NOTAS
DE
CLASE

Educación Matemática
Vol. 12 No. 2 Agosto 2000
pp. 132-137

Un triángulo amoroso: el álgebra, la geometría euclidiana y la geometría analítica.

Fecha de recepción: Junio, 1999

Lic. Roberto Torres Hernández
Matemáticas Aplicadas
Universidad Autónoma de Querétaro, México
robert@sunserver.uaq.mx

Resumen: En el presente trabajo se enfatiza la relación existente entre el álgebra y la geometría vía la geometría analítica. Se resuelven ciertas ecuaciones cuadráticas de manera geométrica, utilizando la ecuación de la circunferencia y después se analiza el origen y las ideas geométricas y algebraicas que subyacen en el método descrito.

Abstract: The present work is an emphasis about algebra and geometry relation from an analytic geometry viewpoint. We'll find some quadratic equations solved geometrically working with the circumference equation, developing a posterior analysis about the source of the geometric and algebraic ideas underlying on the described method.

Introducción

Este articulo mostrará una manera geométrica de resolver ciertas ecuaciones cuadráticas. El método y su justificación emplearán ideas tanto de álgebra como de geometría euclidiana y analítica, con lo cual se relacionarán varios temas de matemáticas que se enseñan a lo largo de varios semestres del bachillerato, pero que generalmente aparecen muy desligados unos de otros, dando así la impresión de que las matemáticas son una colección de temas independientes unos de otros y que cambian de curso a curso sin relación alguna.

Creemos que la incorporación de estas ideas a las clases cotidianas, fomentarán en el estudiante un poco de reflexión sobre las características fundamentales de la geometría analítica como unificadora del álgebra y la geometría euclidiana.

El método

Resolver geométricamente una ecuación significa encontrar, mediante procedimientos geométricos, un segmento de recta cuya longitud satisfaga la ecuación dada.

Luego, tomemos la ecuación cuadrática

$x^2 - ax + b = 0$ donde y $a > 0$ y $b > 0$.

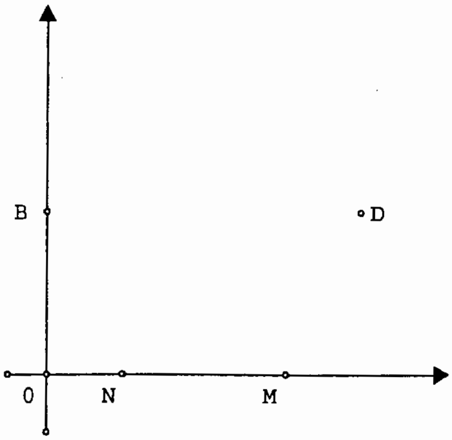
Observemos que esta expresión nos lleva a considerar la relación $y = x^2 - ax + b$ que representa una parábola que abre hacia arriba y cuyo eje es paralelo al eje Y.

Si completamos cuadrados, tenemos que

$$y-b+\frac{a^2}{4}=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$$

de donde deducimos que el vértice es el punto $V=\left(\frac{a}{2},b-\frac{a^2}{4}\right)$.

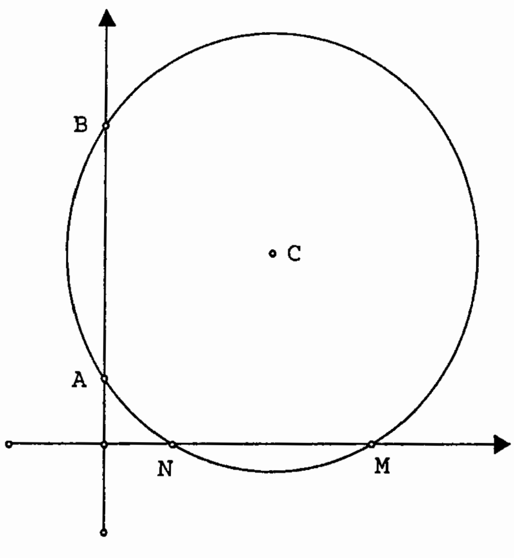
De la ecuación anterior podemos observar también que los puntos B=(0,b) y $D=(a,b)$ pertenecen a la parábola.



Por supuesto, si hacemos en la ecuación de la parábola, obtenemos la cuadrática original $x^2-ax+b=0$, pero hacer $y=0$ en $y=x^2-ax+b$ equivale a considerar los puntos N y M, es decir, las intersecciones con el eje X y las abscisas de estos puntos nos resolverán la ecuación, esto es, los segmentos ON y OM son los segmentos buscados.

Trazar una parábola conociendo su vértice y dos de sus puntos no es difícil, por lo menos no teóricamente. Sin embargo, es mucho mas fácil trazar una circunferencia para encontrar los puntos N y M.

Consideremos la circunferencia que pasa por los puntos $A=(0,1)$, $B=(0,b)$ y tiene centro $C=\left(\frac{a}{2},\frac{b+1}{2}\right)$.



El radio r de la circunferencia es entonces la distancia de cualquier punto, digamos A al centro C:

$$r=\sqrt{\left(\frac{a}{2}-0\right)^2+\left(\frac{b+1}{2}-1\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+(b-1)^2}$$

La ecuación de la circunferencia es, por consiguiente:

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b+1}{2}\right)^2=\left[\frac{1}{2}\sqrt{a^2+(b-1)^2}\right]^2$$

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b+1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left[a^2+(b-1)^2\right]$$

Notemos que en esta circunferencia, si hacemos , obtenemos

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(0-\frac{b+1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left[a^2+(b-1)^2\right]$$

y simplificando, llegamos a

$x^2-ax+b=0$

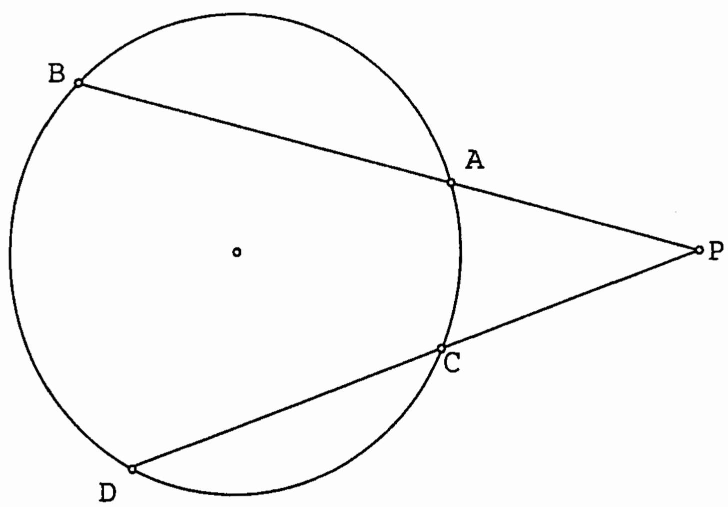
es decir, esta circunferencia también pasa por los puntos N y M dados antes y las abscisas de estos puntos, que son las longitudes de los segmentos ON y OM resuelven la ecuación original.

La justificación

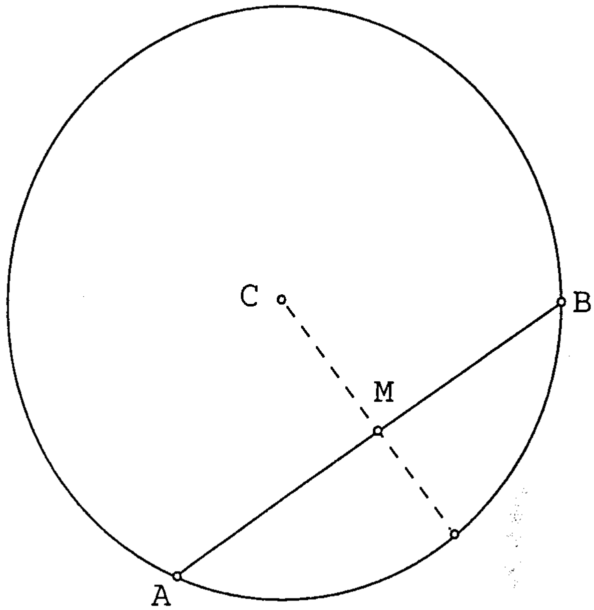
Puede parecer hasta aquí, que el procedimiento anterior aparece como por arte de magia y después se comprueba que funciona, pero ¿por qué se eligen los puntos A, B y C para trazar la circunferencia?, ¿Siempre se considera el punto $A = (0,1)$?, etc.

Para responder a las preguntas anteriores, es necesario recordar dos hechos geométricos y uno algebraico.

1. Dadas dos rectas secantes a una circunferencia que pasen por el punto P, tenemos que PA • PB = PC • PD

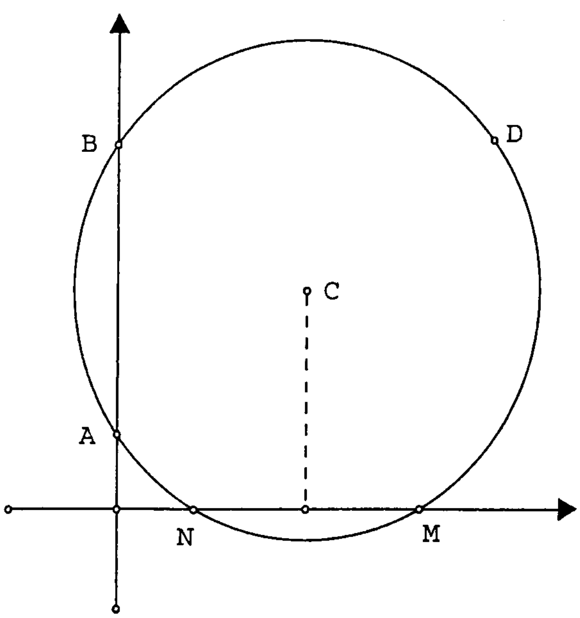


2. Si C es el centro de la circunferencia y CM es perpendicular a la cuerda AB, entonces M es el punto medio de AB.



3. Si r y s son las raíces de la ecuación $x^2 - ax + b = 0$, entonces $r + s = a$ y $r \cdot s = b$. Esto se obtiene al considerar la igualdad $(x-r)(x-s)=x^2-ax+b$.

Con estos tres hechos, retomemos las instrucciones de nuestro procedimiento. Debemos trazar la circunferencia que pasa por los puntos $A = (0,1)$, $B = (0,b)$, y tiene centro $C = \left(\frac{a}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$ y los puntos N y M, que son los puntos donde corta la circunferencia al eje X, nos determinan las raíces de la ecuación. Pero volvamos a la pregunta ¿por qué se eligen los puntos A y B?



La razón es simple. Por el primer hecho geométrico, se tiene que $OA \cdot OB = ON \cdot OM$, ya que los ejes coordenados son rectas secantes a la circunferencia. Pero como ya se demostró que la longitud de los segmentos ON y OM son las raíces de la ecuación, por el hecho algebraico debemos de tener que $ON \cdot OM = b$ y también $OA \cdot OB = b$, luego lo mas natural resulta elegir $OA = 1$ y $OB = b$.

Ahora ataquemos el centro C. Supongamos por el momento que C es conocido. Si así fuera, por el segundo hecho geométrico, N y M deben de ser simétricos con respecto a H (aquí estamos pensando que CH es perpendicular al eje X). Luego, si encontráramos OH, trabajando hacia atrás en el argumento, determinaríamos la localización de H.

Por el hecho algebraico, tenemos que $ON + OM = a$, luego si consideramos solamente el eje X, tendríamos una situación como la siguiente:

De aquí, tenemos que

$$ON + OM = ON + (OH + HM)$$
$$ON + OM = ON + OH + NH$$
$$ON + OM = ON + (NH + OH)$$
$$ON + OM = OH + OH$$
$$ON + OM = 2OH$$

de donde $OH = \frac{a}{2}$.

Un argumento similar nos da la ordenada del punto C.

Es interesante notar que existe otra manera de ubicar la circunferencia. Para ver esto, recordemos la ecuación de la parábola con la que empezamos a trabajar:

$$y - b + \frac{a^2}{4} = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2$$

Es inmediato observar que los puntos $B = (0,b)$ y $D = (a,b)$ y pertenecen a la parábola y también es claro que estos dos puntos junto con $A = (0,1)$ determinan una circunferencia.

Esta es la misma que hemos encontrado, ya que de las coordenadas de estos tres puntos se desprende que el segmento AB es perpendicular al segmento BD, luego el ángulo ABD es recto.

Pero se sabe que una condición necesaria y suficiente para que un ángulo sea recto es que pueda inscribirse en un semicírculo (este resultado es a menudo conocido como Teorema de Thales), de donde se tiene que los puntos A y D son los extremos de un diámetro de la circunferencia, por lo que el punto medio C del segmento AD nos dará su centro:

$$C = \left(\frac{a+0}{a}, \frac{b+1}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$$

que es el punto que ya habíamos encontrado.

Epílogo

Para concluir, quisiéramos subrayar que este tipo de maneras de abordar la ecuación cuadrática posibilita al estudiante para que empiece a explorar por si mismo, temas propios de la geometría analítica, tratando de responder a preguntas muy concretas. Algunas de ellas se sugieren enseguida.

Es necesario hacer notar que es deseable que los propios alumnos sean los que empiecen a formular sus propias preguntas, antes que el profesor proponga las suyas, estableciendo, por supuesto, un orden en la dificultad de esta exploración.

- ¿Es necesario que tomemos $a > 0$ y $b > 0$?, es decir, ¿El método falla si uno de estos coeficientes es negativo?
- ¿Qué interpretación algebraica podemos dar al hecho de que la circunferencia no corte el eje X?
- ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos (a,b) tales que la ecuación $x^2 - ax + b = 0$ no tiene raíces reales?

Bibliografía

Dickson, L.E. (1922) *First course in the theory of equations.* John Wiley.

Meconi, L.J. (1972) 'A geometric technique for factoring polynomials'. En *Mathematics teacher,* Nóviembre. 621-625.

Olson, A. T. (1976) 'Circles, chords, secants, tangents and quadratic equations'. En *Mathematics teacher,* Diciembre. 641-645.

Patterson, W. M. (1991) 'A special circle for quadratic equations'. En *Mathematics teacher,* Febrero. 125-127.