NOTAS
DE
CLASE

Resolución de problemas en geometría

Fecha de recepción: Noviembre, 1999

Educación Matemática
Vol. 12 No. 2 Agosto 2000
pp. 111-120

Marie-Lise Peltier
Instituto Universitario de Formación de Maestros
de Alta Normandía Francia
Marie-Lise. Peltier@univ0roven.fr

Síntesis. *En estas* Notas *se presenta una serie de problemas sencillos de geometría que promueven la construcción y prueba de hipótesis. A partir de dichos problemas, se desprende una serie de reflexiones sobre la enseñanza de la Geometría en la Educación Primaria desde una perspectiva constructivista.*

Abstract. *This paper presents a series of geometry problems that promote the construction and proof of hypotheses and, hereof, a series of reflexions on the teaching of Geometry in Elementary School from a constructivist perspective.*

I. Algunos *problemitas*:

Sabiendo que en el currículum de educación primaria actualmente vigente en México el papel de la resolución de problemas en la construcción del conocimiento matemático es central, propondré algunos *problemitas* de geometría que, en mi opinión, pueden ayudar a delimitar el cómo resolver un problema puede efectivamente conducir a los alumnos **a aprender** algo.

Primer problema

Se tiene un conjunto de cuadrados que pueden ser considerados como el patrón para construir un cubo.

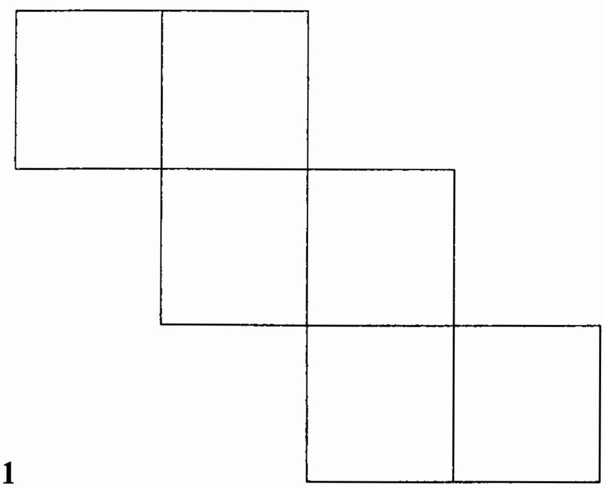


Figura 1

Se trata de intentar asociar, sin recortar el patrón, los lados de estos cuadrados que van a coincidir después del montaje formando una arista del cubo. Después se buscará identificar los puntos que van a coincidir para formar los vértices después del montaje.

Algunas observaciones:

Toda arista de un cubo es común a dos caras, así, sobre el patrón, las aristas son representadas o bien por un segmento común a dos cuadrados adyacentes, o bien por dos segmentos. Asimismo, un vértice del cubo es común a tres caras, sobre el patrón una arista es pues representada o bien por un punto común a tres cuadrados, o bien por dos puntos de los cuales uno es común a dos cuadrados, o bien por tres puntos.

En este primer problema, constatamos que debemos anticipar la construcción del cubo a partir de su patrón para responder a la cuestión, y hemos visto varias estrategia para guiar esta anticipación. La construcción efectiva del cubo permitirá validar nuestras previsiones.

Segundo problema

Tenemos una composición de figuras planas:

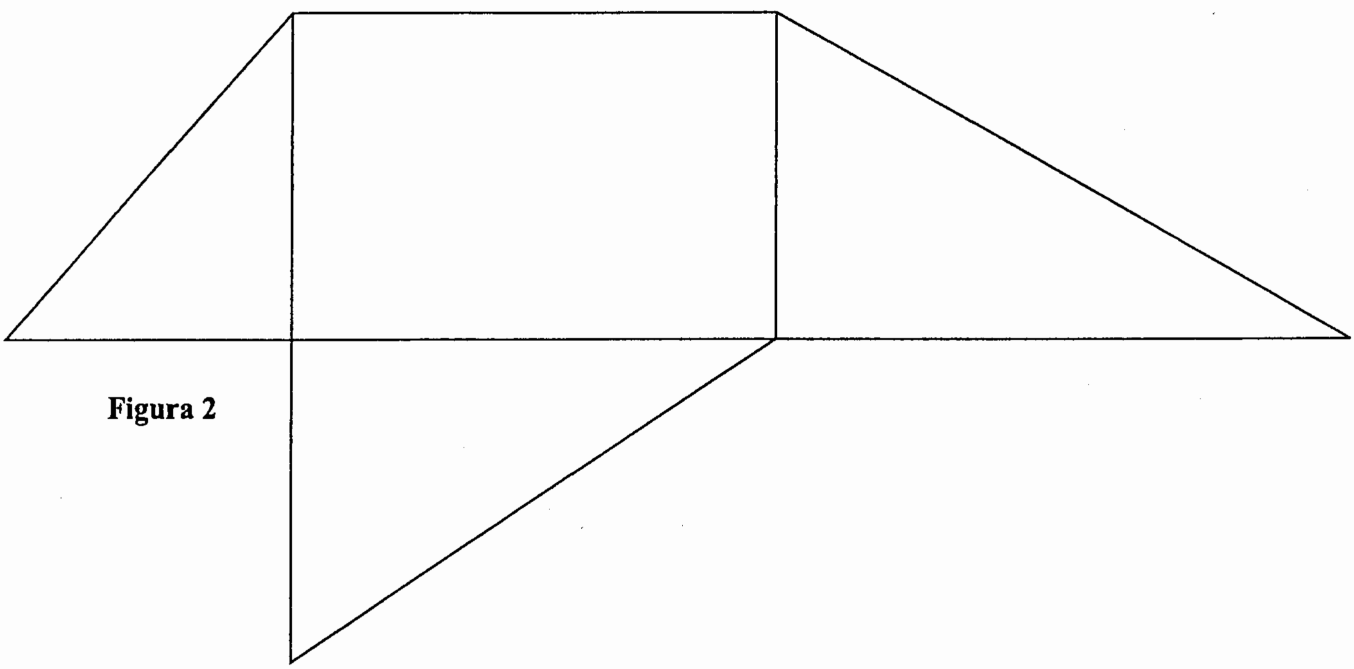


Figura 2

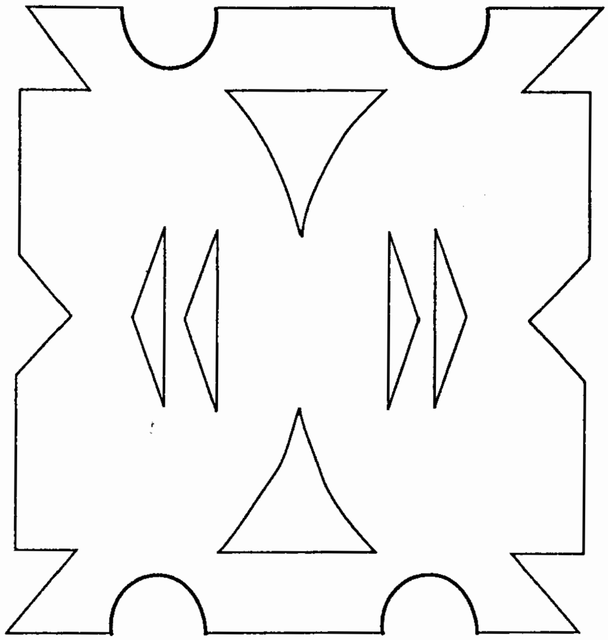
¿Se trata del patrón de un poliedro?

Se trata del patrón de una pirámide a la cual le falta una cara. El problema consiste en prever primero la forma de la cara faltante, en dibujar la forma sin instrumentos geométricos, después sus dimensiones. Finalmente, se tratará de construir la pirámide para validar nuestras proposiciones.

En esta situación, es la evocación mental de diversas pirámides la que permitirá hacer previsiones sobre la forma de la cara faltante anticipando la construcción de la pirámide; después, se validarán las previsiones efectuando el recorte y el doblado para obtener efectivamente la pirámide utilizando un conocimiento adquirido: la unicidad de un triángulo cuando se conoce las dimensiones de sus tres lados.

Tercer problema

Se trata de reproducir este dibujo mediante doblado:



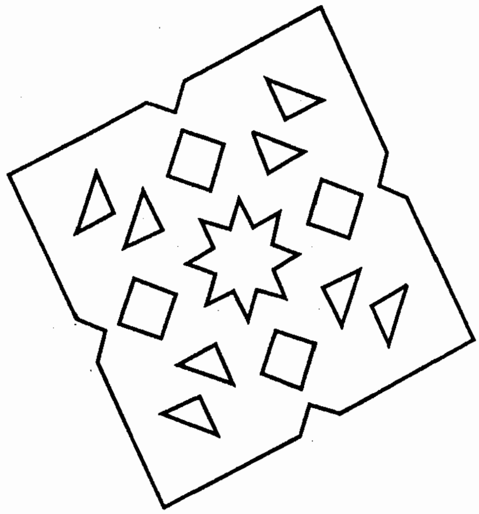


Figura 3

El modelo está en el pizarrón, no está a disposición de los estudiantes, quienes deben intentar reproducirlo desde su lugar. Para ello, pueden efectuar todos los dobleces que deseen, después, sin desdoblarlo, deben efectuar todos los recortes que juzguen necesarios, finalmente se extiende el papel y se compara su realización con el modelo.

En esta tarea, se han tenido que hacer hipótesis sobre las posiciones relativas de diferentes elementos constituyendo los cortes, y es desdoblando la producción que se prueba la validez de las hipótesis. Es la conformidad con el modelo la que confirma que se ha hecho bien.

Siguiendo los cortes propuestos sobre el modelo, ciertos teoremas "en acto" podrán ser utilizados: por ejemplo la existencia de un eje de simetría en un triángulo isósceles, la ortogonalidad de la mediatriz de un segmento, etcétera.

Cuarto problema

Se trata de reproducir el dibujo que aparece en la figura 4 *a*. Para ello, se dispone del modelo presentado en el pizarrón, de una hoja sobre la cual está dibujado un lado del cuadrado, un modelo individual del dibujo pero sin color y a una escala diferente de la que es determinada para la construcción por el lado del cuadrado dado (figura 4 b).

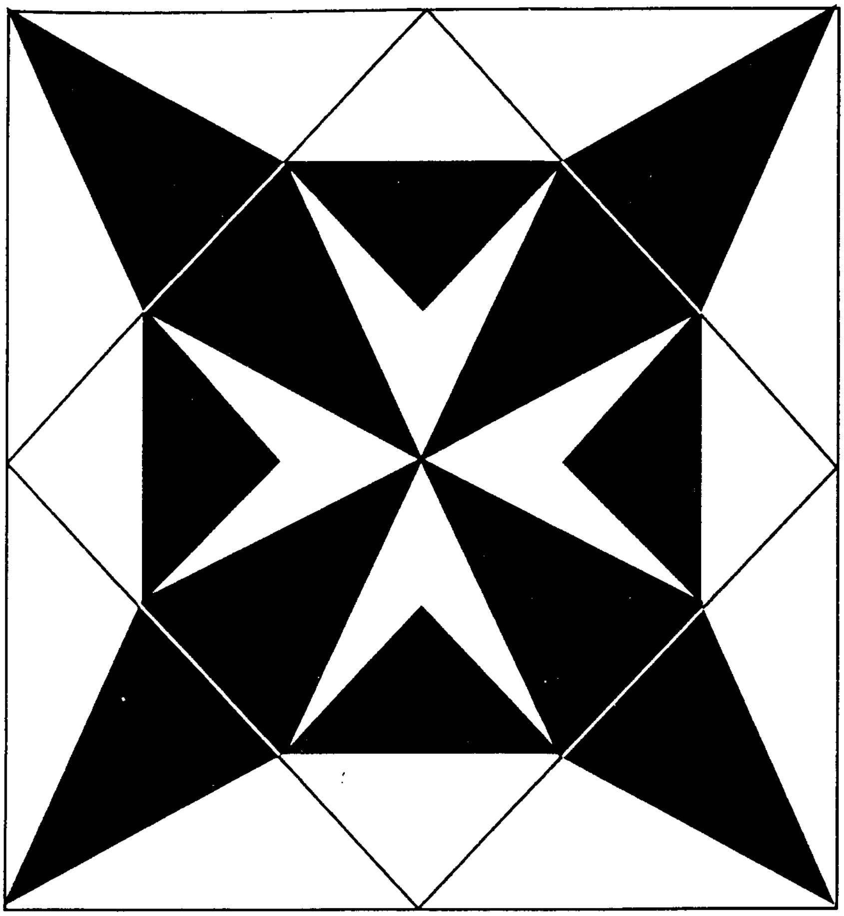


Figura 4*a*

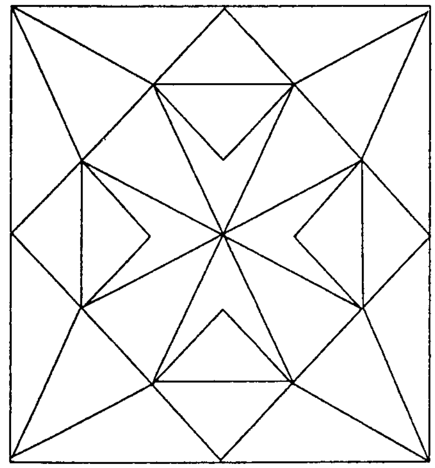


Figura 4*b*

La reproducción debe plantear un problema al alumno, si no, no hay realmente actividad matemática, no se trataría sino de habilidad manual, de cuidado en la utilización de instrumentos. ¿Qué puede ser un problema en una actividad de reproducción de figuras? En las situaciones de reproducción, es indispensable que la construcción solicitada necesite un análisis fino de la figura. Por eso, debe ser necesario, para reproducir la figura, tener que construir elementos que no son visibles (que fueron borrados) pero que son indispensables para la construcción. La elección del modelo es entonces primordial para que los alumnos no tengan una tarea de simples ejecutantes, sino que tengan que hacer hipótesis, tomar iniciativas (unir puntos, prolongar un segmento, trazar un círculo...), ellos toman así conciencia de su propio poder sobre la figura, ellos la dominan.

La decisión de dar el lado del cuadrado para la reproducción está vinculado a la necesidad de una validación de las producciones de los alumnos. En las tareas de reproducción de figuras, la única validación posible es la conformidad con el modelo, es entonces superponiendo una copia preparada por el maestro con la reproducción a la escala dada, que los niños podrán asegurarse de tal conformidad y validar su trabajo.

Este ejemplo puede también permitirnos poner en evidencia las ayudas que uno puede aportar para diferenciar la tarea en función de las dificultades encontradas por los alumnos. Por ejemplo aquí, si ciertos niños no logran analizar la figura, es posible distribuirles modelos sobre los cuales el maestro habrá puesto en evidencia ciertos alineamientos, o bien sobre los cuales él habrá suprimido ciertos elementos para permitir una mejor identificación de ciertas figuras (aquí el cuadrado del centro, por ejemplo). Es igualmente posible, si los niños muestran más dificultades en la construcción que en el análisis, distribuir una hoja con el cuadrado exterior ya construido, o bien una hoja cuadriculada con solamente el lado del cuadrado, o una hoja cuadriculada con el cuadrado exterior ya construido. Así, los niños serán conducidos a ejecutar todos el mismo dibujo pero teniendo una tarea de análisis y /o de construcción más o menos compleja.

En estos diferentes ejemplos, se ha puesto en evidencia el rol de la anticipación, el de la manipulación y la naturaleza de la validación.

II. Geometría y problemas

Es competencia del profesor permitir a los alumnos involucrarse en los procesos de modelización del espacio, de los objetos del espacio y del plano, aprender a interpretar los modelos obtenidos y probar la validez de las informaciones que éstos proporcionan.

Las figuras juegan un rol preponderante en las actividades geométricas. Se confunde con bastante frecuencia figura y dibujo. Los matemáticos saben que el razonamiento que esto conduce se refiere no al dibujo efectivamente trazado sobre la hoja de papel sino sobre la figura en tanto que objeto geométrico del modelo (euclidiano) en el cual se trabaja. El alumno, por su parte, debe aprender a interpretar la representación dibujada, a aprovechar las informaciones perceptivas que éste le proporciona para no conservar sino las que son pertinentes en el modelo y rechazar las que son contextuales (imprecisiones en el trazo, posición en la hoja de papel...).

Saber geometría, no es ser capaz de recitar definiciones o teoremas, es ser capaz de movilizar conocimientos para emitir hipótesis, ponerlas a prueba, construir razonamientos lógicos, en una palabra, resolver problemas "nuevos" para sí, es decir que se ha aprendido a resolver, concediéndose la posibilidad de hacer ensayos, intervenir sobre las figuras, eventualmente haciendo manipulaciones...

1. Los objetivos

Nuestro objetivo es pues conducir a los alumnos a:

- Construirse representaciones mentales del espacio, de los objetos del espacio y del plano
- Construir un lenguaje apropiado para describir esos objetos
- Comprometerse en los problemas de modelización
- Interpretar informaciones proporcionadas por las diversas representaciones convencionales
- Desarrollar un razonamiento para esas representaciones

Y esto, apoyándonos sobre sus concepciones iniciales, de donde la necesidad de hacerlas emerger.

2. Algunas características de un problema

Derivemos de los ejemplos que hemos visto algunas características de un problema.

Igual que los problemas del campo numérico, los problemas relativos a la geometría deben:

- Tener sentido para el alumno
- Ser consistentes, es decir que la respuesta no debe ser inmediata
- Permitir a los alumnos involucrarse en la resolución mediante procedimientos conocidos
- Poner en juego el conocimiento del cual se prevé el aprendizaje (noción, propiedad, saber-hacer, técnica...)
- Permitir, en lo posible, una "auto validación" de la respuesta propuesta...

3. El papel de las manipulaciones

- Las manipulaciones, para nosotros, tendrán tres funciones:
- La primera, clásica, es la acumulación de experiencias, que para estar disponibles después, tendrán que ser descritas, pero sobre todo evocadas después de haber sido realizadas
- Una segunda función de la manipulación es ser un soporte de la anticipación, para desarrollar el razonamiento emitiendo hipótesis, para trabajar sobre las imágenes mentales construidas y probarlas
- Finalmente, y de manera evidente, la manipulación permite en numerosos casos la validación de las hipótesis que fueron formuladas.

El lenguaje geométrico

Como el lenguaje natural, el lenguaje geométrico tiene dos funciones esenciales:

- El de la comunicación, entre pares, con el maestro...
- El de la memoria para sí mismo, para los otros (recuerdo, evocación, etc.).

Nosotros introducimos el lenguaje geométrico cuando su uso se revela necesario, es decir, esencialmente en las situaciones de comunicación.

El problema principal proviene de la diferencia de funcionamiento del lenguaje matemático y el lenguaje natural, este último, en efecto, contrariamente al lenguaje matemático, funciona por el principio del máximo de información. Demos un ejemplo a partir de un problema ya visto:

A la pregunta: ¿Hay un triángulo rectángulo en el patrón de la pirámide? el matemático responde "sí" (puesto que si hay tres hay, *a-fortiori*, uno), mientras que, en el lenguaje corriente, se responde "no" (no hay uno, hay tres).

Demos otro ejemplo: diferentes figuras geométricas están ocultas, el maestro ha escogido un cuadrado, los alumnos deben encontrar la figura seleccionada planteando preguntas.

A la pregunta "¿Es un rectángulo?", el matemático (aquí el maestro) responde "sí" (puesto que todos los cuadrados son rectángulos) , en lenguaje corriente, se respondería "no" (puesto que no se designa generalmente un cuadrado con el vocablo rectángulo en la vida de todos los días).

Vemos claramente aquí que esta cuestión del lenguaje no es simple. Nos parece indispensable confrontar muy pronto a los alumnos con estas diferencias, par discutirlas, para permitirles familiarizarse poco a poco con este nuevo funcionamiento del lenguaje. Evitar el «choque» sería nefasto en la medida en la que no es posible pasar "suavemente" del registro del lenguaje natural usual al del lenguaje matemático.

Nuestra preocupación permanente será entonces poner a los niños en situación de reflexionar, de plantearse problemas, de anticipar, de evocar experiencias, de construir y de afinar imágenes mentales, de poner en marcha un lenguaje específico, intentando apoyarnos lo más posible sobre sus concepciones iniciales para hacerlas evolucionar o ayudarles a rechazarlas si son inadecuadas.

Después de haber propuesto numerosos problemas, será posible institucionalizar un cierto número de conocimientos relativos a las nociones matemáticas del programa, que serán puestas a funcionar por los niños en el curso de las situaciones de resolución de problemas, después hay que llevar a los alumnos a utilizarlas proponiendo numerosos ejercicios de aplicación.

Antes de terminar, propondré algunas otras pistas con el fin de ilustrar un poco más cómo intentar considerar los objetivos que acabo de indicar, rebasando las simples actividades de observación, manipulación y constatación con frecuencia propuestas en las clases a manera de actividades geométricas.

III. Algunas pistas

a) Los sólidos

Los problemas de la representación son aquí muy importantes. Es indispensable conducir actividades con material, actividades que permitan, entre otras cosas, elaborar e interpretar modos de representaciones planas de objetos del espacio.

Juego de Kim visual o táctil, adivinanzas, juego con sólidos ocultos (juego del retrato) para permitir a los niños apropiarse de diversos sólidos, de construir imágenes mentales, de adquirir un cierto vocabulario para describirlas (recordemos que son las situaciones de comunicación las que van a permitir a los alumnos construir un vocabulario geométrico funcional y no lecciones de vocabulario).

Análisis comparativo de diversos modos de representaciones planas, estudio de pérdidas de información, búsqueda de representaciones apropiadas en función de un problema plateado. Por ejemplo, si se trata de distribuir los puntos de un dado, o los colores sobre un cubo siguiendo ciertas restricciones, ¿es más razonable trabajar sobre una representación en perspectiva Cavallieri, sobre un dibujo plano, sobre el patrón, sobre una foto...?

Búsqueda de patrones para ciertos sólidos poniendo al niño en situación de anticipar la construcción efectiva:

Por ejemplo, adivinar las caras que van a tocarse después del armado, los segmentos que van a coincidir para formar una arista, los puntos que van a coincidir para forma un vértice del poliedro. La construcción efectiva del poliedro permitirá confirmar o rechazar las hipótesis elaboradas.

Más tarde, es una cara completa o varias las que se preverán, se construirán y se ubicarán para que el sólido sea un poliedro sin huecos y sin traslapes de caras.

Vemos que aquí, se trata para el alumno de trabajar apoyándose sobre las imágenes mentales construidas y memorizadas, y de utilizar saberes-hacer sobre las construcciones de figuras planas. La manipulación vendrá en seguida, estará ahí como instrumento de control.

2. Las figuras planas

Juego de Kim, juegos de "la figura escondida" para reconocer e identificar las formas planas.

Por ejemplo, yo distribuyo una hoja para dos en la cual se encuentran dibujados polígonos (figura 5):

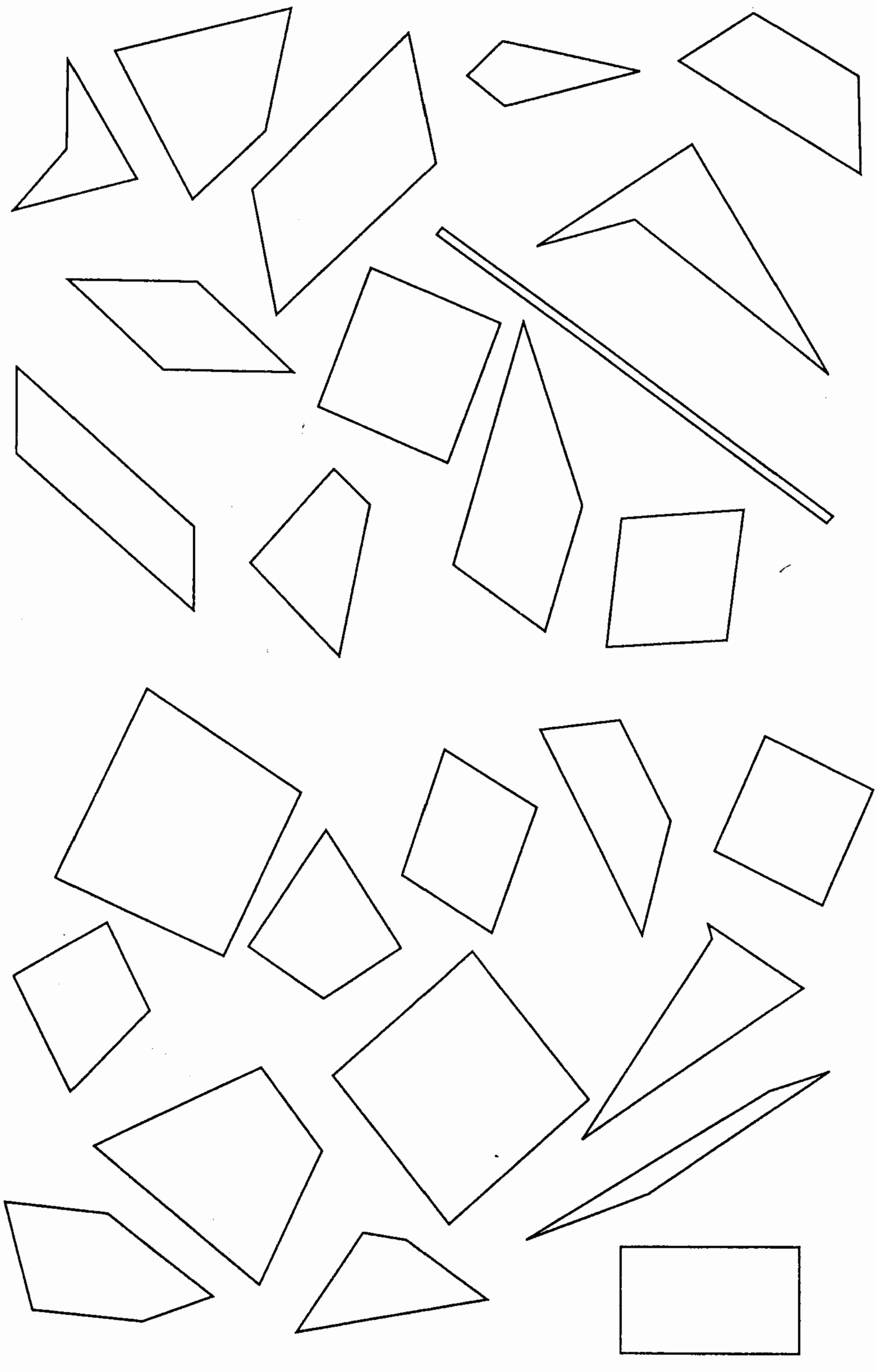


Figura 5

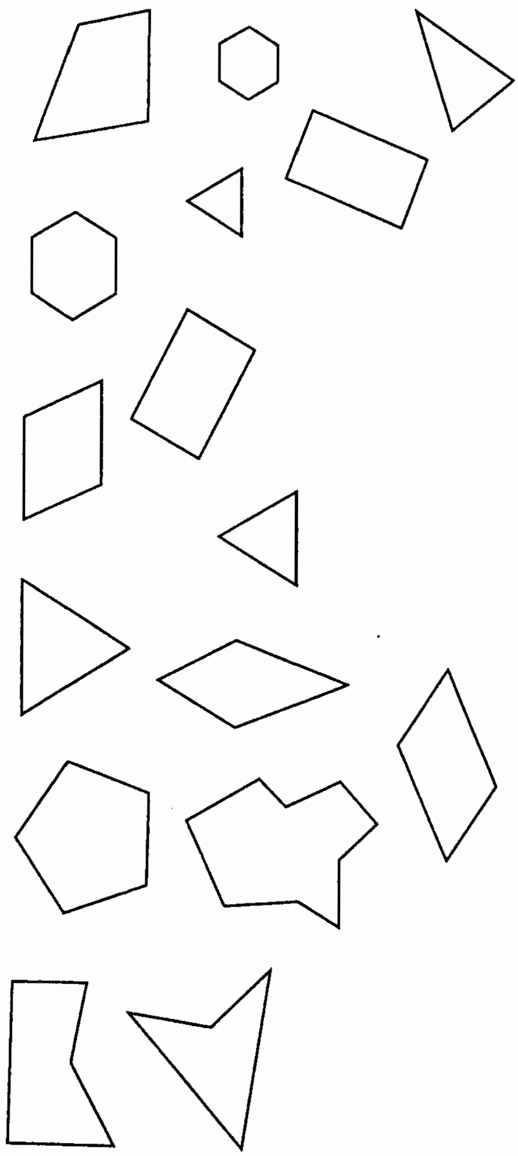
He escogido uno de los polígonos y se debe encontrar cuál es. Para ello, se deben plantear cuestiones, por escrito, a las cuales yo no responderé sino *sí* o *no.*

En esta actividad, vemos que la necesidad de plantear las preguntas por grupos de dos y por escrito, lleva necesariamente a utilizar el vocabulario geométrico, a hacer deducciones, a analizar las figuras para eliminarlas o conservarlas durante sucesivos.

Podemos igualmente poner en evidencia ciertas especificidades del lenguaje matemático, en contradicción con el lenguaje usual. Así, cuando se pregunte, la figura tiene un ángulo recto, la respuesta es sí (el trapecio rectángulo tiene dos ángulos rectos, por lo tanto, tiene uno).

Búsqueda de propiedades de las figuras.

Tenemos una serie de polígonos. Esos polígonos han sido agrupados de diversas maneras (figura 6). A cada agrupamiento corresponde una criterio. Se trata de encontrar esos criterios. Es decir, que en cada caso, hay que encontrar las propiedades verificadas por los polígonos que son citados y que no son verificadas por los otros.



(Figura 6)

En este problema, las propiedades no son dadas por el maestro, son los alumnos quienes tienen el compromiso de encontrarlas. La formulación será sin duda torpe para algunos, pero es en el curso de la confrontación de proposiciones con los otros que se afinará progresivamente hasta estar de acuerdo con las expectativas del programa.

En conclusión

Los maestros pueden proponer situaciones ricas y variadas, planteando reales problemas a loa alumnos, y llevarlos así a construir sus conocimientos espaciales y geométricos. Por supuesto, no se trata de quedarse en una acumulación de actividades interesantes. El papel del maestro consiste en escogerlas de manera de articularlas y en trabajar diversos aspectos de cada noción. Su rol consiste también en ayudar a los alumnos a identificar en los diferentes problemas los saberes que están en juego, en precisarlos, en presentarlos claramente en el curso de las fases de institucionalización, en llevar a los alumnos a utilizarlos en situaciones de aplicación.

Deseo haber promovido las ganas de hacer geometría y de hacerla hacer a los niños. Es un dominio apasionante, relativamente poco explorado en el plan didáctico, que permite mezclar intuición e imaginación pero también rigor y precisión.