NOTAS DE CLASE

Criterio de divisibilidad en los enteros

Fecha de recepción: Julio, 2000

Educación Matemática
Vol. 12 No. 3 diciembre 2000
pp.82-93

Armando Sepúlveda López, José Gerardo Tinoco Ruíz
Escuela de Ciencias Físico Matemáticas *"Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez"*
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
asepulve@zeus.ccu.umich.mx ; jtinoco@zeus.ccu.umich.mx

RESUMEN: *Presentamos en este trabajo un criterio de divisibilidad que, a diferencia de los usuales, es aplicable de manera general para averiguar la divisibilidad de un entero entre cualquier primo diferente de 2 y 5. La aplicación de este criterio es muy simple, lo cual lo hace atractivo para su enseñanza en el nivel medio. Para su demostración no se requiere de la utilización de conocimientos y conceptos avanzados.*

ABSTRACT: *In this work we present a divisibility criterium. Unlike the usual criteria, this can be applied in a general way to check divisibility of a number by any prime different of 2 and 5. Practical aplication of this criterium is quite simple; this makes it suitable for its teaching in medium-level school. Moreover, its proof does not require higher concepts.*

1. Introducción

En las diferentes ramas de las matemáticas existen resultados importantes que aglutinan y sirven de sustento a otros resultados de la misma rama o de otras. Tenemos, por citar algunos, el Teorema Fundamental del Cálculo que pone en evidencia la relación existente entre el problema del cálculo de áreas y el trazo de tangentes a curvas; es decir, entre el Cálculo Integral y el Cálculo Diferencial; el Teorema Fundamental del Álgebra, el cual indica que todo polinomio con coeficientes complejos puede ser expresado como producto de factores lineales, y a un nivel más elemental existe el llamado Teorema Fundamental de la Aritmética, el cual asegura que cualquier número entero se puede escribir de manera única, como producto de números primos.

De hecho, el estudio de los números primos se inicia muy temprano en la educación matemática escolarizada. A lo largo de ella se trabaja con este concepto a diferentes grados de profundidad, dependiendo del nivel de estudios y de la carrera, y directa o indirectamente se estudia el concepto de divisibilidad y el Teorema Fundamental de la Aritmética, cuyo aprendizaje y maduración contribuye al entendimiento de otros contenidos cuya estructura es más general y compleja.

En el contexto de la Teoría de la Aritmética y del concepto de divisibilidad, se aprende desde la educación elemental -o al menos sería deseable que se hiciera- a averiguar cuáles son los factores primos de un número entero, para ello se dan algunas reglas o "criterios" los cuales se manejan de manera mecánica como "recetas", sin preocuparse de

explicar por qué funcionan, lo cual, de hecho, sería imposible e inadecuado de hacer en los primeros acercamientos. Así, aprendimos fácilmente el criterio del 2 y el criterio del 5; esto es, reglas para saber cuándo un número entero es divisible entre 2 ó 5. También se introducen con relativa facilidad los criterios del 3 y quizás del 11; pero los problemas empiezan con los criterios del 7, del 13, del 17, etc., ya sea porque su presentación es más elaborada o bien porque aparecen enunciados de manera muy artificiosa y, en ocasiones, sin explicación lógica alguna, lo que hace que varios educadores prefieran no presentarlos a sus alumnos. En efecto, el hecho de que cada criterio represente un conjunto de pasos a seguir, que aparentemente no tiene nada que ver con los correspondientes a otro criterio, hace difícil el aprendizaje de estos. Por ejemplo, imagínese el impacto que le causaría a un estudiante el pedirle que aplique el "criterio" del 3, del 11 y del 79, para averiguar si dividen a otro número dado.

En este trabajo presentamos una proposición general que sirve para establecer el criterio de divisibilidad entre cualquier número primo, a excepción del 2 y del 5 los cuales, por otra parte, no requieren de gran explicación debido a su sencillez. La característica principal de este criterio, además de su generalidad, es que es muy simple. Es de mencionarse que tuvimos conocimiento de este criterio, durante una conferencia dictada por la Dra. María Alicia Aviño Díaz en Noviembre de 1994, dentro de las actividades académicas que regularmente promueve el Departamento de Matemática Educativa de nuestra Universidad; no se expuso en ese momento el nombre del autor de este criterio, ni tampoco la demostración del mismo, la cual no requiere más que de las nociones fundamentales sobre el anillo de los enteros. Nosotros hemos enunciado de manera general el teorema y hemos realizado la demostración. Aclaramos que este resultado se cita en algunos textos pero entre líneas, medio escondido, aplicado a casos particulares o como partes de un ejercicio; no se plantea de manera general. (Baldor, 1996, pp.183-184; Vorobiov, 1975).

Por las características de este artículo, introducimos la notación básica para divisibilidad, así como los resultados necesarios para la comprensión de la demostración del teorema. Estos resultados se enuncian sin demostración, las cuales se puede consultar en casi cualquier libro de Álgebra Superior; también presentamos algunos de los criterios comúnmente conocidos, con su prueba tradicional. (Perelman, 1975, Niven y Zuckerman, 1969). Enseguida enunciamos el criterio y damos ejemplos de su aplicación, para finalmente presentar la demostración. Esperamos que lo aquí escrito sea de utilidad para los lectores.

2. Antecedentes

Desde la época de oro de los griegos (S. VII - S. II A.C.) a los números primos se les asignaba un lugar distinguido dentro de las matemáticas; determinar si un número entero es primo o no, era una cuestión que ocupaba parte del estudio de cualquier matemático; de hecho, este problema siguió ocupando las mentes de distinguidos matemáticos a lo largo de la historia del desarrollo matemático; científicos de la talla de Gauss y Euler fueron estudiosos del tema. La primera manera sistemática de encontrar números primos es debida a Eratóstenes (276-194 A.C.), quien usaba lo que ahora se conoce como "la criba de Eratóstenes". Ésta consiste en lo siguiente:

Si se requiere encontrar todos los primos menores o iguales que cierto número dado N, se escriben en una lista todos los números menores o iguales que N, empezando con el 2. El primer número en la lista es el 2, el cual es primo; éste se escribe aparte y se tachan todos los múltiplos de 2, incluyendo a él mismo. De la lista restante el primer número es 3,

el cual es primo y se escribe aparte; se tachan todos los múltiplos de 3, incluyéndolo a él. El procedimiento continúa de esta manera hasta llegar al primo que es menor o igual que N. Por ejemplo si $N = 100$, el procedimiento nos da la lista de primos menores o iguales que 100:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 \text{ y } 97.$$

3. Definiciones

A continuación enlistamos las definiciones básicas pertinentes al tema de divisibilidad en los enteros. Entenderemos que cuando se hable de números, se trata de enteros, a menos que explícitamente se diga otra cosa.

1. Se dice que el número a es divisible por el número b, si existe un número c tal que $a = bc$. En este caso también se acostumbra decir que "b divide a a", "a es dividido por b", o que "a es múltiplo de b". Esto se denota por $b \mid a$.
2. El número entero positivo $a > 1$ es primo, si sus únicos divisores son 1 y él mismo. Un entero que tiene otros divisores positivos, además de 1 y él mismo, se denomina compuesto.

4. Dos resultados básicos

Las siguientes propiedades se enuncian sin demostración, éstas se pueden consultar en la mayoría de los libros de álgebra superior o de teoría de números.

Proposición 1. *Sean los enteros a, b y c. $c|a$ y $c|b$, si y sólo si $c|\ (ma+nb)$, para cualesquiera enteros m y n.*

Proposición 2. *Sea p un número primo, si $p|ab$ y a no es divisible entre p, entonces b es divisible entre p.*

5. Criterios de divisibilidad

Un criterio de divisibilidad sirve para determinar si un número dado N es divisible entre otro número. Veamos primeramente cómo se obtienen los criterios de divisibilidad entre 2 y entre 5, los cuales, como ya mencionamos, quedan excluidos de la proposición general. Esto también nos servirá para introducir la notación que aún nos hace falta.

En nuestra notación decimal, al escribir que

$$N = a_n\ a_{n-1} \ldots\ldots a_2\ a_1\ a_0$$

con $a_i \in \{0,1,2,\ldots,9\}$, $i = 0, 1, \ldots, n$; en realidad estamos abreviando el hecho de que

$$N = a_n\, 10^n + a_{n-1}\, 10^{n-1} + \ldots\ldots + a_2\, 10^2 + a_1\, 10 + a_0$$

en particular, a_0 es la cifra de las unidades de N.

Proposición 3 (Criterios del 2 y del 5). *Para cualquier entero positivo N,*

1. *N es divisible entre 2 si y sólo si la cifra de las unidades de N es par (0, 2, 4, 6 u 8).*
2. *N es divisible entre 5 si y sólo si la cifra de las unidades de N es 0 ó 5.*

Demostración. Si

$$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_o$$

entonces

$$N = 10\,(a_n 10^{n-1} + a_{n-1} 10^{n-2} + \ldots\ldots + a_2 10 + a_1) + a_o$$

en el lado derecho 2 y 5 dividen a

$$10\,(a_n 10^{n-1} + a_{n-1} 10^{n-2} + \ldots\ldots + a_2 10 + a_1) \quad \textit{porque } 10 = 2 \times 5,$$

entonces la proposición 1 nos dice que 2 ó 5 dividen a N si y sólo si dividen a a_o, lo que nos demuestra las dos afirmaciones.

Ahora presentamos los criterios de divisibilidad del 3 y del 11 en la versión tradicional, las cuales tienen la característica de que se enuncian y aplican de manera sencilla.

Proposición 4 (Criterio del 3). *Dado el número entero positivo N, entonces N es divisible entre 3 si y sólo si la suma de sus cifras es divisible entre 3.*

Demostración. Escribamos ahora N de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
N &= a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_o \\
&= a_o + 10\, a_1 + 10^2 a_2 + \ldots\ldots + 10^{n-1}\, a_{n-1} + 10^n a_n \\
&= a_o + 9\, a_1 + a_1 + 99 a_2 + a_2 + \ldots + \underbrace{99\ldots9}_{n-1 \text{ nueves}} a_{n-1} + a_{n-1} + \underbrace{99\ldots9}_{n \text{ nueves}} a_n + a_n \\
&= 9a_1 + 99a_2 + \ldots\ldots + 99\ldots9 a_{n-1} + 99\ldots9\, a_n + a_o + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n \\
&= 9(a_1 + 11a_2 + \ldots + 11\ldots1 a_{n-1} + 11\ldots1 a_n) + (a_o + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n)
\end{aligned}$$

como 3 divide a $9\,(a_1 + 11a_2 + \ldots\ldots + 11\ldots1\, a_{n-1} + 11\ldots1\, a_n)$ pues $9 = 3 \times 3$, la proposición 1 nos dice que 3 divide a N si y sólo si 3 divide a $(a_o + a_1 + a_2 + \ldots\, a_{n-1} + a_n)$, la cual es precisamente la suma de las cifras de N.

Proposición 5 (Criterio del 11). Un número es divisible entre 11 si y sólo si la diferencia entre la suma de sus cifras colocadas en lugares pares y la suma de las cifras colocadas en lugares impares, es divisible entre 11.

Demostración. La demostración consiste en ir formando diferencias de la manera siguiente:

$$N = a_o + 10\, a_1 + 10^2 a_2 + \ldots\ldots + 10^{n-1}\ a_{n-1} + 10^n a_n$$

$$= a_o + 10\,(a_1 + 10\ a_2 + \ldots\ldots + 10^{n-2}\ a_{n-1} + 10^{n-1} a_n)$$

consideremos la diferencia

$$D_1 = N - 11(a_1 + 10\, a_2 + \ldots\ldots + 10^{n-2}\ a_{n-1} + 10^{n-1} a_n)$$

$$= a_o - a_1 - 10(a_2 + 10\, a_3 + \ldots\ldots + 10^{n-3}\ a_{n-1} + 10^{n-2} a_n)$$

Despejando N: $N = D_1 + 11(a_1 + 10a_2 + \ldots\ldots + 10^{n-2}a_{n-1} + 10^{n-1}a_n)$ (A)

Por la proposición 1, 11 divide a N si y sólo si 11 divide a D1.

Ahora llamemos D2 a

$$D_2 = D_1 + 11(a_2 + 10\, a_3 + \ldots\ldots + 10^{n-3}\ a_{n-1} + 10^{n-2} a_n)$$

$$= a_o - a_1 + a_2 + 10(a_3 + 10\, a_4 + \ldots\ldots + 10^{n-4}\ a_{n-1} + 10^{n-3} a_n)$$

Sustituyendo en (A), tenemos que

$$N = D_2 - 11(a_2 + 10a_3 + \ldots\ldots + 10^{n-2}a_n) + 11(a_1 + 10a_2 + \ldots\ldots + 10^{n-1}a_n) \qquad \text{(B)}$$

entonces, 11 divide a N si y sólo si 11 divide a D_2.

Definamos D_3 como

$$D_3 = D_2 - 11(a_3 + 10\, a_4 + \ldots\ldots + 10^{n-4} a_{n-1} + 10^{n-3} a_n)$$

$$= a_o - a_1 + a_2 - a_3 - 10(a_4 + 10\, a^5 + \ldots\ldots + 10^{n-5}\ a_{n-1} + 10^{n-4} a_n)$$

Sustituyendo en (B) tenemos que

$$N = D_3 + 11(a_3 + \ldots + 10^{n-3}a_n) - 11(a_2 + \ldots + 10^{n-2}a_n) + 11(a_1 + \ldots + 10^{n-1}a_n) \qquad \text{(C)}$$

entonces, 11 divide a N si y sólo si 11 divide a D_3.

De esta manera, llegaremos a

$$D_n = D_{n-1} + 11(a_n)$$

$$= a_o - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots\ldots + (-1)^{n-1} a_{n-1} + (-1)^n a_n$$

y sustituyendo en la expresión anterior, equivalente a (C),

$$N = D_n - 11\,(a_n) + 11(a_{n-1} + 10a_n) - \ldots\ldots + 11(a_1 + \ldots\ldots + 10^{n-1} a_n).$$

Por lo tanto, 11 divide a N si y sólo si 11 divide a Dn, lo cual demuestra la proposición; es decir:

dado $N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$

11 divide a N si y sólo si 11 divide a $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots\ldots + (-1)^{n-1} a_{n-1} + (-1)^n a_n$.

Otro de los criterios más o menos conocido, es el criterio del 7, el cual aparece en Aritmética de A. Baldor (1996, p.183). Ahí se presenta como una receta y tiene precisamente la forma y aplicación de la proposición general de este trabajo. El enunciado dice:

"Un número es divisible por 7 cuando separando la primera cifra de la derecha, multiplicándola por 2, restando este producto de lo que queda a la izquierda y así sucesivamente, da cero o múltiplo de 7".

Veamos pues que este criterio del 7, el del 3 y el del 11, son casos particulares del siguiente teorema.

6. Criterio de divisibilidad entre un primo diferente de 2 y 5

La base del criterio es el siguiente

Teorema 1. Sea N entero positivo cuya representación es

$$N = a_n\ a_{n-1}\ \ldots\ a_2\ a_1\ a_o, \quad \text{con } a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\};\ i = 0, 1, \ldots, n;$$

y p *un primo diferente de* 2 *y* 5. *Sea* q *positivo tal que*

$$10 \mid (pq - 1) \tag{1}$$

y

$$k = \frac{pq - 1}{10} \tag{2}$$

Sean ahora

$$M_1 = \frac{N - a_0}{10} \tag{3}$$

y

$$N_1 = M_1 - Ka_0 \tag{4}$$

Entonces, $p \mid N$ *si y sólo si* $p \mid N_1$.

Antes de dar la demostración, conviene aclarar con algunos ejemplos lo que nos dice el teorema.

Ejemplo 1. Sea $N = 95361$ y $p = 3$. q será tal que al multipicarlo por p, dé como resultado un número cuya cifra de las unidades sea 1; éste es el significado de (1). Para nuestro ejemplo, q puede ser cualquier número terminado en 7, el más pequeño de ellos es el 7 mismo. Tomaremos $q = 7$. En este caso

$$qp - 1 = (7)(3) - 1 = 20$$

Así pues k = 2. Dicho de otra manera, k es lo que resulta al quitarle la cifra de las unidades al producto pq = 21; esto es lo que nos dice (2).

Ahora,

$$M_1 = \frac{95361-1}{10} = 9536$$

o sea que M_1 se obtiene de N quitándole la cifra de las unidades; este es el significado de (3). Finalmente, (4) nos dice que

$$N_1 = M_1 - ka_0 = 9536 - (2)(1) = 9534$$

y la afirmación del teorema es que 95361 es divisible entre 3 si y sólo si 9534 lo es.

Nótese que hemos reducido el problema a uno más simple, pero quizá todavía no alcanzamos a percibir directamente por división, "a pie", que 9534 sea divisible entre 3. Aplicando el teorema a éste número, tendremos que:

3 divide a 9534 si y sólo si 3 divide a 953 - (2) (4) = 945

Nuevas aplicaciones del teorema nos dicen que

3 divide a 945 si y sólo si 3 divide a 94 - (2) (5) = 84

y esto, si y sólo si 3 divide a 8 - (2) (4) = 0.

Como 0 es divisible entre 3, se concluye que 3 divide a 95361.

Antes de dar otro ejemplo, cabe hacer las siguientes observaciones:

1. Para cada primo p, diferente de 2 y 5, se puede encontrar el entero positivo q del teorema. Esto es claro, ya que tales primos terminan en 1, 3, 7 ó 9. Los correspondientes valores de q deben terminar en 1, 7, 3 ó 9.
2. Como ya se vió, q no está determinado de manera única. En el ejemplo anterior, también hubieran servido 17, 27, 37 y en general cualquier entero terminado en 7. Sin embargo, el elegir un q más grande nos hubiera complicado los cálculos. Se recomienda entonces elegir q lo más pequeño posible.
3. Todo el proceso, una vez determinado k, se puede escribir de una manera abreviada y sistemática. En nuestro ejemplo, los cálculos se pueden arreglar de la siguiente manera:

$$N = 95361,\ p = 3$$

$$q = 7,\ pq = 21, \quad \text{por lo tanto} \quad k = 2$$

	9	5	3	6	1
-				2	
	9	5	3	4	
-			8		
	9	4	5		
-	1	0			
	8	4			
-	8				
	0				

Ejemplo 2. Veamos si 206567 es divisible entre 29.

$$N = 206567, p = 29$$

$$q = 9, pq = (29)(9) = 261, \quad \text{por lo tanto} \quad k = 26$$

	2	0	6	5	6	7
-			1	8	2	
	2	0	4	7	4	
-		1	0	4		
	1	9	4	3		
-		7	8			
	1	1	6			

La aplicación del algoritmo se frena cuando el producto de las unidades del último número obtenido, por *k*, da un número mayor que lo que queda a la izquierda. En este caso: 6 (26) > 11; y entonces se checa directamente por división, "a pie", si 29 divide a 116.

Como 29 divide a 116, concluimos que también divide a 206567.Pasemos ahora sí, a la demostración del teorema.

Demostración del teorema. Primeramente observemos que, como hicimos notar anteriormente, si *p* es distinto de 2 y de 5, se puede encontrar un entero positivo *q* (de hecho una infinidad), tal que se cumpla (1); esto es, *pq* tiene como cifra de las unidades al 1.

Entonces, al calcular k de acuerdo con (2), se tiene que

$$pq = 10k + 1$$

Ahora (3) y (4) nos llevan a

$$N_1 = M_1 - ka_0$$

$$= \frac{N - a_0}{10} - ka_0$$

$$= \frac{N - (10k + 1)a_0}{10}$$

$$= \frac{N - pqa_0}{10}$$

Esto es,

$$10N_1 = N - pqa_0 \tag{5}$$

Supongamos que p divide a N, entonces p divide a todo el lado derecho de (5) y de acuerdo con la proposición 1, debe dividir al lado izquierdo ($10\,N_1$); y como no divide a 10, la proposición 2 nos dice que debe dividir a N_1.

Recíprocamente, supongamos que p divide a N_1, escribimos (5) como

$$N = 10N_1 + pqa_0 \tag{6}$$

y observemos que, en este caso, p divide al lado derecho de (6), nuevamente debido a la proposición 1, entonces p divide a N.

Por lo tanto, se tiene demostrado que p divide a N si y sólo si divide a N_1, que es lo que afirma el teorema. Como puede observarse, la demostración es completamente elemental.

Con el fin de que resulte atractivo para su enseñanza en el nivel medio, podemos escribir el criterio de divisibilidad de la manera siguiente:

"Para averiguar la divisibilidad de un número N entre el primo p distinto de 2 y 5, realícese el siguiente proceso:

1. Multiplíquese p por el dígito q, escogido de tal manera que la cifra de las unidades de pq sea 1. Sea k el número obtenido al omitir de pq esta última cifra.
2. Multiplíquese k por la última cifra de N y réstese esto del número que resulta de N, al ignorar la última cifra. Llámese N_1 al resultado de la resta.
3. Si N_1 es lo suficientemente pequeño para poder determinar, directamente por división, si es divisible entre p, el proceso termina. N será divisible entre p si y sólo si N_1 lo es. En caso de que aún no sea fácil decidir sobre la divisibilidad de N_1, repítase el paso 2, pero ahora con N_1 en lugar de N, lo que producirá N_2. Continúese el proceso hasta que alguno de los N_i sea lo suficientemente simple para decidir directamente su divisibilidad entre p."

Si bien es cierto que ésta no deja de ser una receta, la diferencia con las relativas a otros criterios, es que funciona de manera general para todos los primos diferentes de 2 y de 5, y es perfectamente factible de ser enseñada.

Es importante comentar que al Teorema 1 podemos hacerle una ligera variación, de la siguiente manera: dado el número primo p, ahora se busca q de modo que el producto pq termine en nueve (en lugar de 1), definiendo a k como la decena siguiente a este producto, M_1 se establece de la misma manera, pero ahora $N_1 = M_1 + ka_0$; resultando otro teorema que puede ser útil sobre todo cuando la k elegida en el Teorema 1, no es cómoda para realizar las operaciones al aplicar el algoritmo. La variación la hemos encerrado en círculo en el siguiente

Teorema 2. Sea N entero positivo cuya representación es

$$N = a_n\ a_{n-1} \ldots a_2\ a_1\ a_o, \qquad \text{con } a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\};\ i = 0, 1, \ldots, n;$$

y p *un primo diferente de 2 y 5. Sea* q *positivo tal que*

$$10 \mid (pq \oplus 1) \qquad (1)$$

y

$$k = \frac{pq \oplus 1}{10} \qquad (2)$$

Sean ahora

$$M_1 = \frac{N - a_0}{10} \qquad (3)$$

y

$$N_1 = M_1 \oplus Ka_0 \qquad (4)$$

Entonces, $p \mid N$ *si y sólo si* $p \mid N_1$.

La demostración se sigue exactamente de la del Teorema 1, con el cambio en los signos que han sido indicados. **Apliquemos los dos teoremas a un mismo número**, en los ejemplos siguientes.

Ejemplo 3. Determinar si 41 divide a 19993035.

a) Aplicando el **teorema 1**: $N = 19993035$, $p = 41$

Aquí $q = 1$, $pq = (41)(1) = 41$, por lo tanto $k = 4$

```
   1 9 9 9 3 0 3 5
-            2 0
   1 9 9 9 2 8 3
-            1 2
   1 9 9 9 1 6
-          2 4
   1 9 9 6 7
-        2 8
   1 9 6 8
-      3 2
   1 6 4
-  1 6
 ---------------
   0
```

y como 41 divide a 0, entonces se cumple que 41 divide a 19993035.

b) Aplicando el **teorema 2**: $N = 19993035$, $p = 41$

Aquí $q = 9$, $pq = 369$, por lo tanto $k = \frac{pq+1}{10} = \frac{370}{10} = 37$ (ahora k por la última cifra se suma)

$$
\begin{array}{r}
1\,9\,9\,9\,3\,0\,3\,\underline{5} \\
+\quad 1\,8\,5 \\
1\,9\,9\,9\,4\,8\,\underline{8} \\
+\quad 2\,9\,6 \\
2\,0\,0\,2\,4\,\underline{4} \\
+\quad 1\,4\,8 \\
2\,0\,1\,7\,\underline{2} \\
+\quad 7\,4 \\
2\,0\,9\,\underline{1} \\
+\quad 3\,7 \\
\hline
2\,4\,6
\end{array}
$$

Como 41 divide a 246, entonces se cumple que 41 divide a 19993035.

Ejemplo 4. Veamos si 148264306, es divisible entre 97.

a) Aplicando el **teorema 1**: $N = 148264306$, $p = 97$

$q = 3$, $pq = (97)(3) = 291$, por lo tanto $k = 29$

$$
\begin{array}{r}
1\,4\,8\,2\,6\,4\,3\,0\,\underline{6} \\
-\quad 1\,7\,4 \\
1\,4\,8\,2\,6\,2\,5\,\underline{6} \\
-\quad 1\,7\,4 \\
1\,4\,8\,2\,4\,5\,\underline{1} \\
-\quad 2\,9 \\
1\,4\,8\,2\,1\,\underline{6} \\
-\quad 1\,7\,4 \\
1\,4\,6\,4\,\underline{7} \\
-\quad 2\,0\,3 \\
1\,2\,6\,\underline{1} \\
-\quad 2\,9 \\
\hline
9\,7
\end{array}
$$

Y como 97 es divisible entre 97, entonces 148264306 es divisible entre 97.

b) Aplicando el **teorema 2**: $N = 148264306$, $p = 97$

Aquí $q = 7$, $pq = (97)(7) = 679$, por lo tanto $k = 68$ (ahora k por la última cifra se suma)

ejemplos incluían familiares ejemplos de ecuaciones y de gráficas (éstas en menor cantidad). La figura 5 representa estas ideas. De nuevo, las flechas proveen la dirección para leer los enunciados incluidos.

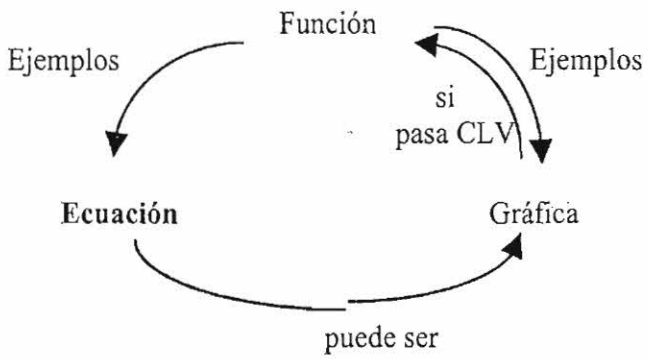

Fig. 5. Red de ideas asociadas con dos representaciones funcionales en un alumno de algebra universitaria.

Antes de pasar a las conclusiones, queremos hacer un breve comentario sobre los tres participantes en este estudio. Comparados con Zafu, los otros dos alumnos tenían más debilidades en sus concepciones funcionales. Uno de los alumnos, Sparky, empezó el curso sólidamente pero a medida que pasó el tiempo las ideas se volvieron circulares, llenas de contradicciones y sin mucho crecimiento. Hubo una característica comun en los tres alumnos. Este curso es el único requisito matemático para obtener un grado universitario. En los tres casos, los participantes expresaron su deseo de aprobar el curso y esto se tornó en el único objetivo en tomar esta clase. La parte afectiva dominó a la parte cognitiva al grado de crear un total desinterés en asimilar el contenido del curso. Los alumnos sólo querían aprobar los exámenes y con ello aprobar el curso. Este factor afectivo influye la forma en que los alumnos asimilan el contenido de los cursos y no debe ignorarse especialmente en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Conclusiones

Este estudio se avocó a investigar la concepción de dos representaciones de funciones, las gráficas y las ecuaciones, y sus las relaciones. Este enfoque tiene ventajas y desventajas. Una ventaja es ganar mayor claridad en cómo los alumnos perciben estas ideas. Otra ventaja es el potencial de este enfoque para evaluar el aprendizaje de los alumnos. Entre las desventajas se encuentra el ignorar otras representaciones funcionales que les alumnos desarrollan. En general, los participantes mostraron ideas entre las ecuaciones y las gráficas. Estas ideas variaron en grado entre los alumnos pero fueron débiles, contradictorias y a veces sin relación. Los datos también sugieren que factores afectivos (tales como el curso de álgebra universitaria sea un curso terminal) influye fuertemente la manera en que los alumnos retienen e integran el contenido matemático. Los particpantes en el estudio no parecían estar motivados en asimilar las ideas discutidas y por ello las debilidades en sus redes funcionales se produjeron por la motivación. Más aún, un curso de diez semanas proporciona pocas oportunidades para integrar esas ideas. No se puede negar que ganamos conocimiento sobre concepción de la representación gráfica y la representación