 80^\circ\ 54'$.

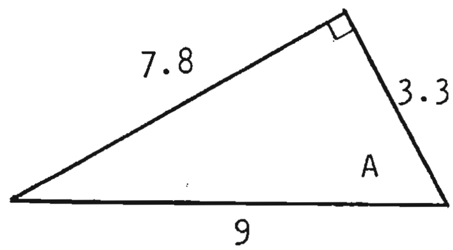
**Nivel medio.**




Primera estrategia.

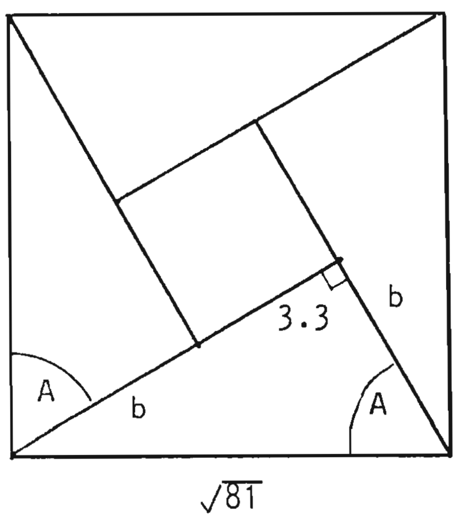
$$A^2 = 81\ u^2 \rightarrow l = 9\ u$$

Por teorema de Pitágoras:
$9^2 = m^2 + (3.3 + m)^2$
$81 = m^2 + 10.89 + 6.6m + m^2$
Simplificada esta igualdad, lleva a la ecuación $2m^2 + 6.6m - 70.11 = 0$.
Para esta ecuación, m = 4.5, así que $m + 3.3 = 7.8$




$$\therefore \angle A = \text{ang tan } \frac{7.8}{3.3} \approx 67^\circ\ 3'.$$

Segunda estrategia.




(Propuesta por el estudiante de la Facultad de Ingeniería de la UNAM Luis Alán Valiente Montaño)

Área mayor = 81 $u^2$
Área menor = 10.89 $u^2$
$a^2 + b^2 = (\sqrt{81})^2$
$a^2 + b^2 = 81$
$(b + 3.3)^2 + b^2 = 81$
$b^2\ 6.6b + 10.89 + b^2 = 81$
$2b^2 + 6.6b - 70.11 = 0$,

que es la misma ecuación que apareció en la primera estrategia.

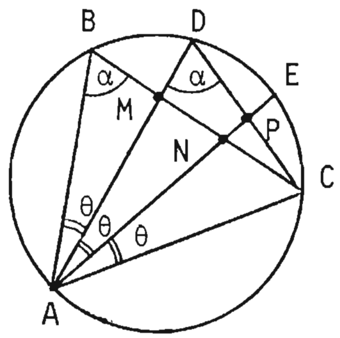
## Nivel superior

Como, por hipótesis, $\angle BAD = \angle EAC$
y, por otra parte, $\angle BAE = \angle BAD + \angle DAE$,
y $\angle DAC = \angle DAE + \angle EAC$ se tiene que
$\angle BAE = \angle DAC$. Además, $\angle ABC = \angle ADC$, ya que subtienden el mismo arco. Por lo tanto,
el $\Delta ABN$ es semejante al $\Delta ADC$, de donde,

$$\frac{BN}{AB} = \frac{CD}{AD} \qquad \ldots(1)$$

También se tiene que $\Delta ABM \approx \Delta ADP$, pues tienen dos ángulos iguales, así que:

$$\frac{BM}{AB} = \frac{PD}{AD} = \frac{CD - CP}{AD} \qquad \ldots(2)$$




Dividiendo (2) entre (1) queda:

$$\frac{BM}{BN} = \frac{CD - CP}{CD} = 1 - \frac{CP}{CD}$$

Por lo tanto, $\dfrac{BM}{BN} = \dfrac{CP}{CD} = 1.$

## PROBLEMAS PROPUESTOS PARA LA V OLIMPIADA DE MAYO

### *Primer Nivel*

Este examen se puso el 8 de mayo de 1999 en varios países de Iberoamérica (España, Argentina, Chile, Perú, Brasil, Bolivia, Uruguay, Cuba, Paraguay, Venezuela, Colombia y México entre otros). Los participantes en este nivel son jóvenes menores de 13 años.

### *Problema 1*

Se eligen dos números enteros entre 1 y 100 inclusive tales que su diferencia es 7 y su producto es múltiplo de 5. ¿De cuántas maneras se puede hacer esta elección?

### *Problema 2*

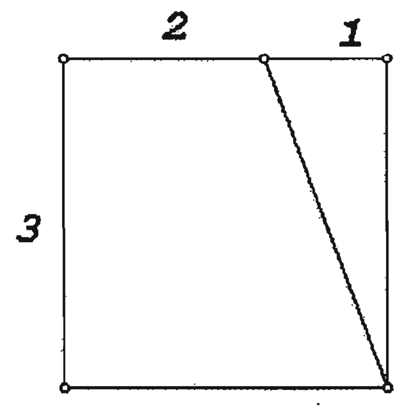
En un paralelogramo ABCD, BD es la diagonal mayor. Al hacer coincidir B con D mediante un doblez se forma un pentágono regular. Calcular las medidas de los ángulos que forman la diagonal BD con cada uno de los lados del paralelogramo.

### *Problema 3*

En cada escalón de una escalera de 10 peldaños hay una rana. Cada una de ellas puede, de un salto colocarse en otro escalón, pero cuando lo hace, al mismo tiempo, otra rana saltará la misma cantidad de escalones en sentido opuesto: una sube y otra baja. ¿Conseguirán las ranas colocarse todas juntas en un mismo escalón?

### *Problema 4*

Diez cartones cuadrados de 3 centímetros de lado se cortan por una línea, como indica la figura.




Luego de los cortes se tienen 20 piezas: 10 triángulos y 10 trapecios. Armar un cuadrado que utilice las 20 piezas sin superposiciones ni huecos.

*Problema 5*

Ana, Beatriz, Carlos, Diego y Emilia juegan un torneo de ajedrez. Cada jugador se enfrenta una sola vez con cada uno de los otros cuatro. Cada jugador se anota 2 puntos si gana el partido, 1 punto si empata y 0 puntos si pierde. Al final del torneo, resulta que las puntuaciones de los 5 jugadores son todas distintas. Hallar el máximo número de empates que pudo haber en el torneo y justificar por qué no pudo haber un número mayor de empates.