

---

## Propuesta de diseño y desarrollo de actividades implementadas computacionalmente

Fecha de recepción: Diciembre, 1999

*Educación Matemática*  
Vol. 13 No. 2 agosto 2001  
58-77

**Juana Contreras**

Universidad de Talca  
Instituto de Matemática y Física, Chile  
jcontreras@pehuenche.otalca.cl

**Claudio del Pino**

Universidad de Talca  
Instituto de Matemática y Física, Chile  
cdelpino@pehuenche.otalca.cl

---

**Abstract:** *The progressive incorporation of the computer to the teaching of mathematics and the development of a great variety of software with mathematical purposes have influenced teachers of all levels to feel compelled to give special attention to the type of adequate teaching situations that get reinforced with the use of these technological resources.*

*In this work, a proposal of incorporating the computer through computational teaching modules and the methodology to design them are presented, and they are based on the results of several investigations and experiences related to the teaching of mathematics assisted by computers and on our own work carried out in our university.*

**Resumen:** *La progresiva incorporación del computador a la enseñanza de la matemática y el desarrollo de una gran variedad de software de propósitos matemáticos, han incidido a que educadores de todos los niveles se vean impulsados a preocuparse de manera especial sobre el tipo de situaciones didácticas apropiadas, que se potencian con el uso de estos recursos tecnológicos.*

*En este trabajo, se presenta una propuesta de incorporación del computador a través de módulos pedagógicos computacionales (MPC) y una metodología para diseñarlos, basados en resultados de diversas investigaciones y experiencias relacionadas con la enseñanza de la matemática asistida por computador y las propias realizadas en nuestra universidad.*

### 1. Antecedentes

Numerosas experiencias y variadas investigaciones relacionadas con la incorporación del computador y la integración de las nuevas tecnologías computacionales en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, se han estado desarrollando en las últimas dos décadas. Entre los principales resultados de las investigaciones realizadas, se pueden mencionar los siguientes:

- ♦ *A través de todos los niveles de habilidad y grados, los estudiantes que usan calculadoras y computadores han demostrado mejorar su actitud hacia la matemática y han mejorado la confianza en su habilidad matemática (Arnold, 1996).*

- ◆ *Estudiantes que usan tecnología, tienden a mostrar mayor persistencia y efectividad al tratar de resolver problemas, y aparecen más dispuestos a asumir riesgos (Bennett, 1999).*
- ◆ *Las lecciones que incorporan tecnología son más efectivas cuando los estudiantes trabajan cooperativamente, que cuando lo hacen individualmente o en ambientes competitivos (Bennett, 1999).*
- ◆ *Las calculadoras y sobre todo los computadores son poderosos instrumentos que permiten por un lado aliviar a los alumnos en los cálculos tediosos, y por otro lado, y mucho más importante, explorar situaciones y conceptos, descubrir relaciones o semejanzas, modelar fenómenos, probar o refutar conjeturas, crear y reinventar una matemática (Papert, 1980).*
- ◆ *La visualización de una gran variedad de representaciones gráficas en dos y tres dimensiones, aprovechando las potencialidades gráficas que ofrece la tecnología computacional, permite a los educandos posibilidades para explorar situaciones y descubrir resultados por sí mismos (Tall, 1992).*

La continua evaluación del impacto del computador en la enseñanza de la matemática junto con el desarrollo de una gran variedad de software de propósitos matemáticos, ha contribuido a que educadores de todos los niveles tengan actualmente un camino más expedito para incorporar el computador a la enseñanza de la matemática (Arnold 1995). Este hecho los ha llevado, entre otros aspectos, a repensar los contenidos programáticos y a generar nuevas metodologías de enseñanza de la matemática (Ball, 1986; Graf, 1992; Arnold, 1995; Kaput, 1992; Murakami, 1986).

Entre los software más utilizados para la enseñanza de matemática en los primeros niveles de la enseñanza superior se encuentran: el Maple, el Mathematica, el Matlab, el MathCad, el *DERIVE* y el Theorist. Tales programas se caracterizan principalmente por ser interactivos y por tener grandes capacidades de cálculo numérico y simbólico, y posibilidades gráficas y de programación, ofreciendo oportunidades únicas para desarrollar interesantes actividades, especialmente en temas de Álgebra y Cálculo, involucrando activamente a los estudiantes en su propio aprendizaje (Arnold, 1995; Kaput, 1992). Estos realzan los rasgos más positivos de la técnica computacional, colocando al usuario al control de la tecnología, estimulando la exploración y el descubrimiento, extendiendo y apoyando las capacidades matemáticas del mismo (Arnold, 1996).

Una gran mayoría de educadores con experiencia en la enseñanza de la matemática asistida por el computador, concuerdan en que la tecnología no resuelve los problemas clásicos del proceso de enseñanza-aprendizaje (Cornu, 1992; Gómez, s/f) y que en particular, hay temas en los cuales el computador tiene muy poco o nada que aportar. *El computador, como todo recurso de apoyo al proceso de enseñanza y aprendizaje, puede constituirse en un efectivo auxiliar didáctico si se le utiliza correctamente en el tiempo preciso y si el usuario sabe lo que tiene que hacer con él* (Ball, 1986).

Con el propósito de lograr un trabajo más eficiente incorporando el computador al proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, (Burkhardt, 1986; Flanders, 1988) propician desarrollar actividades *guiadas* y *dirigidas* a objetivos específicos, ya que actividades construidas bajo esta modalidad permiten focalizar la atención del alumno y concentrar mejor su esfuerzo.

Aceptando las consideraciones anteriores, en particular el hecho de seleccionar temas del currículo que sean potenciados con el uso de esta tecnología, induce a que nuestra propuesta de implementación computacional sea esencialmente *modular*.

En este trabajo se presenta una metodología para diseñar y desarrollar *módulos pedagógicos computacionales*, implementados en un *software de propósitos matemáticos*, de modo que puedan ser usados en una clase, en un laboratorio o libremente por el alumno.

## 2. Módulos Pedagógicos Computacionales

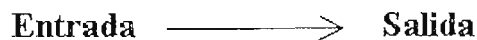
Se entiende por *módulo pedagógico computacional* a un conjunto de actividades secuenciadas y dirigidas, en un tema específico, implementado computacionalmente en un software de propósitos matemáticos, de preferencia con elementos integradores (cálculo numérico, algebraico y gráfico) que ofrece el software.

Dependiendo del tipo de actividades que comprende un módulo, éstos se pueden clasificar en: *módulos teóricos* y *módulos prácticos*.

- ♦ *Módulo teórico (MT)* es aquel cuyas actividades tienen como propósito *iluminar* o esclarecer los puntos más relevantes del tema en cuestión (conceptos, definiciones, teoremas, propiedades, etc.), enfatizando los aspectos en los cuales el computador sea una herramienta más eficaz.

Estos se caracterizan por ser específicos y de preferencia cortos, tener una estructura rígida y ser dirigidos, tratando de guiar al alumno a espacios claves de la materia que comprende.

El esquema que caracteriza las actividades de un *MT* es:



- ♦ *Módulo práctico (MP)*, llamado también de *exploración*, es aquel que comprende actividades de ejercitación, de aplicación, de resolución de problemas. Estos se asemejan a lo que habitualmente conocemos como guías de ejercicios, cuyo propósito es: conjeturar, explicar, explorar, descubrir, utilizando los diferentes recursos que ofrece el software.

Estos se caracterizan por tener una estructura mucho más abierta, contemplar actividades de tipo exploratorio, guiar al estudiante a una exploración más eficaz y sin mayores distractores.

El esquema que caracteriza las actividades de un *MP* es



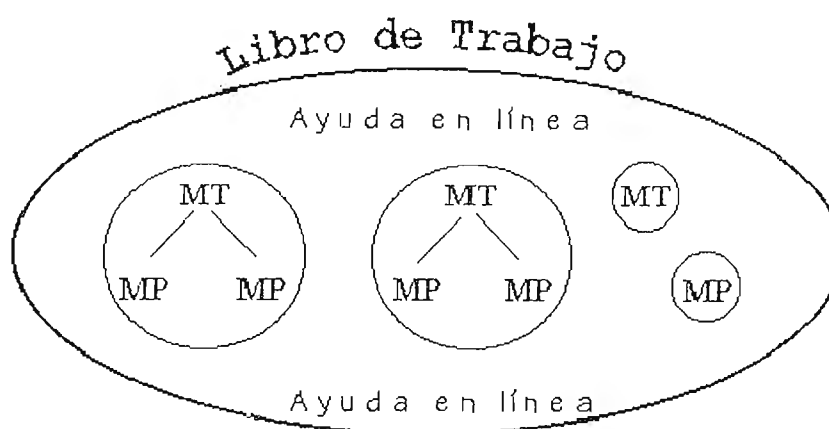
En las actividades de éstos *módulos* se plantean preguntas, se proponen problemas abiertos o de tipo conjetural con el propósito de incentivar la exploración y el descubrimiento, se estimula a que el alumno desarrolle ejemplos propios despertando una actitud más participativa y experimental de su parte.

Al implementar un *módulo* computacionalmente, es habitual que el problema matemático presentado al alumno involucre conceptos con los cuales no está familiarizado, o bien no recuerda en su totalidad, y que no maneje con facilidad los comandos y funciones que ofrece el software en el tema. Con el fin de lograr un trabajo más eficiente por parte del alumno se incorpora lo que llamamos la *ayuda en línea*.

La *ayuda en línea* es un documento escrito a modo de hipertexto, incorporado en el software si éste lo permite, que contiene la materia más relevante del tema y la descripción y uso de comandos y funciones que ofrece el software, relacionados con el tema del módulo. La *ayuda en línea* permite, en parte, que el alumno realice actividades de auto-instrucción.

Un conjunto de *módulos* junto con la *ayuda en línea* definen el llamado *Libro de Trabajo*.

Un *Libro de Trabajo* comprende diversas situaciones de aprendizaje organizadas en *módulos* pedagógicos computacionales, constituido principalmente por tres elementos: *ilustrativos (MP)*, de *ejercitación (MT)* y de *contenido (ayuda en línea)*.



### 3. Metodología para diseñar y desarrollar *módulos*

La incorporación del computador al currículo de un curso a través de *módulos pedagógicos computacionales* implementados en un software de propósitos matemáticos, considera una etapa esencial correspondiente a la selección de los contenidos susceptibles de ser potenciados con el uso de esta tecnología. Como resultado de este estudio, se establecen las temáticas que comprenderán los diferentes *Libros de Trabajos* del curso y los tópicos que se desarrollarán en los *módulos* de cada *Libro*.

Considerando los resultados de experiencias realizadas, y las de nuestro grupo de trabajo en relación a la implementación de actividades asistidas por el computador, se logró establecer la *estructura* de un módulo, una metodología para diseñar y desarrollar módulos y una propuesta de implementación computacional.

Respecto de la estructura de un módulo, éste debe contemplar los siguientes elementos:

- Título y tema del módulo
- Descripción
- Objetivos
- Pre-requisitos de contenido y de software

- Tiempo de aplicación
- Sugerencias metodológicas (para el profesor)
- Actividades
- Ayuda en línea: sobre contenidos y sobre el software

Para diseñar un módulo, es necesario considerar los distintos ambientes que ofrece el software seleccionado (ambiente de entrada y salida, ambiente de texto, ambiente oculto), y los elementos que componen un *MPC* (antecedentes, desarrollo de actividades, ayuda en línea, archivos especiales). El diseño de un *MPC* se puede obtener, completando resumidamente las columnas del siguiente recuadro:

Antecedentes	Ambiente de texto Ayuda en línea		Ambiente de Entrada y salida	Ambiente Oculto
	De contenidos	De software		
Tema	Conceptos	Comandos y Funciones del software	Desarrollo de Actividades	Archivos ilustrativos
Objetivos				Archivos utilitarios
Pre-requisitos: de contenidos y de software	Resumen de Contenidos			
Descripción				
Tiempo				

Luego se procede a desarrollar las actividades que comprende el módulo, cuya implementación computacional debiera ser tal que el software no constituya una barrera entre el alumno y la matemática. Con este fin, se propone desarrollar actividades guiadas, incorporando e integrando a éstas los comandos y funciones que ofrece el software, a medida que se requieran.

Respecto de la *ayuda en línea*, se puede elaborar una ayuda global para todos los módulos del *Libro de Trabajo*, o bien construir *ayudas en línea* específicas para cada módulo, anexadas a éstos.

#### 4. Experiencia concreta

El objetivo central que ha motivado nuestro trabajo es integrar la moderna tecnología computacional en el currículo de matemática, a nivel de primer año universitario, de manera que sea un verdadero aporte en su proceso de enseñanza y aprendizaje. Por esta razón, se pretende:

- Innovar y mejorar la docencia en matemática.
- Incrementar en nuestros estudiantes el nivel de comprensión de los conceptos más relevantes.

- Lograr una renovada motivación por la asignatura.

Los *MPC* han sido generados teniendo presente las siguientes ideas:

- El interés central es la matemática, no el computador ni el software.
- El alumno debe ser un actor de su aprendizaje.
- El aprendizaje colaborativo, enriquece el estudio en matemática.

Consecuentemente, en las actividades incorporadas en los *MPC*:

- Su énfasis está en usar el computador para ayudar a los estudiantes a extraer conclusiones que se deriven de la información que éste entrega.
- Son presentadas bajo un esquema que guía al estudiante, dejando los espacios necesarios para que él anote, tanto los resultados parciales importantes como el resultado final y su interpretación, cuando corresponda.
- Que la escritura de las actividades se implementen a modo de hipertexto. En nuestro modelo se ha concretado de la siguiente manera:
  - ⇒ palabras claves de contenido y de software **ennegrecidas**, cuyas explicaciones están contenidas en la ayuda en línea
  - ⇒ referenciadas con una nota al pie de página
- Son trabajadas en grupos de dos estudiantes, cada uno con su computador.

Considerando que el estudiante necesita del trabajo tradicional en el aprendizaje de la parte esencial de un concepto y que no siempre tendrá a su disposición un computador, las actividades no abandonan en trabajo tradicional “a mano”.

#### 4.1 Implementación computacional

Considerando las diversas modalidades que se han explorado para incorporar el computador al contexto ya señalado, se optó por desarrollar *módulos* computacionales implementados en el software *DERIVE*, trabajados en sesiones de talleres en un laboratorio de computación. En las sesiones de taller, una sesión semanal, el trabajo de los estudiantes es asistido por el profesor y un ayudante, y complementado por una sesión de práctica libre apoyada por un ayudante.

A continuación se presentan tres *módulos prácticos*, versiones resumidas, aplicados en un curso de Matemática. Su implementación computacional se ha realizado en *DERIVE* integrando los comandos y funciones en las actividades a medida que se requieran, y la Ayuda en línea a través de un documento escrito.

#### 4.2. Ejemplos de módulos pedagógicos computacionales.

##### Módulo 1: Representación gráfica de funciones polinomiales

**Descripción:** Por inspección gráfica de un número considerable de representaciones gráficas de funciones polinomiales asociadas a elementos de una familia de polinomios en

términos de un parámetro, se determina el o los polinomios de la familia que cumplen una determinada condición.

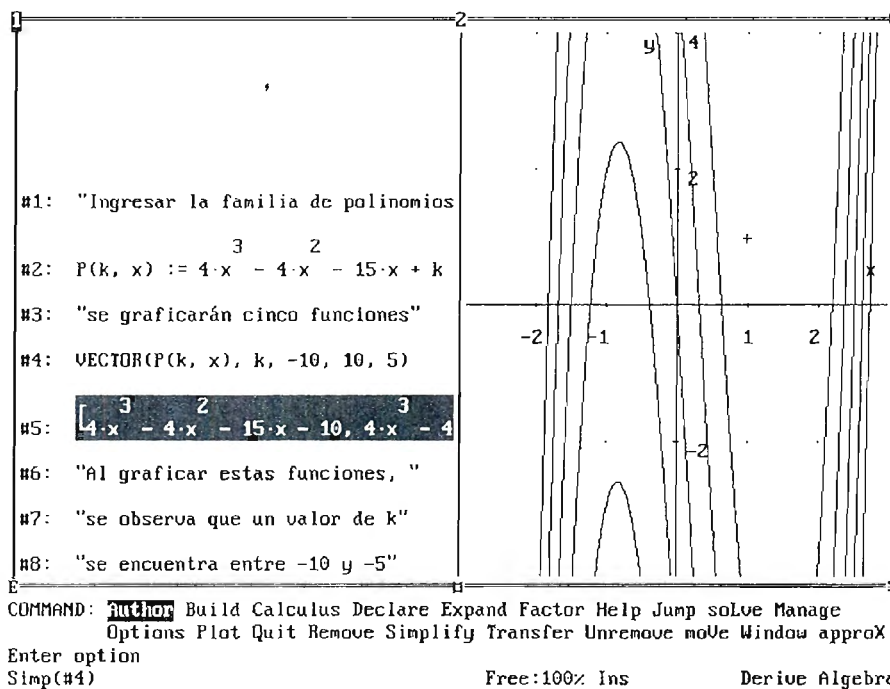
**Descripción:** Por inspección gráfica de un número considerable de representaciones gráficas de funciones polinomiales asociadas a elementos de una familia de polinomios en términos de un parámetro, se determina el o los polinomios de la familia que cumplen una determinada condición.

**Problema:** Dada la familia de polinomios  $p_k(x) = 4x^3 - 4x^2 - 15x + k$  con coeficientes reales, en términos del parámetro real  $k$ , determinar todos valores de  $k$ , de modo que  $p_k(x)$  tenga una raíz de multiplicidad 2.

**Actividades.**

- Usando *DERIVE*, obtener los gráficos de  $y = p_k(x)$  para valores diferentes de  $k$
- Apoyándose de la representación gráfica de diferentes elementos de la familia de funciones polinomiales  $y = p_k(x)$ , determinar un valor (aproximado) de  $k$ , de modo que  $p_k(x)$  tenga una raíz de multiplicidad 2.

Al representar en *DERIVE* cinco funciones, por ejemplo, para  $k = -10, -5, 0, 5, 10$  se observa que existe un valor de para  $k$  entre  $-10$  y  $-5$  tal que la función  $y = p_k(x)$  es tangente al eje  $X$



Asignando a  $k$  valores pertenecientes al intervalo  $]-10, -5[$ , se puede obtener un valor aproximado  $k$  que resuelve el problema.

- Asignar a  $k$  el valor encontrado, y luego determinar algebraicamente si éste resuelve (aproximadamente) el problema.
- Explorar otras soluciones al problema, si es que existen.

Módulo 2: Descubriendo una ley de formación

**Descripción:** Aprovechando las capacidades de cálculo simbólico que ofrece *DERIVE*, se pretende descubrir una ley de formación para una sucesión de integrales indefinidas lo que permite conjeturar una fórmula para el término general.

**Actividades:**

- Usando *DERIVE* calcular el valor de cada una de las siguientes integrales indefinidas:

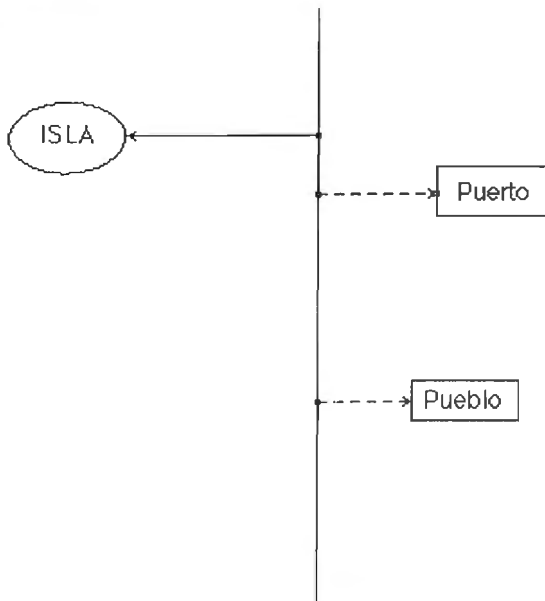
$$\int x e^x dx, \quad \int x^2 e^x dx, \quad \int x^3 e^x dx, \quad \int x^4 e^x dx$$

- En base a la información obtenida, conjeturar el resultado de  $\int x^5 e^x dx$
- Usando *DERIVE* chequear la conjetura precedente.
- Conjeturar una fórmula para  $\int x^n e^x dx$  y luego, refutarla o demostrarla formalmente.
- Determinar si la fórmula encontrada se puede extender para todo  $n \in \mathbb{Z}$

Módulo 3: Encontrando el mejor lugar para construir un puerto

**Descripción:** A través de una actividad guiada se resuelve un problema de contexto real, utilizando las capacidades de cálculo numérico, simbólico y gráfico de *DERIVE*.

**Problema:** Una isla se encuentra a 1 Km de la costa y en dicha costa existe un pueblo 10 Km más abajo. Una compañía de transportes se propone construir un puerto para llevar materiales de construcción desde el pueblo a la isla. Para realizar el trabajo, se cuenta con un camión y un barco, cuyas velocidades son 70 Km/h y 20 Km/h., respectivamente. ¿Qué lugar recomendaría para construir el puerto?





#### Actividades:

- Averiguar el rango de lugares de la costa donde razonablemente debería construirse el puerto
- Denotando por  $d$  a la distancia entre el pueblo y el punto de construcción del puerto y por  $T$  al tiempo de ir del pueblo a la isla, expresar  $T$  en función de  $d$ .
- Determinar el rango de valores que puede tomar  $d$
- Usando *DERIVE*, obtener el gráfico de  $T$  en función de  $d$ . Inspeccionando el gráfico obtenido, recomendar a la compañía el lugar para construir el puerto.
- Justificar formalmente la recomendación.
- Variar las condiciones iniciales del problema, tales como la velocidad del camión y/o la velocidad del barco. Y, resolver el problema bajo estas condiciones.

### 3. Comentarios finales

La incorporación del computador a la enseñanza y aprendizaje de la matemática, plantea un gran desafío a los educadores de todos los niveles de enseñanza. El desarrollo y perfeccionamiento de software de propósitos matemáticos, llevan naturalmente a elaborar estrategias de enseñanza-aprendizaje que implican por una parte seleccionar cuidadosamente los temas a implementar computacionalmente y por otra, a generar nuevas metodologías que enriquezcan el aprendizaje de los alumnos.

La propuesta de incorporación de la tecnología computacional a través de módulos pedagógicos computacionales, tal como han sido descritos, se ha experimentado en diversos cursos de matemática, alcanzando una mayor motivación por su estudio y mejores logros en los aprendizajes de los estudiantes. Las investigaciones y experiencias consideradas y las propias realizadas en este plano nos permiten presentar esta propuesta como una alternativa para incorporar apropiadamente el computador en la enseñanza de la matemática, que junto a la experiencia y los conocimientos de los docentes permitirán mejorar las ideas contenidas en este trabajo.

En síntesis, el desarrollo de software de computacionales de propósitos matemáticos ha abierto un espacio interesante a los educadores para incorporar la tecnología computacional al proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Sin embargo, dichos programas podrán transformarse en un poderoso auxiliar de apoyo a este proceso con la finalidad de lograr aprendizajes efectivos, en la medida que ellos estén integrados en unidades de aprendizaje adecuadamente estructurados.

### Referencias

- Arnold, S. (1996). *New Tools, New Question: Impediments, Imperatives and Implications*. Dirección Internet: <http://www.edfac.unimelb.edu.au/DSME/TAME/Arnold/TAME-pages/GdSoftware.html>
- Arnold, S. (1995). *Encouraging Strategic Software Use*. Mathematical Bytes. Vol. 2, Nº 3. Extraído de dirección Internet: [http://www.aamt.edu.au/mbytes/vol3\\_no2.html](http://www.aamt.edu.au/mbytes/vol3_no2.html)
- Ball, D. (1986). *Microcomputers in mathematics teaching*. Heinemann.
- Bennett, F. (1999). *Computers as Tutors: Solving the Crisis in Education*. Faben, Inc. Texto completo en dirección Internet: <http://www.concentric.net/~Faben1/>
- Burkhardt, H. (1986). *Ideas and Realization*.

- The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching. ICMI Study Series, 147-155.
- Cornu, B. (1992). *Computers as an aid to teaching and learning mathematics*. The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching. ICMI Study Series. (UNESCO), 87-92.
- Graf, K. et al. (1992). The Effect of Computers on the School Mathematics Curriculum. The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching. ICMI Study Series. (UNESCO), 57-79.
- Flanders, H. (1988). *Teaching Calculus as a Laboratory Course*. Educational Computing in Mathematics, T. F. Banchoff et al. (Eds.), 43-48. North Holland.
- Gómez, P. *Tecnología y educación matemática*. Tecnomat. 14 páginas. Dirección Internet: <http://www.colciencias.gov.co/cg9/co/docs/tecnomat.htm>
- Kaput, J. (1992). *Technology and mathematics education*. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York: MacMillan, 515-556.
- Murakami and Hata. (1986). *Mathematical Education in Computer Age*. The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching. ICMI Study Series, 85-94.
- Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, Computers and Powerful Ideas*. Basic Books, New York.
- Tall, D. And West, B. (1992). *Graphics Insight into Mathematical Concepts*. The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching. ICMI Study Series. (UNESCO), 117-123.