El ordenador en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas: una propuesta

Fecha de recepción: Marzo, 1998

NOTAS DE CLASE

Educación Matemática
Vol. 11 No. 2 Agosto 1999
pp. 95-103

José María Gavilán Izquierdo y Ricardo Barroso Campos
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Sevilla, Sevilla, España
gavilan@cica.es, rbarroso@cica.es

Resumen. *Los autores consideramos fundamental el incorporar las herramientas informáticas al proceso de formación de profesores de Matemáticas. Hacemos una reflexión sobre cómo utilizarlas, y acerca del lugar que deben de ocupar. Este enfoque teórico lo concretamos en dos ejemplos del uso que podemos hacer de estas herramientas dentro de la ense anza/aprendizaje de las Matemáticas.*

Abstract. *The authors we consider fundamental to incorporate it the data processing tools into process of teachers training of Mathematics. We make a reflection on how to use them, and about of the place that they should of occupying. This theoretical approach we fulfill it in two examples of the use that be able to do of these tools within the teaching and learning of the Mathematics.*

Introducción

Los autores de este artículo queremos manifestar la importancia de introducir en los programas de formación de profesores (en Matemáticas y en Didáctica de las Matemáticas) la utilización del ordenador. No sólo consideramos necesario introducirlo como un material didáctico, sino que consideramos que para una verdadera integración es necesario utilizarlo para "hacer" matemáticas y para dar significado a las reglas y hechos matemáticos. Los profesores no sólo deben conocer la materia (en este caso las matemáticas), también deben conocer cómo enseñarla, aspecto que incluye el conocimiento sobre cómo trasladar las nociones matemáticas a formas comprensibles para los alumnos (Conocimiento Didáctico del Contenido, Marcelo 1995; Blanco 1996), siendo los Sistemas de Cálculo Simbólico (SCS en adelante) y los programas de simulación geométrica un buen vehículo para ello. Son coadyuvantes en la labor del profesor de matemáticas, tanto en el trabajo de planificación como en actuación en el aula.

Podemos introducir en esta situación de formación lo que denominaremos contexto pedagógico que podemos describir como sigue "los estudiantes para profesor no sólo deben saber utilizar los conceptos matemáticos en situaciones de la vida cotidiana (contextos significativos para sus alumnos), sino que los propios conceptos matemáticos forman parte de su vida cotidiana (contexto significativo para el profesor). En este contexto tiene sentido el estudio *per se* de los conceptos matemáticos.

Utilizaremos dos ejemplos para mostrar las ideas que presentamos en este artículo. El software que utilizamos es un SCC como Derive y un programa de simulación para geometría, Cabri II. El primero de ellos es una herramienta para las matemáticas cuya finalidad no es educativa que integra elementos de tres tipos:

- Elementos de cálculo: numérico, matricial, y funcional.
- Elementos de representación gráfica: tanto en dos como en tres dimensiones; el propio sistema detecta el tipo de gráfico a utilizar.
- Elementos de programación, siendo poco versátil y limitado a aspectos funcionales fundamentalmente.

El segundo de ellos es un programa expresamente diseñado para el aprendizaje de la Geometría. Permite realizar "construcciones" geométricas que van más allá de los meros dibujos realizados con lápiz y papel. En las construcciones se conservan invariantes las propiedades al manipular los objetos que aparecen en las mismas. Intentamos sacar el máximo rendimiento de cada uno de ellos en los aspectos que pueden beneficiar el aprendizaje matemático dentro del contexto pedagógico, sin insistir en las posibilidades de tipo procedimental que presentan los SCS:

suministrar ejemplos,

dar significado a conceptos definidos simbólicamente,

generar y aceptar/rechazar conjeturas (respondiendo a preguntas del tipo "¿qué ocurre si...");

producen un rápido feedback en la interacción alumno-medio-contenido,

manejar simultaneamente distintas representaciones, y

establecer conexiones.

Esta combinación de software no es extraña en proyectos para utilizar el ordenador en la enseñanza de las matemáticas (Artigue y Lagrange, 1997; Schumann, 1997 y Bowers, 1997).

Un primer paso: Bases teóricas

Todos los ligados de alguna forma a la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas (profesores, investigadores, en definitiva educadores matemáticos) somos conscientes de las dificultades que encierra. Pueden alegarse muchas causas, pero en una estamos casi todos de acuerdo, la naturaleza de algunos conceptos matemáticos, su grado de abstracción, y los procesos inherentes a la formación/construcción de los mismos; por ejemplo, el concepto de función, con sus diferentes representaciones (verbal, gráfica, algebraica o tabla de valores), los conceptos asociados (idea de variable, covariación, dominio...), su doble vertiente proceso-objeto (Dubinsky, 1991) u operacional-estructural (Sfard, 1991).

Si tenemos en cuenta que los conceptos matemáticos se forman a partir de la experiencia con ejemplos y contra ejemplos del mismo y que de esta manera los estudiantes forman la imagen del concepto (concept image), que abarca la estructura cognitiva completa que está asociada con el concepto, que incluye todas las representaciones mentales y propiedades y procesos asociados (Tall, 1992). El concepto imagen es el que es evocado para resolver problemas (Tall y Vinner, 1981). Dentro del programa de formación de profesores (y en todo ámbito de la enseñanza de las Matemáticas) debemos ayudar a construir una amplia imagen del concepto y a este fin contribuyen las herramientas informáticas suministrando ejemplos y contra ejemplos no prototípicos, elementos básicos para la intrucción de las matemáticas. La selección de ejemplos es un arte en la enseñanza de las matemáticas (Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990).

Skemp (1971) señaló que los conceptos matemáticos no son conceptos primarios en el sentido de que provengan directamente del entorno, sino que son conceptos de orden superior, es decir los propios ejemplos del concepto ya son difíciles de comprender. Es necesario por lo tanto utilizar varios ejemplos y contra ejemplos para abstraer de los mismos los elementos comunes. Podemos denominar abstracción de la invarianza a este proceso. Es un proceso clave para la formación de las nociones matemáticas.

Ahora bien si los conceptos y nociones matemáticas necesitan ejemplos para su comprensión ¿cómo suministrar los mismos a los estudiantes?. Una primera respuesta puede venir a través de los materiales, que en sentido amplio incluyen los programas de software; además estos materiales deben formar parte de los contenidos de formación de profesores (Fennema y Franke, 1992).

Pensamos que la utilización de SCS, tales como Derive, Maple, Mathematica, nos permiten que la instrucción se centre en la comprensión de los conceptos y procedimientos, dejendo en un segundo plano el aspecto instrumental/procedimental de los algoritmos. Parte fundamental de este cambio es el papel desempeñado por las diferentes representaciones de los conceptos. Con los SCS pueden utilizarse representaciones distintas de la algebraica, tales como las representaciones gráficas, pudiendose establecer conexiones entre ellas no imaginadas hace una década. Los SCS nos permiten utilizar representaciones gráficas que con los métodos algebraicos eran inalcanzables (por tiempo, dificultades...).

Dugdale (1993) considera que la más espectacular y extensa influencia sobre el trabajo de los alumnos con funciones y gráficas ha sido la reciente proliferación de programas de ordenador con herramientas gráficas, tales herramientas han facilitado el moverse desde centrarse en el cálculo y representación de valores concretos a centrarse en la gráfica de la función. El diseño de tareas debe buscar la complementaridad entre los distintos modos de representación, huyendo de la compartimentación de las distintas representaciones.

No sólo los SCS están permitiendo esta atención a la comprensión y al establecimiento de conexiones y traslaciones entre distintos sistemas de representación, programas de simulación geométrica, tales como Cabri-Géomètre II, juegan un papel muy importante en el terreno de los conceptos geométricos y en la posibilidad de establecer conexiones entre la geometría y el álgebra. Estos programas se basan el dinamismo de las figuras y en la conservación de las propiedades y relaciones.

En este sentido Schwartz (1994) considera que la geometría puede ser enseñada y aprendida en entornos informáticos. Pone como ejemplo el caso de las tres medianas de cualquier triángulo que se cortan en un punto. La dificultad que nos encontramos es que no es posible dibujar cualquier triángulo, sino un triángulo concreto. El software geométrico puede solventar este problema, ya que permite desplazar cualquier vértice del triángulo y conservar las relaciones. El programa permite de este modo dibujar "cualquier" triángulo.

Subyace el principio de variabiliad matemática: los conceptos matemáticos que encierren más de una variable deben ser estudiados mediante experiencias que supongan el manejo del mayor número de variables (Dienes, 1970).

La utilización de forma regular del ordenador en las clases de matemáticas trae consigo un cambio en las tareas a realizar por los alumnos en todos los niveles, incorporar el ordenador para plantearse cuestiones distintas y las cuestiones tradicionales se pueden contemplar desde otro punto de vista. La inclusión de nuevas tecnologías conlleva un cambio en el currículum. Un intento de reformulación puede encontrarse en Addenda Series (NCTM; 1995): Algebra in a technological world, donde se plantea organizar el álgebra escolar entorno al concepto de función, familias de funciones y modelización matemática.

Con un SCS los alumnos pueden explorar la gráfica de una función como si dispusiesen de un microscopio para examinar las propiedades locales; pero también pueden estudiar el comportamiento global como si del gran angular de una cámara fotográfica se tratase. Pueden con un software como Cabri, plantearse situaciones geométricas y formular conjeturas impensables sin él. Además puede ayudar a los alumnos a compensar las dificultades que encuentren en el aspecto procedimental, permitiéndoles continuar el aprendizaje (Artigue, 1997).

En nuestra opinión, Dubinsky (1996) plantea uno de los más importantes motivos para usar el ordenador en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: dar existencia a los conceptos matemáticos y a sus representaciones de forma que sean manejables y útiles. El ejemplo propuesto para Derive, muestra cómo considerar una función como un objeto susceptible para ser manipulado.

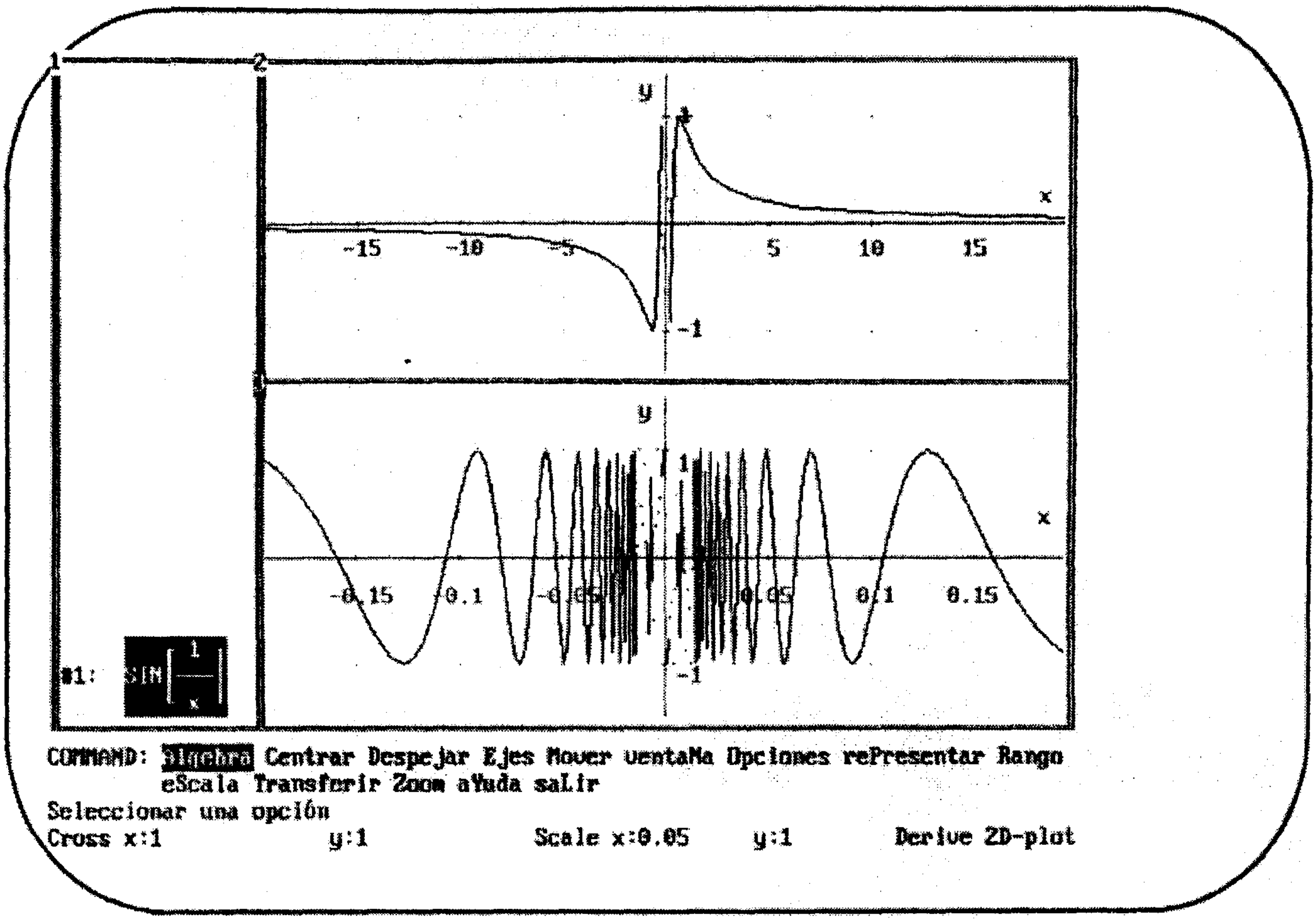
A pesar del entusiasmo que podemos reflejar al escribir este artículo y al hacer innovaciones curriculares en el programa de formación de profesores, somos conscientes de que usar el ordenador en el aula de matemáticas puede causar algunos problemas y desajustes entre lo que pretendemos y lo que ocurre.

Un primer problema es que los alumnos se centren más en el instrumento (ordenador y software) que en el propio contenido. Este problema puede aparecer siempre que se presenta algún tipo de innovación para la relación con el contenido matemático. Otro problema que se puede plantear son las propias limitaciones del software en relación al contenido matemático. En este sentido es el propio contenido matemático el que puede paliar las deficiencias de los programas así como el perfeccionamiento de los mismos. La investigación y el debate dentro de la comunidad científica planteará soluciones a estos y otros problemas que se plantean. El esfuerzo que requiere pensamos que merece la pena.Ya que es preciso que se planteen estas cuestiones y dar pasos hacia adelante. Sólo a través del planteamiento de problemas y la búsqueda de soluciones es posible la construcción del conocimiento.

Segundo paso: Ejemplos concretos

En este apartado vamos a considerar dos ejemplos de cómo puede emplearse para la comprensión matemática el software al que nos hemos referido anteriormente. Los dos programas han sido utilizados en cursos de matemáticas a nivel universitario con estudiantes para profesor de Educación Primaria, en cursos de formación inicial y permanente de profesores de Enseñanza Secundaria, y tienen plena cabida en la Enseñanza Secundaria.

Ejemplo 1. Estudio gráfico de la conducta de una función (no definida en 0 y con una discontinuidad no evitable), conducta local en un entorno de cero y conducta en el infinito (comportamiento asintótico, se le da significado gráfico a la noción de rama infinita, que en lenguaje algebraico viene determinada por un límite). Esta tarea es impensable sin utilizar un SCS.



Para esta tarea hemos utilizado tres ventanas, la primera algebraica para introducir la función sen(1/x) y las otras dos gráficas de tipo 2D. Para poder hacer este análisis hemos utilizado diferentes escalas en las ventanas según el objetivo perseguido.

Para definir las ventanas 2 y 3, hemos utilizado el siguiente árbol de comandos: *ventaNa*, *Seccionar*, *Verticalmente*, en la columna *18.* De esta forma obtenemos una ventana algebraica, que pasamos a ella con *ventaNa*, *siguieNte* que definimos gráfica de 2D con *ventaNa*, *Definir*, *2D-plot.* Dentro de la ventana 2, seccionamos de nuevo, pero horizontalmente, en la fila *12*, obteniendo así la tercera.

Para representar la función en las ventanas 2 y 3, utilizamos el comando *rePresentar*. El cambio de escalas se realiza con el comando *eScala*, introduciendo el factor de escala en cada eje. En la ventana 2, para el eje x es 5, y el eje y es 1. En la ventana 3 el factor puede "leerse" en la figura, ya que es la ventana activa. También es posible utilizar el comando *Zoom.* Si sólo hubiesemos utilizado la representación de la ventana 2 o de la ventana 3, la gráfica de la función no sería correcta. De forma inocente utilizar una única ventana puede servir para "ilustrar" la ilusión de esta forma de representar funciones.

Según el trabajo de Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990) esta tarea se clasifica como tarea de interpretación con escalas.

Ejemplo 2: Vamos a resolver el siguiente problema:

Consideremos todos los triángulos de base constante 8 cm. y con perímetro 20 cm., ¿cuál tiene mayor área?

El programa de simulación geométrica Cabri II permite el análisis y resolución de este problema.

Fase 1.

Comenzamos construyendo un segmento mediante el comando *Segmento*. Con *Etiqueta*, denominemos A y B sus extremos. Midiéndolo con el comando *Distancia y longitud* nos dará un valor, el cual al mover un punto del segmento con el *Puntero* podremos adecuar a 8 cm. Con el comando *Comentarios* podremos identificar Longitud AB este valor.

A continuación, con el comando *Triángulo*, tomando los vértices A y B del segmento construido como vértices del mismo, construiremos el triángulo con otro punto C, cuyo perímetro mediremos de forma automática mediante el comando *Distancia y longitud* que al acercar el cursor nos preguntará si lo queremos medir.

Tomando de nuevo el *Puntero,* al ir moviendo el vértice C, conseguiremos obtener el perímetro (20 cm.) deseado.

Ahora, mediante el comando *Área*, podemos medir el área del triángulo.

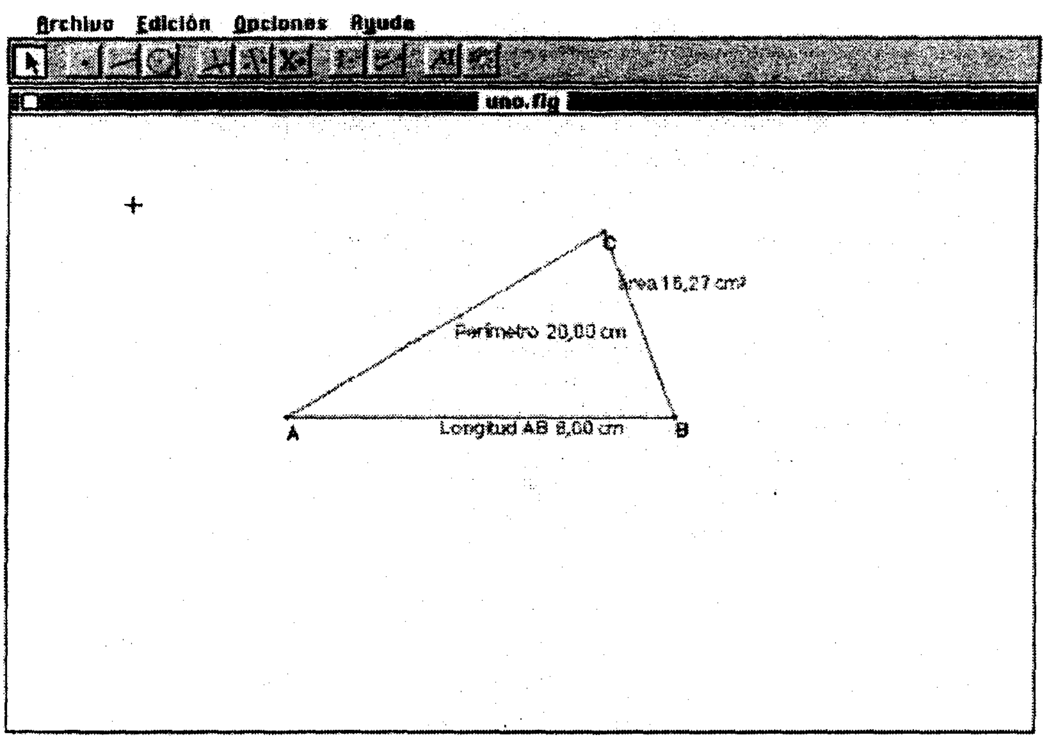


FIGURA 1

Tenemos así construido un primer caso particular del tipo de triángulo indicado en el problema. (Figura 1).

Fase 2.

Si "movemos" el punto C de manera que no se modifique el perímetro del triángulo, vemos cómo el área sí va siendo diferente.

Cabri II permite mediante el comando *Tabulación*, crear una tabla en la que ir anotando los valores que corresponden a las áreas de los distintos triángulos particulares que cumplen las restricciones del problema.

Al tener un determinado triángulo que tenga por base 8 cm. y perímetro 20 cm., marcaremos con *Punto* el correspondiente punto, que iremos etiquetando como C1, C2, C3, C4, ... e iremos tabulando. (Figura 2).

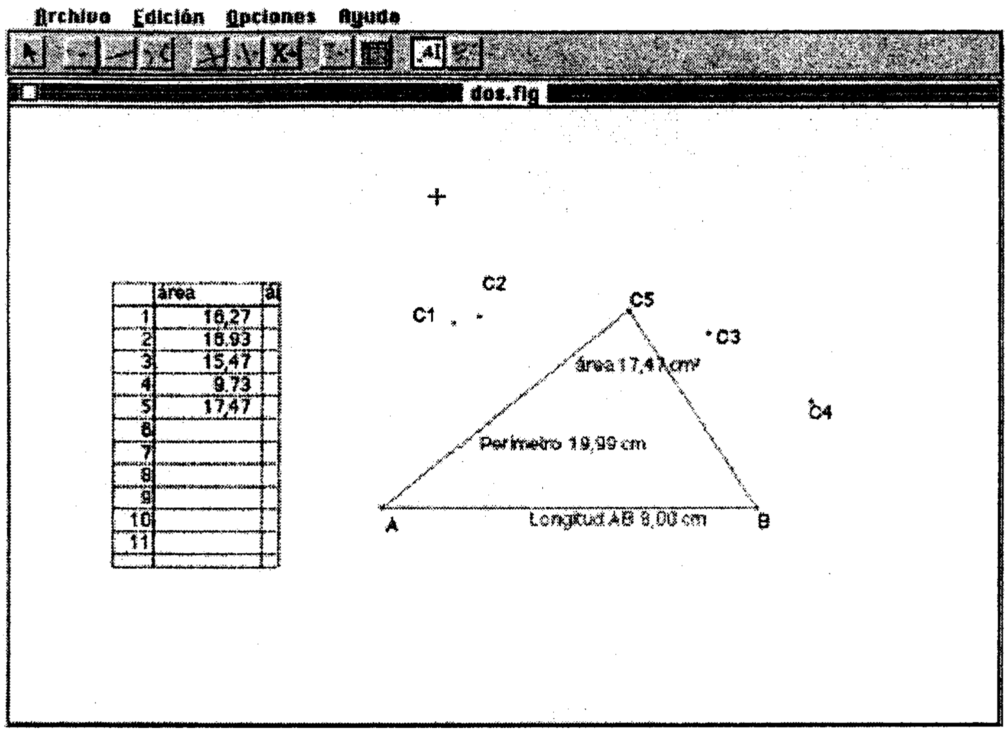


FIGURA 2

Fase 3.

Los puntos C1, C2, C3 ... que hemos ido construyendo en la pantalla, ¿definen algún tipo de cónica?

Para responder a esta pregunta, Cabri II dispone de un comando denominado *Cónica* que con cinco puntos determina el tipo de cónica que los contiene.

En este caso, determinan una elipse, como lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a los puntos A y B es constante e igual a 12 cm.

La correspondiente elipse permite ver la solución del problema. El triángulo de mayor área es el isósceles cuyo tercer vértice está situado sobre le elipse en el semieje menor. (Figura 3)

Así pues el área máxima es :

$$\frac{8\sqrt{20}}{2}\text{cm}^2 = 4 * 2\sqrt{5}\,\text{cm}^2 \approx 17.84\ \text{cm}^2$$

Agradecimientos: A los árbitros por sus comentarios que han permitido mejorar este trabajo. Los errores que se puedan encontrar son responsabilidad de los autores.

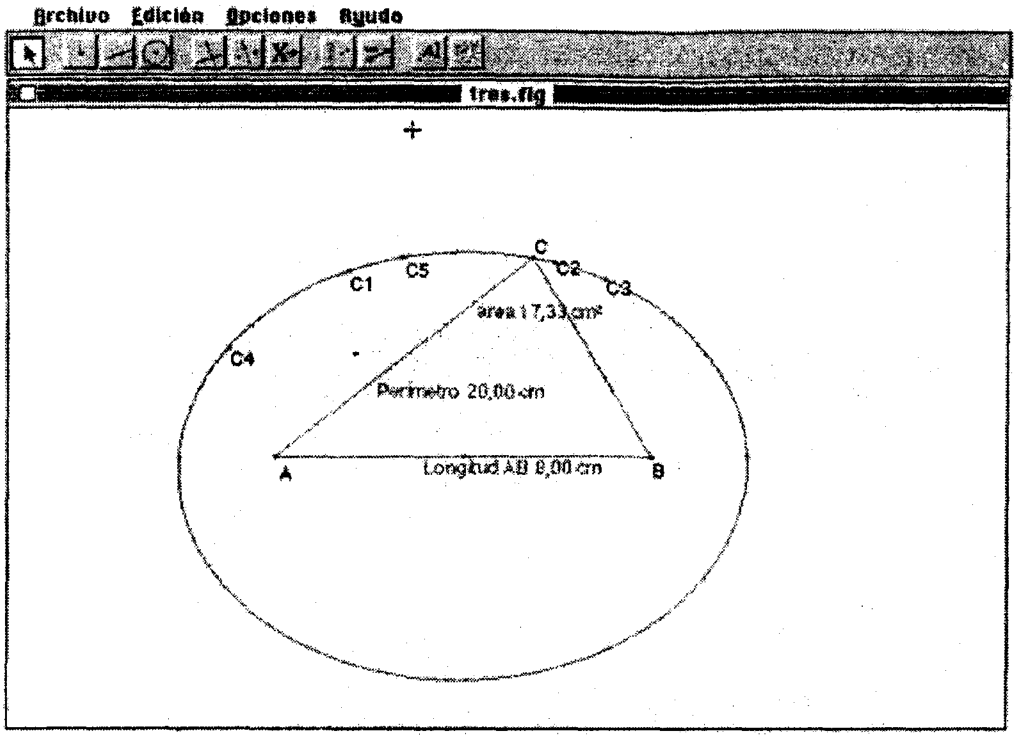


FIGURA 3

BIBLIOGRAFÍA:

Artigue, M. (1997): Le logicel "Derive" comme revelateur de phénomenès didactiques liès a' l'utilisation d'environnements informatiques pour l'aprentissage. Educational Studies in Mathematics, nª 2, volumen 33, pp 133-169.

Artigue M. Y Lagrange B. (1997): Pupils learning algebra with DERIVE. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 97/4, pp 102-105.

Blanco L. (1996): Aprender a enseñar geometría. Una experiencia en la formación inicial del profesorado de Primaria. Epsilon nº 34, volumen 12(1), pp 47-57.

Bowers, D. (1997): Opportunities for the use of computer Algebra System in Middle secondary Mathematics in England and Wales, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 97/4, pp. 113-117.

Cabri Géom tre II (1996) [Programa de software] Texas Instruments, Netherlands.

Derive (1996) [Programa de software, versión 4.06] Soft-Warehouse, Inc. Honolulu, Hawaii.

Dienes, Z. P. (1970): La construcción de las matemáticas. Editorial Vicens-Vives, Barcelona.

Dubinsky, E. (1991): Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, en Tall, D. (Ed.) Advanced Mathematical Thinking. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Dubinsky, E. (1996): Aplicación de la perspectiva piagetiana a la Educación Matemática Universitaria. Educación Matemática, volumen 8, nº 3, pp. 24-41.

Dugdale, S. (1993): Functions and graphs-Perspectives on student thinking, en Romberg, T; Fennema, E y Carpenter, T (Eds) Integrating Research on the graphical representation of functions. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey.

Fennema, E. y Franke, M.L. (1992): Teachers' Knowledge and its impact, en Grows D. (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning. Nacional Council of teachers of Mathematics, Mc Millan, Reston, Virginia.

Leinhardt,G.; Zaslavsky, O. y Stein M. K. (1990): Functions, Graph, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. Review of Research i education, Vol 16, nº 1, pp 1-64.

Marcelo, C. (1995): Investigación sobre formación del profesorado: el conocimiento sobre aprender a enseñar, en Blanco L. Y Mellado V. (Coordinadores) La formación del profesorado de Ciencias y Matemáticas en España y Portugal. Departamento de Didáctica de la Ciencias Experimentales y Matemáticas, Universidad de Extremadura.

National Council of Teachers Mathematics (1995): Algebra in a technological world (addenda Series). NCTM, Reston, Virginia.

Schwartz, J. (1994): The role of research in reforming Mathematics Education: a Different aproach, en Schoenfeld A. (Ed) Mathematical Thinking and Problem Solving. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey.

Schumann, H. (1997): New Standards for the solution of geometric calculation problems by using computers, en Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 97/5, pp 155-161.

Sfard, A. (1991): On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as differents sides of the same coin, en Educational Studies in Mathematics, 22, pp. 1-36.

Skemp, R. (1980): Psicología del aprendizaje de las matemáticas. Ediciones Morata, Madrid.

Tall, D (1992): The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof, en Grows D. (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning. Nacional Council of teachers of Mathematics, Mc Millan, Reston, Virginia.

Tall, D. Y Vinner S. (1981): Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics 12, pp. 151-169.