
1 Cosas que se deberían de enseñar

REFLEXIONES

Educación Matemática
Vol. 12 No. 3 diciembre 2000
pp. 53-67

Carlos Bosch Giral
Departamento de Matemáticas
Instituto Tecnológico Autónomo de México
bosch@itam.mx

1. Introducción

En los programas de matemáticas no hay ningún tema en donde se enseñen juegos como el billar. Hace algunos años a los alumnos de nivel medio superior o universitario que frecuentaban los billares, se les llamaba “vagos”. Sin embargo el billar tiene mucho que enseñarnos. Dependiendo si consideramos a una bola de billar, como una bola real, o como un rayo de luz o como una onda sonora, se confronta uno con diferentes aspectos del mismo tema, la manera en que objetos rebotan sobre una superficie. Un pequeño momento de reflexión sobre esto produce una lista enorme de tópicos donde se aplican los billares: acústica, comunicación, energía solar, sonar, radares, óptica, sismología, deportes, etc... Actualmente se están desarrollando muchos aspectos matemáticos de los billares.

2. El billar

La definición de lo que es un billar varía según lo que uno vaya a hacer. Por ejemplo en el diccionario de la Real Academia de la Lengua se dice lo siguiente:

billar: del francés *billard*. Juego de destreza que se ejecuta impulsando con tacos, bolas de marfil en una mesa rectangular forrada de paño, rodeada de arandanas elásticas y con troneras o sin ellas.

En otros sitios como por ejemplo el libro de Serge Tabachnikov [14] dicen que una mesa de billar es una variedad Riemanniana M con frontera suave a pedazos. El sistema dinámico del billar en M está generado por el movimiento libre de un punto donde se acumula la masa (llamado bola) sujeto a la reflexión en la frontera. Esto quiere decir que un punto se mueve según una geodésico en M con velocidad constante (digamos uno) hasta que golpea la frontera. En un punto suave de la frontera la bola de billar se refleja de manera que la componente tangencial de su velocidad siga siendo la misma mientras que la componente normal cambia de signo.

En dimensión 2 esta colisión se describe con la bien conocida ley de la óptica geométrica: el ángulo de incidencia es igual que el ángulo de reflexión.

En la película de Donald en el País de las Matemáticas [15] se define una mesa de billar como la unión de dos cuadrados donde el “rebote” de la bola es tal que el ángulo de entrada y el de salida son iguales como se indica en la figura ¡Sin lugar a dudas al que hay que hacerle caso es a Donald y no a los matemáticos ni a los académicos de la lengua!

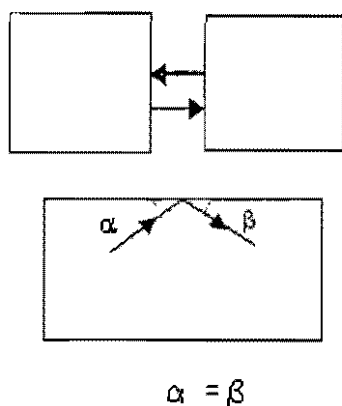


Figura 1

Hasta 1800 los juegos de billar eran competencias entre dos personas. Posteriormente se añadieron más bolas y en las primeras décadas del siglo XIX se permitieron más de dos jugadores. Los tres juegos de billar principales que se juegan con un taco son:

El billar que se juega con tres bolas.

La pirámide que se juega con 15 bolas rojas sin número.

El pool que se juega con un número variable de bolas (usualmente 15 numeradas y una sin número). Este último adquirió ese nombre por el método de apostar que se usa [11].

La Enciclopedia Británica nos da un poco más de historia sobre los billares. Por ejemplo hay referencias al juego de billar en "Antonio y Cleopatra" escrita en 1607 por Shakespeare. Hay personas que creen que el juego es mucho más antiguo; posiblemente llegó a Inglaterra por medio de los caballeros que regresaban de las cruzadas. La primera evidencia que se tiene del billar es en Francia en el siglo XV durante el reinado de Luis XI (1423-1483). Carlos IX de Francia en el siglo XVI así como Jaime I en la misma época tenían una mesa de billar en su castillo.

En América la primera mesa de billar apareció en Florida y fue llevada ahí por los españoles en 1565[11].

Veamos algunos ejemplos sencillos de billares y sus propiedades.

3. Los billares en concursos y películas.

En la Competencia Cotorra de Matemáticas de 1999 [3] y en el Concurso de Primavera [2] de ese mismo año apareció el siguiente problema:

Una mesa de billar se divide en partes iguales y se marca con letras. Una bola de billar es lanzada desde la esquina A de la mesa de billar formando un ángulo de 45° con la orilla de la mesa como se muestra en la figura 2. La bola siempre rebota formando un ángulo igual al de llegada. El primer rebote de la bola es en el punto O. ¿Qué punto toca en el séptimo rebote?

- a) P b) N c) T d) M

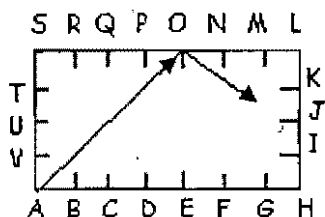


Figura 2

En la Competencia Cotorra apareció como el vigésimo ejercicio de una lista de 20 y en el primer nivel del Concurso de Primavera como el séptimo problema de una lista de 20. La Competencia Cotorra está dirigida a alumnos que el 31 de diciembre del año del concurso no hayan cumplido 13 años. El Concurso de Primavera, primer nivel está dirigido a alumnos que el 31 de diciembre del año del concurso no hayan cumplido 14 años. El nivel 2 se dirige a alumnos que el 31 de diciembre del año del concurso no hayan cumplido 16 años. Posteriormente se hacen selecciones con los mejores de cada nivel y se hacen exámenes para representar a estos concursos en distintas competencias internacionales. Una de estas es la Olimpiada Rioplatense [7] en donde como examen de selección se puso en Noviembre de 1999 el siguiente problema.

Considera ABC una mesa de billar en forma de triángulo equilátero. Se da un impulso a una bola que inicialmente está en la posición P (P es un punto cualquiera interior al triángulo). La bola parte paralela al lado AC. Cada vez que la bola rebota en un lado del triángulo sale con el mismo ángulo que llega. ¿Es posible que la bola nuevamente pase por el punto P? Justifica tu respuesta.

De los 10 alumnos que presentaron este examen, los diez contestaron que la bola siempre vuelve a pasar por P, tres no dieron argumentos para justificar su respuesta mas que un dibujo, cuatro dieron argumentos incompletos y los otros tres explicaron claramente la situación.

En el concurso Po Leung Kuk [8] de matemáticas en la escuela primaria que se lleva a cabo en Hong Kong y en el que participa México, donde hay una mayoría de países asiáticos, en 1999 también apareció un problema sobre billares: sobre una mesa rectangular PQRS de 5 unidades de largo y 3 unidades de ancho, una bola es lanzada desde el punto P en un ángulo de 45° respecto al lado PQ y rebota sobre el lado SR en un ángulo de 45° . La bola continúa rebotando sobre los lados en un ángulo de 45° . ¿Cuántas veces rebota la bola antes de llegar al punto R?

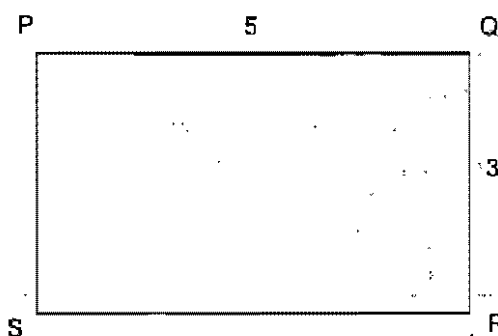


Figura 3

Finalmente quiero comentar en este apartado cómo le enseñan a Donald a jugar billar. Como ya lo indicamos la mesa de billar en la que juega Donald esta formada por dos cuadrados marcados con diamantes como se indica en la figura 4. Lo que se explica en la película es hacia donde tirar para que la bola gris toque tres bandas (lados) de la mesa de billar y luego toque a las otras dos bolas. Comentan que para hacer un tiro que tenga éxito, hay que usar los diamantes como una guía matemática.

El primer ejemplo que dan es el siguiente. Para pegarle a las dos bolas lo mejor es fijarse cual es el ángulo natural para que la bola les pegue. Para eso lo primero que hacen es numerar los diamantes de dos formas distintas.

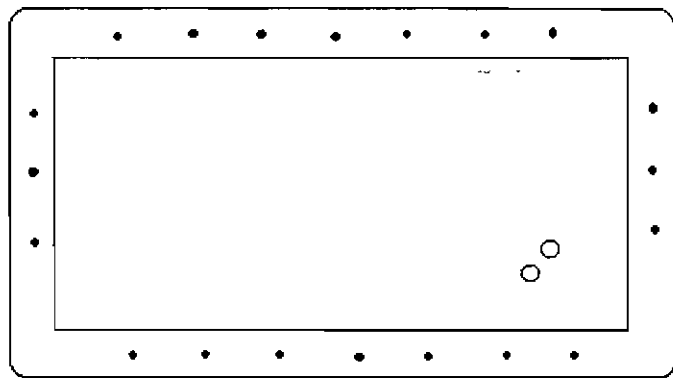


Figura 4

Así se numeran los diamantes para encontrar el número asociado al ángulo natural.

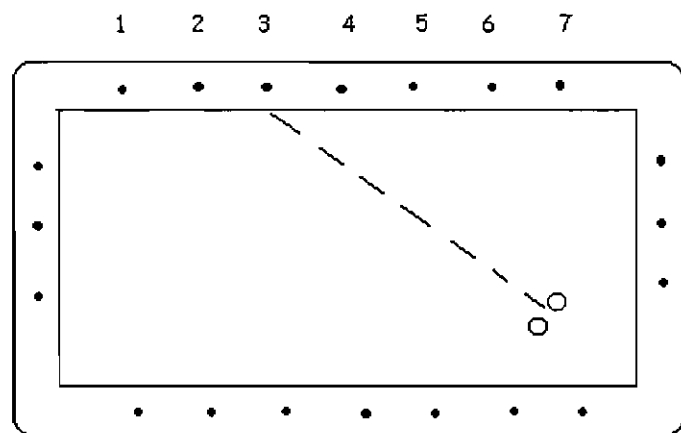


Figura 5

De modo que el ángulo natural se asocia entonces con el número 3. Luego se numeran los diamantes de otra forma para encontrar el número que se va a asociar a la posición clave, es decir la posición de la bola sombreada.

Así se numeran los diamantes para encontrar el número asociado a la posición clave.

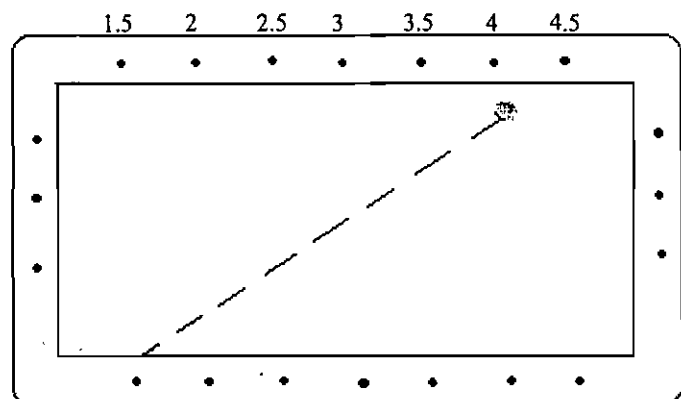


Figura 6

De modo que la posición clave en este caso es 4. Luego con una simple resta, posición clave menos ángulo natural se obtiene hacia donde se tiene que lanzar la bola: $4-3=1$. Hay que tirar hacia el diamante 1. Observemos lo que sucede:

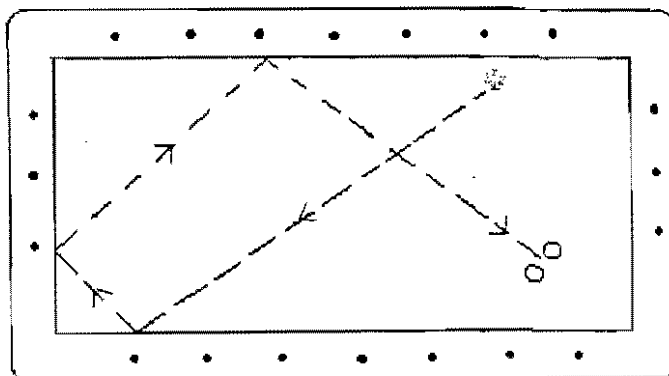


Figura 7

Bien vale hacer aquí un comentario tipo Donald ¡Parece Magia!
 Veamos otro ejemplo que aparece en la película:

1.5 2 2.5 3 3.5 4 4.5

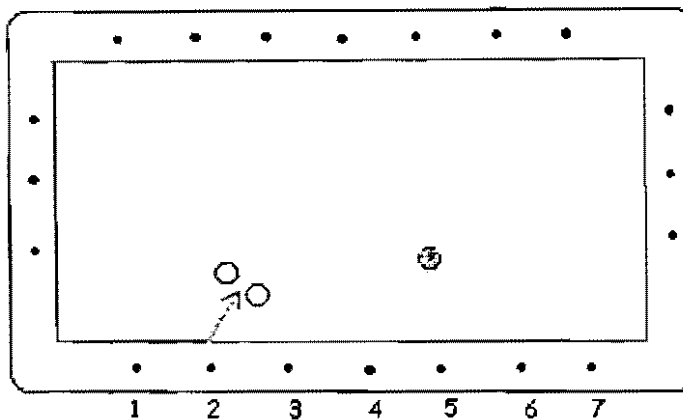


Figura 8

Ángulo natural 2. Posición clave $3\frac{1}{2}$. Tiro hacia $3\frac{1}{2} - 2 = 1\frac{1}{2}$ hay que tirar entre el diamante 1 y el 2. Veamos:

¡FUNCIONA! ¡FUNCIONA! Exclama Donald.

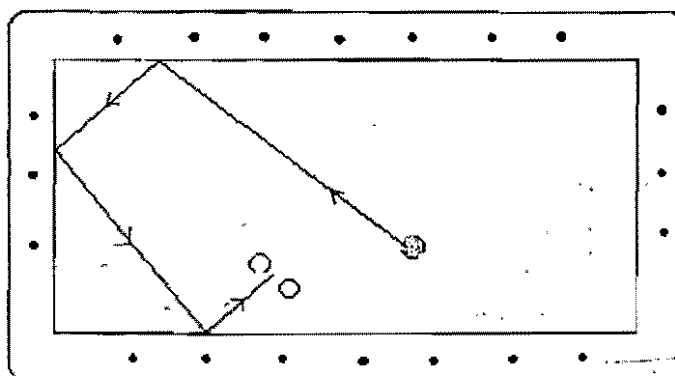


Figura 9

Lo esencial en las mesas de billar es el tipo de rebote que se tiene. Veamos ahora algunas aplicaciones más profundas de los billares.

4. Los números y los billares.

Hay muchos problemas que se resuelven usando billares adecuadamente. En este apartado vamos a ver algo de esto. Empezaremos por presentar, usando billares, el cálculo del máximo común divisor. En un artículo de Gardner [5] se describe una máquina inventada por Andrés Zavrotsky de la Universidad de los Andes en Venezuela. Esta máquina es un aparato óptico que calcula el máximo común divisor de dos números y que fue registrada el 11 de abril de 1961 con la patente: US patent 2 978 816. Para explicar este invento empezemos por hacer algunas observaciones sobre billares rectangulares cuyos lados sean números enteros. No es muy difícil probar que no importa cuales sean las dimensiones del rectángulo si la bola empieza a moverse en uno de los vértices del rectángulo, con un ángulo de 45° respecto a algunos de los lados entonces después de un número finito de rebotes llegará a alguno de los otros tres vértices. Hugo Steinhauss en su libro *Mathematical Snapshots* [13] tiene una demostración de este hecho usando técnicas de reflexión.

Una pregunta que se puede contestar elegantemente es: ¿qué vértice de los tres restantes es el que tocará la bola? Es claro que una posible solución es trazar el trayecto de la bola ¿pero qué pasa cuando tenemos una mesa de 102853 unidades por 52195 unidades?. Necesitamos argumentos más poderosos para poder responder esta pregunta. Usaremos en este caso argumentos de paridad. Supongamos que siempre empezamos en el vértice que corresponde al $(0, 0)$ en un sistema de coordenadas y que la mesa se coloca en el primer cuadrante de ese sistema de coordenadas de manera que marquemos todos los puntos con coordenadas enteras, como se puede ver en las siguientes figuras. Vamos a colorear al $(0, 0)$ y a todos los puntos alternados uno si y uno no, es decir al $(0, 2), (0, 4)$ etc... $(2, 0), (4, 0), \dots (1, 1), (1, 3) \dots$ como se ve en las siguientes figuras. Tenemos cuatro posibilidades respecto a las longitudes de los lados de los rectángulos que forman la mesa de billar, sus lados pueden ser:

impar	impar	figura 10	impar	par	figura 11
par	impar	figura 12	par	par	figura 13

Claramente la bola va a pasar únicamente por los puntos marcados en negro pues esta sale formando un ángulo de 45° . De los tres vértices donde puede llegar la bola en el caso impar-impar (Figura 10) solo el vértice superior derecho es el que está marcado; en el caso impar-par (Figura 11) el único marcado es el inferior derecho; en el caso impar-par (Figura 12) el único marcado es el vértice superior izquierdo de manera que sólo hay un caso que queda indecidible por el momento que es el caso par-par (Figura 13). Si se hacen algunos experimentos se verá que la bola puede llegar a cualquiera de los tres vértices dependiendo de la longitud de los lados.

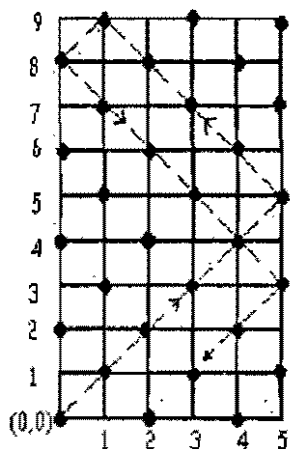


Figura 10

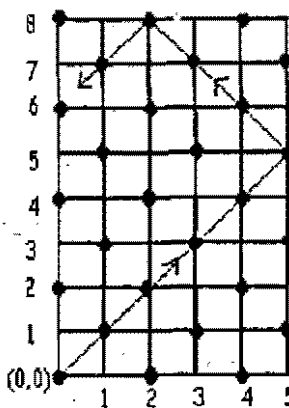


Figura 11

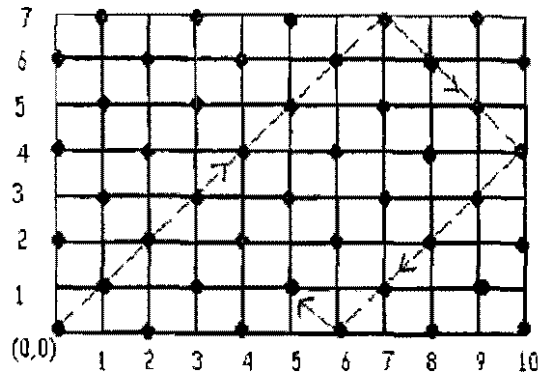


Figura 12

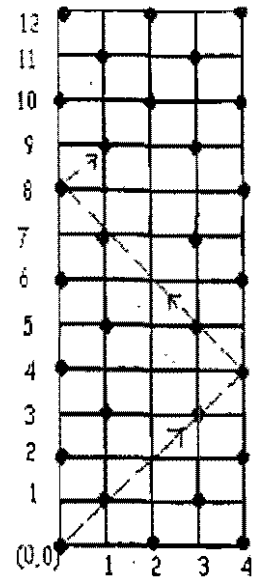


Figura 13

La máquina de Zavrotsky funciona de la siguiente manera: se envía un rayo de luz a 45° partiendo del origen 0, el rayo de luz después de un número finito de "rebotes" llegará a uno de los vértices del rectángulo. Entonces habrá sobre el lado más largo un punto iluminado A que es el más cercano a 0. Por increíble que parezca la distancia OA representa el doble del máximo común divisor. Veamos algunos ejemplos.

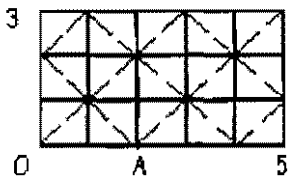


Figura 15

$$OA=2$$

$$2\text{med}(3,5)=2$$

$$\text{med}(3,5)=1$$

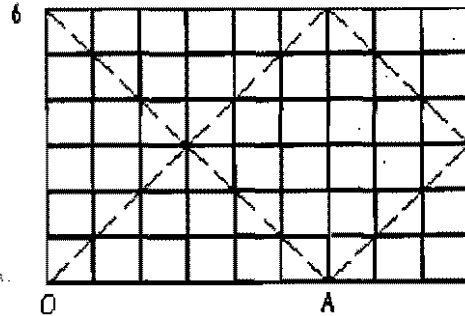


Figura 14

$$OA=6$$

$$2\text{med}(6,9)=6$$

$$\text{med}(6,9)=3$$

En general es útil "desdoblar" los billares para describir las trayectorias de las bolas y que estas viajen en línea recta. Por ejemplo el siguiente billar de la figura 16 se encuentra desdoblado en la figura 17.

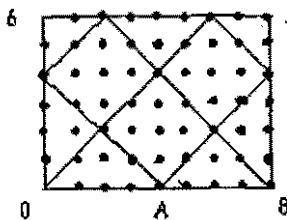


Figura 16

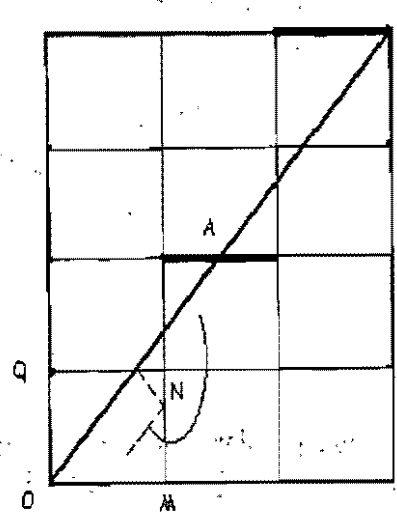


Figura 17

Como se ve para obtener la trayectoria de la figura 16 basta con doblar la figura 17 de manera que los segmentos oscurecidos coincidan con el segmento OM del rectángulo original. De manera que estamos buscando un punto, en un segmento oscurecido y el rayo de luz, que esté lo más cercano al origen pero que no coincida con 0. Un estudio detenido de la figura 17 junto con el hecho de que $2\text{mcd}(m, n) = \text{mínimo número positivo de } \{2am + 2bn\}$: a, b son enteros} hará que el lector interesado se convenza que la máquina de Zavrotsky funciona.

5. Problemas de Mini-Max.

El siguiente hecho es muy útil para resolver algunos problemas de máximos y mínimos. Denotaremos por $d(P, Q)$ la distancia de P a Q. Si P_1 , y P_2 son puntos fijos, P está en una curva lisa ℓ y $L(P) = d(P, P_1) + d(P, P_2)$, $L(P)$ alcanza un mínimo o un máximo en el punto P_0 de ℓ entonces $P_1P_0P_2$ es unatrayectoria de billar con rebote en ℓ (el rebote en ℓ es el que se hace con la rectatangente a ℓ en P_0)

Una justificación de este hecho se puede dar a través de la geometría analítica.

Si P_1 y P_2 son los focos de una elipse, una bola que sale de P_1 rebota de modo que pasa por P_2 (ver sección 7 a). Si el rebote en P_0 no es un rebote de billar, en una vecindad de P_0 la recta tangente a ℓ en P y por lo tanto ℓ misma corta a la familia de elipses con focos P_1 , y P_2 . Además $d(P_1, P) + d(P, P_2)$ es una constante para P en cada una de las elipses.

En este caso $d(P_1, P) + d(P, P_2)$ puede hacerse mayor (menor) tomando P en ℓ intersección un elipse mayor (menor) que la que pasa por P_0 y por lo tanto no se tiene un máximo(mínimo) en P_0 .

Con esta herramienta analicemos el primer problema que aparece en "Matemáticas: perejil de todas las salsas" [1] desde otro punto de vista.

Dos pueblos han comprado una bomba de agua que quieren poner a orillas del río para surtir a los dos pueblos pero quieren saber donde colocarla para usar el mínimo de tubería posible. De forma equivalente, suponiendo que el río es una línea recta, ¿en qué punto hay que colocar la bomba para que se minimice la cantidad de tubería, distancia entre un pueblo, la bomba y el otro pueblo?

Para responder a esta pregunta basta ver que si P_1 (un punto) es un pueblo, P_2 (un punto) el otro y ℓ es el río (una línea recta). Entonces el mínimo se alcanzará cuando $P_1P_0P_2$ sea un rebote de billar en la recta, es decir, que si tomamos P_2' el reflejado de P_2 respecto a ℓ y trazamos P_1P_2' la intersección con ℓ nos dará el punto P_0 que buscamos. Pues la recta ℓ bisecta a $P_2'P_0P_2$ de modo que los ángulos de entrada y rebote son iguales.

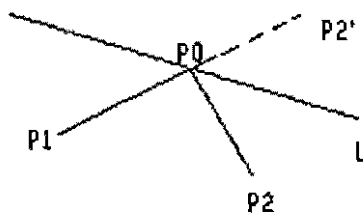


Figura 20

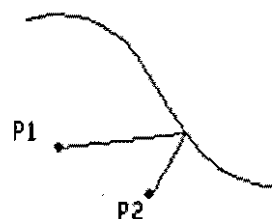


Figura 18

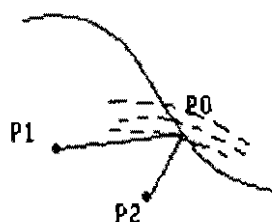


Figura 19

Veamos otro problema del mismo estilo, pensemos que ahora dos puntos P_1 y P_2 están dentro del ángulo APB. Con la condición técnica que APB sea menor de 60° ¿Cuál es el camino más corto P_1QRP_2 donde Q está en PB y R está en PA?

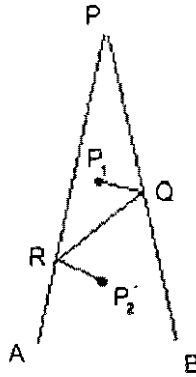


Figura 21

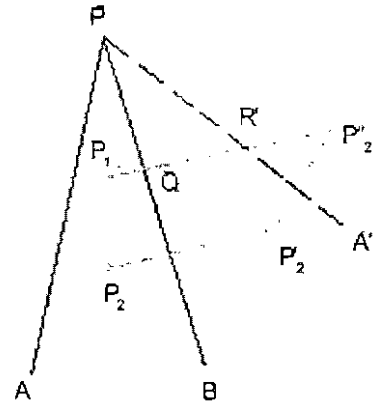


Figura 22

Nuevamente tenemos que la trayectoria $PRQP_2$ debe ser una trayectoria de billar con rebotes en R y Q. La forma de lograrlo es tomando, el simétrico de P_2 respecto a PB y el simétrico de PA respecto a PB obteniendo respectivamente P_2' y PA' y luego el simétrico de P_2' respecto a PA' obteniendo P_2'' . Ahora unimos $P_2 P_2''$ y esta recta intersecta a PB en Q y a PA' en R'. Hagamos las simetrías inversas y así R' se convierte en un punto R sobre PA. Las simetrías nos garantizan que $P_1 Q R P_2$ es una trayectoria de billar con rebotes en Q y R.

Hagamos una nueva pregunta:

Si P_1 y P_2 están dentro de un ángulo de 60° APB. ¿Cuál es la trayectoria mínima $P_1 Q_1 R_1 Q_2 R_2 P_2$ tal que las Q_i están en AP y las R_i están en BP? Seguramente algo similar Pero Pero ... No hay que ir muy rápido pues en este caso no hay una trayectoria mínima. Supongamos que existe una como la que se muestra en la figura 23. Cada rebote debe ser un rebote de billar. Por ejemplo si $P_1 Q_1 R_1$ no fuese un rebote de billar en Q_1 , con P_1 y R_1 fijos, Q_1 se podría mover hasta tener un rebote de billar reduciendo así la longitud de $P_1 Q_1 R_1$.

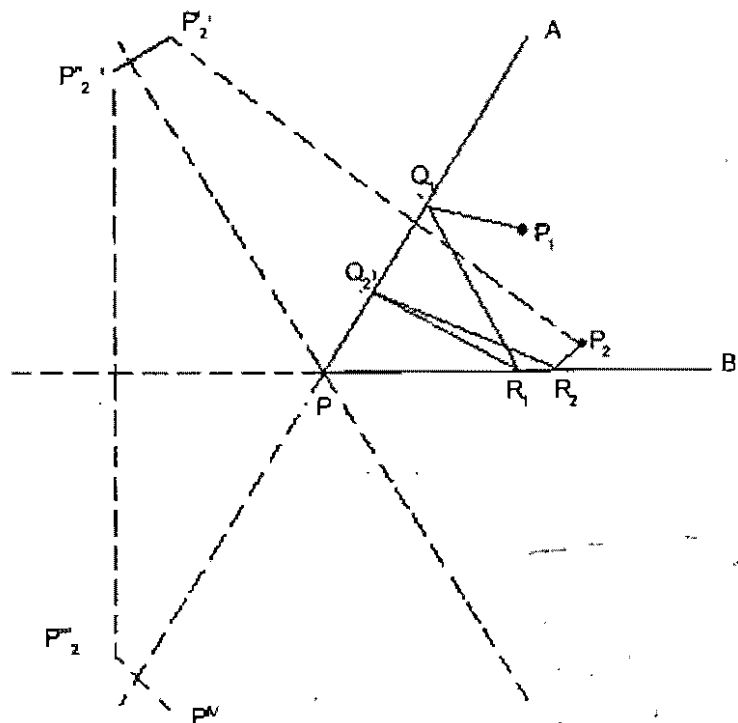


Figura 23

Como cada rebote es de billar, al hacer cuatro simetrías (o desdoblar APB cuatro veces) como se indica en la figura 23, la trayectoria $P_1 Q_1 R_1 Q_2 R_2 P_2$ se "desdobla" lo cual produce una trayectoria mínima que es la que va de P_1 a P_2^{IV} donde $P_2^I, P_2^{II}, P_2^{III}$ y P_2^{IV} son las imágenes sucesivas de P_2 al "desdoblar" la figura. Pero esto es imposible pues $P_1 P_2^{IV}$ no interseca a las semirectas que nos darán los puntos R_1 y Q_1 . No siempre el billar nos dará una solución.

Con la herramienta que hemos desarrollado se pueden resolver problemas clásicos como:

¿Existirá un triángulo de perímetro mínimo cuyos vértices estén en los tres lados de un acutángulo?

La respuesta es si y para encontrar dicho triángulo hay que empezar en un punto P cualquiera sobre uno de los lados del triángulo y usando la técnica de los rebotes de billar desdoblar el problema (ahí se utiliza el hecho de que el triángulo sea acutángulo) y obtener un triángulo de perímetro mínimo que tiene sus vértices en el punto P y los otros dos en los otros dos lados del triángulo.

Posteriormente hay que buscar el mínimo perímetro cuando P varía sobre un lado. Se puede probar, con más o menos trabajo, que se obtiene el mínimo cuando P es el pie de la altura correspondiente, obteniendo así como respuesta al problema, el triángulo pedal (el formado por los pies de las alturas). Este problema se atribuye a Schwartz y Polya en [9] da una solución similar a lo que aquí hemos descrito.

6. Polígonos regulares y billares.

No es raro que figuras geométricas con distintas características tengan propiedades especiales respecto a las trayectorias de tipo billar. De hecho las trayectorias de tipo billar se pueden usar para caracterizar ciertas clases de figuras.

El sentido intuitivo que tenemos de lo que es una trayectoria de tipo billar ya lo hemos usado en algunos problemas y esa intuición se puede hacer tan precisa como se desee hasta incluso llegar a una definición como la siguiente:

Sea K un conjunto cerrado acotado convexo con interior no vacío que se puede pensar en \mathbb{R}^2 o incluso en \mathbb{R}^n , con una frontera suave a pedazos ∂K . La bola de billar es un punto en el interior de K que se mueve a velocidad constante en línea recta hasta que choca con un punto $P \in \partial K$. Si P es un punto regular (donde la frontera es suave), la bola de billar rebota en la dirección determinada por la reflexión sobre el único hiperplano soporte en P , en el caso \mathbb{R}^2 esta es la recta tangente a la curva en P . Para lo que vamos a hacer a continuación no necesitaremos reglas de "rebote" en los puntos singulares de ∂K (donde se pegan las partes suaves de la frontera) y además vamos a trabajar únicamente en \mathbb{R}^2 .

La órbita generada por una bola de billar es una trayectoria del tipo billar. Una órbita de tipo billar es periódica si la órbita forma un polígono cerrado con un número finito de punto en ∂K .

En la figura 24 tenemos un triángulo equilátero y hemos ilustrado una trayectoria tipo billar.



Figura 24

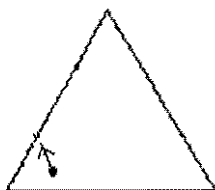


Figura 25

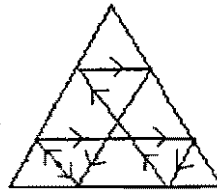


Figura 26

En el examen de selección para la Olimpiada Rioplatense se planteó que los alumnos de menos de 13 años demostraran que si el billar es un triángulo equilátero y la trayectoria inicial de la bola es paralela a alguno de los lados (figura 25) entonces se obtiene una trayectoria de tipo billar periódica (figura 26). Muchos niños no sólo hicieron el dibujo, sino que dieron argumentos convincentes, razonados, para llegar a la conclusión de que la trayectoria es periódica, como ya se comentó en la sección 3.

Observemos que en este billar (triángulo equilátero), si la bola empieza en el punto medio de uno de los lados y se dirige hacia el punto medio del lado adyacente entonces la trayectoria tipo billar recorre un triángulo equilátero (figura 28).

En realidad esta propiedad es cierta para cualquier polígono regular de n lados. Si la trayectoria empieza en el punto medio de alguno de los lados de un polígono regular de n lados y esta se dirige al punto medio del lado adyacente entonces la trayectoria de tipo billar recorre periódicamente (después de n "rebotes") un polígono regular de n lados. En las figura 27, 28, 29 tenemos los casos $n = 4, 3, 6$ y la prueba es muy sencilla.

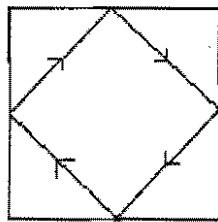


Figura 27

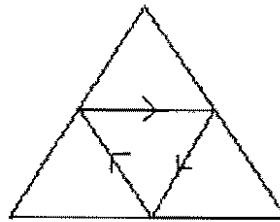


Figura 28

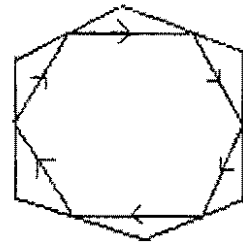


Figura 29

Lo maravilloso de esta observación es que el recíproco es también cierto con lo cual se pueden caracterizar a los poligonos regular. La prueba que vamos a realizar aquí es la que dieron De Temple y Robertson [4] en 1981. El enunciado completo y preciso de esta caracterización esta en el siguiente teorema.

Teorema: Un polígono convexo y cerrado P en el plano es regular si y sólo si P contiene una trayectoria de tipo billar P' que es semejante a P .

Para probar esto empezaremos por un lema técnico de manera que al hacer la demostración del teorema no nos distraigamos en asuntos menores y la prueba se entiende mejor.

Lema: Si x_1, \dots, x_n son números reales y se define $y_i = \frac{1}{2} (x_{i-1} + x_i)$, $i = 1, \dots, n$ (tomando x_0 como x_n).

Entonces y_1, y_2, \dots, y_n son una permutación de x_1, \dots, x_n si y sólo si $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Demostración: Si $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ es obvio.

Ahora veamos la otra parte. Sea $x = \min \{x_1, \dots, x_n\}$ si $(x_{i-1} > x)$ ó $(x_i > x)$ ó $(x_{i-1} > x, y x_i > x)$ entonces $y_i = \frac{1}{2} (x_{i-1} + x_i) > x$.

De modo que el número de y_i que son iguales a x es por lo menos una menos que el número de x_j que son iguales a x . Esto implica que la única posibilidad para que y_1, y_2, \dots, y_n sean una permutación de x_1, \dots, x_n es que todas las x_j sean iguales.

Veamos ahora la prueba del teorema.

Sea P un polígono regular y unamos los puntos medios consecutivos de los lados de P para obtener así el polígono P' es fácil ver P' cumple con las propiedades requeridas. Ahora veamos la propiedad inversa, supongámonos que P' es periódico y semejante a P . P' tiene sus vértices en lados sucesivos de P . Veamos primero que los ángulos de P' son todos iguales a los de P .

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ los ángulos de P en orden cíclico contrario a las manecillas del reloj y sean $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n$ los ángulos de P' en orden cíclico contrario a las manecillas del reloj donde α'_i está entre α_i y α_{i+1} , como se indica en la figura.30.

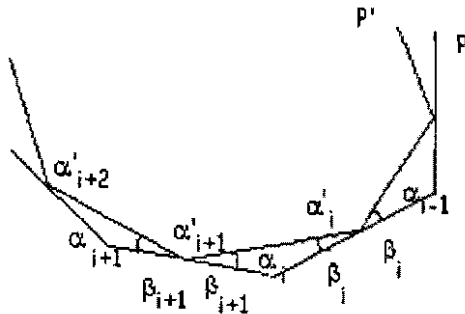


Figura 30

Observemos que como P' se obtiene con una trayectoria tipo billar entonces los ángulos β_i marcados en la figura son efectivamente iguales. Observemos que

$$\alpha_i + \beta_i + \beta_{i+1} = \pi \quad (1)$$

y

$$\alpha'_i + 2\beta_i = \pi \quad (2)$$

$$\text{Además } \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \alpha'_1 + \dots + \alpha'_n = (n-2)\pi \quad (3)$$

por ser P y P' polígonos de n lados.

De (2) calculamos $\beta_i = \frac{\pi - \alpha'_i}{2}$ al sustituir en (1) tenemos $\alpha_i + \frac{\pi - \alpha'_i}{2} + \frac{\pi - \alpha'_{i+1}}{2} = \pi$ es decir $\alpha_i = \frac{\alpha'_{i+1} + \alpha'_i}{2}$ (por supuesto con α'_{n+1} igual a α'_1).

Por ser P' semejante a P es claro que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ son una permutación de $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n$, de manera que por ser las α_i y las α'_i números reales al usar el lema tenemos que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$$

y por (3) todos son iguales a $\left(\frac{n-2}{n}\right)\pi$.

Nos queda ver que los lados del polígono P tienen lados iguales. Para esto ob-

servemos primero que cada $\beta_i = \frac{\pi - \alpha'_i}{2} = \frac{\pi - \left(\frac{n-2}{n}\right)\pi}{2} = \frac{\pi}{n}$ de modo que en la figura 31

los triángulos que aparecen son isósceles y tienen dos ángulos de $\frac{\pi}{n}$ y otro de $\left(\frac{n-2}{n}\right)\pi$. Denotemos ahora por ℓ_i a la longitud del lado comprendido entre los ángulos de α_{i+1} y α_i .

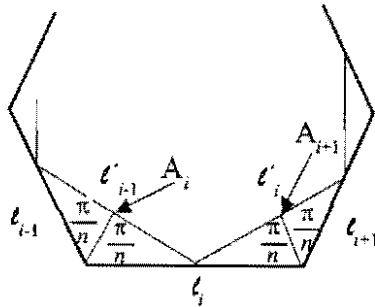


Figura 31

El lado ℓ_i es la suma de las hipotenusas de los triángulos cuyo ángulo recto está

en A_i y A_{i+1} de modo que como $\cos \frac{\pi}{n} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$ $\cos \frac{\pi}{n} = \frac{\frac{1}{2} \ell'_{i-1}}{\text{hipotenusa de } A_i}$
 y $\cos \frac{\pi}{n} = \frac{\frac{1}{2} \ell'_i}{\text{hipotenusa de } A_{i+1}}$.

De modo que $\ell_i = \text{hipotenusa de } A_i + \text{hipotenusa de } A_{i+1} = \frac{\ell'_{i-1} + \ell'_i}{2 \cos \frac{\pi}{n}}$ (5)

Al ser los polígonos P y P' semejantes tenemos que cada lado de P' es k veces alguno de P es decir que k es el coeficiente de semejanza entre P y P' para alguna i y j se tiene $\ell'_j = k\ell_i$ de modo que usando (5) tenemos

$$\ell'_j = k\ell_i = \frac{k}{2 \cos \frac{\pi}{n}} (\ell'_{i-1} + \ell'_i) \quad (6)$$

Si sumamos todos los lados obtenemos

$$\sum_{j=1}^n \ell'_j = \sum_{i=1}^n \frac{k}{2 \cos \frac{\pi}{n}} (\ell'_{i-1} + \ell'_i) \quad (\text{por supuesto con } \ell'_0 = \ell'_n)$$

de modo que $\sum_{j=1}^n \ell'_j = \frac{k}{2 \cos \frac{\pi}{n}} \left(\sum_{j=1}^n \ell'_{j-1} + \sum_{j=1}^n \ell'_j \right) = \frac{k}{2 \cos \frac{\pi}{n}} \left(\sum_{j=1}^n \ell'_j + \sum_{j=1}^n \ell'_j \right)$

$$= \frac{k}{2 \cos \frac{\pi}{n}} \left(2 \sum_{j=1}^n \ell'_j \right) = \frac{k}{2 \cos \frac{\pi}{n}} \sum_{j=1}^n \ell'_j$$

de manera que $1 = \frac{k}{2 \cos \frac{\pi}{n}}$ que al sustituirlo en (6) se obtiene

$$\ell'_j = \frac{1}{2}(\ell'_{i-1} + \ell'_i)$$

Observemos que ℓ'_j corresponde a una ℓ'_i así que los ℓ'_j son una permutación de las ℓ'_i y usando nuevamente el lema tenemos;

$$\ell'_1 = \ell'_2 = \dots = \ell'_i \quad \text{y por} \quad (5) \quad \ell_1 = \ell_2 = \dots = \ell_n$$

Obteniendo así un polígono regular.

Hemos trabajado en el plano y gracias a las trayectorias de tipo billar hemos caracterizado a los polígonos regulares así que es lógico preguntarse qué pasa con los cinco poliedros regulares, ¿habrá alguna caracterización de estos poliedros usando trayectorias de tipo billar? Martín Gardner [5] tiene algunos resultados en esas líneas. Sin embargo no vamos a hablar aquí de ellos.

7. Caracterizaciones de clases de figuras a través de trayectorias tipo billar.

En la sección anterior hemos visto una caracterización de los polígonos regulares. En este apartado vamos a caracterizar de manera similar otro tipo de figuras.

a. Cónicas.

Si el billar tiene forma de elipse y tiramos la bola desde un foco, la bola pasará por el otro foco. El círculo tiene la misma propiedad, en este caso los dos focos coinciden con el centro.

Para la parábola una bola que sale del foco se refleja a lo largo de una recta paralela al eje de la parábola o inversamente, cualquier trayectoria paralela al eje de la parábola pasa por el foco. Esta peculiaridad de la parábola fue usada por Arquímedes para concentrar los rayos solares en los barcos enemigos que llegaban al puerto de Alejandría.

Para una hipérbola una bola que sale de un foco rebotará a lo largo de una trayectoria cuya extensión pasa por el otro foco.

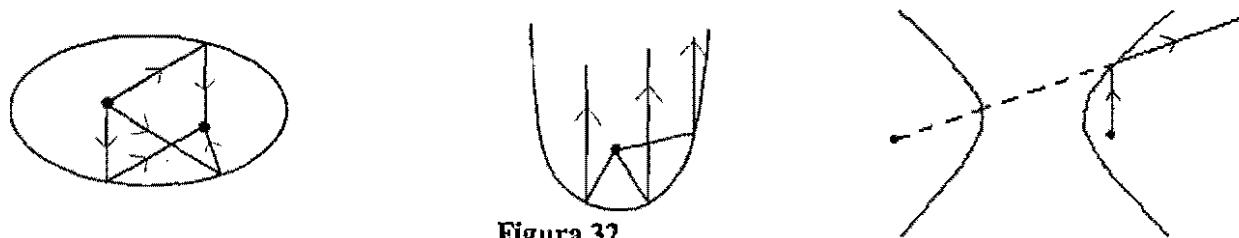


Figura 32

Veamos que si P_1 y P_2 son dos puntos interiores a la curva convexa cerrada y lisa \mathcal{C} tal que cualquier trayectoria de tipo billar que sale de P_1 pasa por P_2 entonces \mathcal{C} es una elipse con focos P_1 y P_2 .

Esto junto con la observación sobre las elipses que hicimos al principio de esta sección nos da una caracterización de la elipse:

Teorema

Una curva cerrada convexa lisa ℓ con dos puntos interiores P_1 y P_2 es una elipse con focos P_1 y P_2 si y sólo si toda trayectoria de tipo billar que sale de P_1 pasa por P_2 .

No haremos aquí una demostración formal, sin embargo daremos argumentos para esto. Si tenemos una elipse en los libros de geometría analítica se encuentra la prueba de que toda trayectoria que sale de P_1 pasa por P_2 .

Veamos la propiedad inversa. Para esto consideremos todas las elipses con focos P_1 y P_2 si la curva ℓ no es un elemento de esa familia entonces debe de existir un punto P en ℓ donde la tangente a ℓ es diferente de la tangente a la elipse que pasa por P y tiene a P_1 y P_2 como focos. (figura 33)

Pero sabemos que la elipse tiene una única tangente en P tal que la trayectoria que pasa por P_1 “rebota” en P de forma que pasa por P_2 . De modo que en P , ℓ y la elipse tienen la misma tangente por lo que ℓ tiene que ser una elipse con focos P_1 y P_2 .

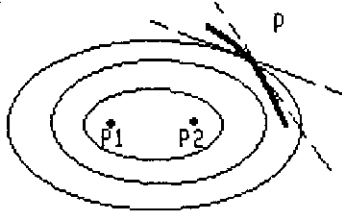


Figura 33

b. Curvas de ancho constante:

Consideremos una curva ℓ cerrada convexa y suave a pedazos. En cada dirección la figura limitada por ℓ se encuentra entre dos rectas paralelas que “tocan” a ℓ (rectas tangentes), dos paralelas soportes a ℓ .

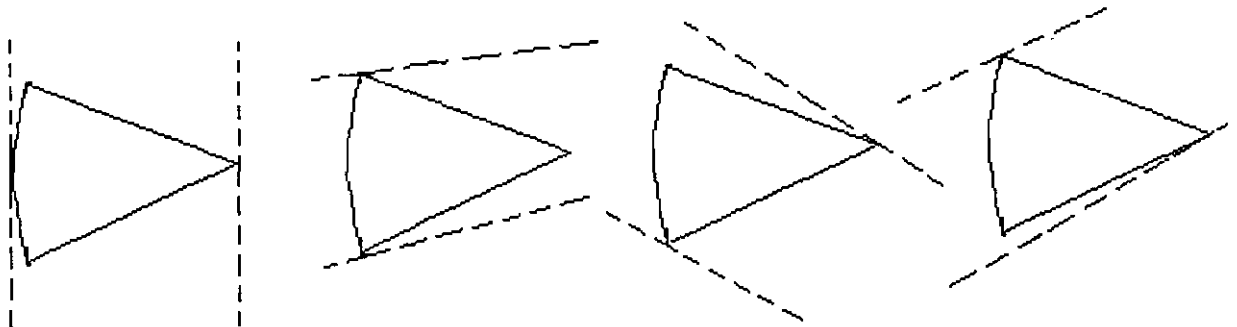


Figura 34

Dependiendo de la dirección es la distancia que existe entre esas dos paralelas. A la máxima distancia entre esas dos paralelas se le llama ancho de la figura.

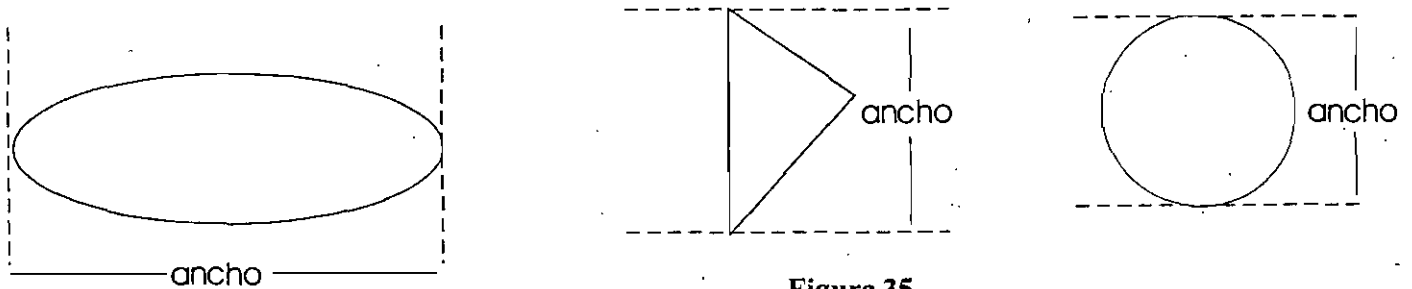


Figura 35

Hay una infinidad de figuras que tienen el mismo ancho en todas las direcciones, es decir que son de ancho constante.

Tal vez después del círculo la más famosa de estas es el triángulo de Reuleaux. El triángulo de Reuleaux se construye de la siguiente manera; empecemos con un triángulo

equilátero y con el compás en un vértice tracemos un sector de círculo con radio el lado y que vaya desde un vértice hasta el otro.

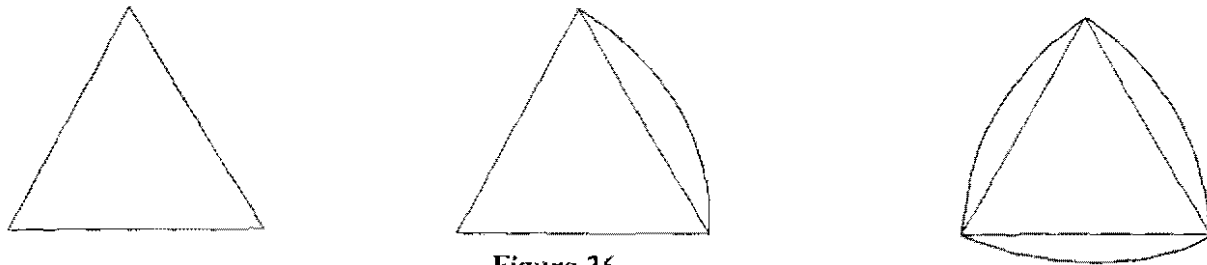


Figura 36

Repetimos esta operación con cada uno de los vértices del triángulo.. No es muy difícil convencerse que la figura así obtenida es de ancho constante. El triángulo de Reuleaux no tiene frontera suave pero es muy fácil a partir de él hacer una figura de ancho constante con frontera suave, alargando los lados del triángulo la misma longitud y construyendo los arcos como se indica en la figura 37.

Como ya lo indicamos antes, hay un número infinito de figuras de ancho constante y existe una elegante caracterización de estas figuras.

Una curva suave ℓ es una curva de ancho constante si y sólo si toda trayectoria de tipo billar que “rebota” hacia la derecha (izquierda) en ℓ sigue siempre “rebotando” hacia la derecha (izquierda). Es decir que las curvas de ancho constante son precisamente las curvas que tienen una frontera en las que es imposible tirar una bola que haga una trayectoria en forma de Z.

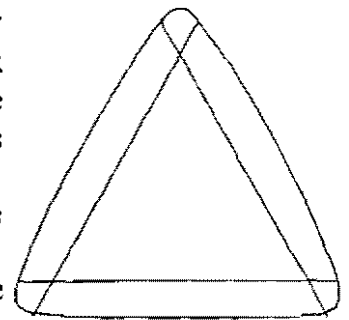


Figura 37

Esta preciosa propiedad es una joya del razonamiento creada por Sine y Kreinovic que vale la pena leer en su versión original [12].

8. Conclusiones.

La belleza y la variedad de los resultados que se han visto aquí podrían hacer pensar que casi todo tiene una explicación por medio de billares. Aunque no se llegue a tal optimismo, lo que si se puede afirmar es que todavía quedan muchos problemas matemáticos relacionados con los billares, en particular en lo que respecta a la dinámica de estos [6], [14].

Aquí se han visto verdaderas joyas del razonamiento matemático en el contexto de los billares y este es el momento para justificar el título de este trabajo. No se pretende que se enseñen billares, no, esto es sólo un pretexto para enseñar a razonar y eso es lo que no se está enseñando, el razonamiento matemático. La enseñanza del razonamiento matemático es lo que los matemáticos llamamos matemáticas y debe enseñarse independiente del contexto, usualmente este se trata de hacer a través de la geometría pero hay muchos otros contextos, como el que aquí se ha presentado. Aquí hemos hecho una selección de problemas de manera que se tenga una muestra del área a todos niveles.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Berlanga R., Bosch C., Rivaud J.: “Matemáticas: el perejil de todas las salsas” Fondo de Cultura Económica, serie La Ciencia para todos 1999.

[2] Concurso de Primavera de Matemáticas 1999. Examen primer nivel. AMC, SEP-Conacyt.

- [3] Competencia Cotorra de Matemáticas 1999. AMC, SEP-Conacyt.
- [4] DeTemple D., Robertson J.: A billiard Path Characterization of Regular Poligons, *Math. Mag.*, Vol. 54, no2 (March 1981), pp. 73-75.
- [5] Gardner M., *Martin Gardner's Sixth Book of Mathematics Games from Scientific American*, Freeman, San Francisco, 1971.
- [6] Kozlov V., Treshchev D.: *Billiards*, vol 89, *Translations of Mathematical Monographs*, American Mathematical Society.
- [7] Olimpiada Río Platense. Examen de selección 1999. AMC.
- [8] Po Leung Kuk, 3rd. *Primary Mathematics World Contest*. 1999.
- [9] Polya G., *Induction and Analogy in Mathematics*, Priceton University Press, 1954.
- [10] Robertson J. *Mathematical Billiards*, *Mathematics Notes from WSU*, vol 25, no. 1,2, 1982.
- [11] Shamos M.: *The Origin of the Term Pool*, *The Billiard Archive*, Pittsburgh P.A., <http://www.sound.net/~jimbur/pplofkc/origin.html>.
- [12] Sine R., Kreinovic V., *Remarks on billiards*, *Amer. Math. Monthly*, 86(1979), 204-206.
- [13] Steinhauss H., *Mathematical Snapshots*, 3rd. ed. New York-. Oxford University Press 1968.
- [14] Tabachnikov S.: *Billiards, Panorama et synthèses*, no. 1, *Société Mathématique de France* 1995.
- [15] Walt Disney: *Donald en el País de las Matematicas*, película de 1964.