

La confusión entre área y perímetro. Análisis de una propuesta áulica

Educación Matemática
Vol. 14 No. 1 abril 2002
111-119

Fecha de recepción: diciembre, 2001

Ana María Mántica, María Susana del Maso, Marcela Götte y Adriana Marzioni

Departamento de Matemática

Universidad Nacional del Litoral

amantica@fafadoc.unl.edu.ar; mdalmaso@fafadoc.unl.edu.ar; mgotte@fafadoc.unl.edu.ar

Resumen: *En el presente trabajo se describe una secuencia de aprendizaje implementada en dos diferentes cursos de octavo año de E.G.B. (13-14 años). El objetivo ha sido proporcionar una serie de actividades para que los alumnos puedan establecer la independencia de los conceptos de perímetro y área. Se analiza el trabajo realizado por los alumnos en dos jornadas. En la primera de ellas se propuso una actividad cuyo propósito era la diferenciación de las nociones de área y de longitud. El objetivo de la actividad propuesta en la segunda jornada consistió en que los estudiantes reconocieran la independencia entre las variaciones del área y del perímetro. Se propusieron actividades que produjeran un conflicto con una consecuente fractura entre las relaciones de dependencia para la variación del área y del perímetro que los estudiantes usualmente establecen; al mismo tiempo se comprobó la tendencia a comparar las longitudes para la obtención de áreas que los estudiantes presentan, especialmente cuando se trata de diseños geométricos simples.*

Summary: *This work refers to a didactic sequence carried out in two eighth courses of the basic general education (EGB), and its aim is the interpretation of the independence of area and perimeter variations. The work done by students in two meetings is analysed. In the first meeting we propose an activity whose purpose is the differentiation of area and length notions. The aim of the activity proposed in the second meeting is that the students get to recognize the independence of area and perimeter variations. We propose activities with the purpose to produce a conflict and therefore a breakup over dependence relations between area and perimeter variations which the students generally set up; and at the same time they tend to compare lengths to get areas, specially if it is a question of simple geometrical designs.*

Introducción

Los conceptos de área y perímetro son abordados generalmente en la enseñanza elemental, pero el trabajo que se realiza con ellos tiene más que ver con aplicaciones de fórmulas que con los conceptos en sí, sobre todo en lo que a área se refiere.

La manipulación y memorización de fórmulas es una práctica muy arraigada, esto nos muestra la concepción que, en general, tienen los docentes respecto de lo que debe ser la enseñanza del cálculo de áreas.

Los docentes deberían plantear actividades sobre cálculo de áreas que no deriven simplemente en el manejo y aplicación de fórmulas, sino por el contrario, en una mayor comprensión de los conceptos y relaciones implicadas en la medida de superficies.

No es muy frecuente el planteo de actividades en las que la medida de la superficie, al igual que cualquier otra magnitud geométrica deba realizarse partiendo de una unidad de medida y su posterior reiteración, como sí se realiza en la medida de longitudes.

Existen numerosas investigaciones sobre los errores que cometen los alumnos en el cálculo de áreas y las concepciones erróneas que manifiestan. Uno de los errores que cometen y que se ha puesto de manifiesto en estas investigaciones es la confusión entre perímetro y área.

Douady-Perrín (1988) presentan un artículo sobre áreas de superficies planas; el mismo se enmarca en la línea de investigación didáctica que da cuenta de la construcción de campos conceptuales integrados para su comprensión y para el diseño de situaciones de aprendizaje. Se presenta una secuencia de enseñanza que apunta a la construcción del concepto de área. Se describen detalladamente las actividades y relaciones importantes para la construcción de dicho concepto. Consideran los autores que la ausencia de este concepto puede explicar algunas dificultades de los alumnos, en particular la confusión entre área y perímetro. Dentro de las actividades que se proponen para la construcción del concepto de área, encontramos las que recurren al embaldosado de superficies con distintas figuras y la medida de áreas de diferentes superficies utilizando diversas unidades de medida; planteando la relación entre las áreas de las baldosas y de las superficies medidas. Se plantean varias cuestiones tratando que los alumnos establezcan que área y perímetro pueden variar en sentidos diferentes, verificando que a pesar del trabajo que realizan generalmente existe una tendencia, por parte de los mismos, a la comparación de longitudes para comparar áreas.

Chamorro (1995) expresa que la metodología que generalmente se utiliza favorece la aparición de errores que persisten y trascienden, agudizando determinadas dificultades, entre otras, la incapacidad de los alumnos para distinguir magnitudes diferentes, por ejemplo superficie y perímetro. Atribuye esto a la falta de experiencias que pueda provocar una ruptura entre las imágenes intuitivas y las deducciones lógicas de ciertas propiedades de las que gozan la superficie, la longitud o el volumen. Propone que los alumnos realicen experiencias prácticas que permitan la construcción del conocimiento deseado, ligadas a un contexto de resolución de problemas, referidas a la vida práctica muy alejadas de cálculos especulativos. Además, menciona como verdaderas situaciones problemáticas sobre cómo medir una superficie, el transformarla en otra equivalente pero de distinta forma por transformaciones del tipo cortar, mover, pegar; cubrir una superficie con otra unidad sin dejar huecos ni superponerlas, contando el número de piezas utilizadas; reconocer una superficie de un objeto, independientemente de otras cualidades "peligrosas" como el perímetro.

Dickson (1991) realiza una investigación sobre el aprendizaje de las nociones de medida y de las dificultades que se les presentan a los niños con estas ideas. Considera los problemas que presentan, en el aprendizaje, la medición del espacio físico y su descripción por medio de magnitudes y la medición de fenómenos de no tan fácil percepción. Este autor plantea actividades sobre la manera en que los niños miden el área en situaciones en las que deben teselar una superficie con una unidad dada. Detecta que los niños logran medir el área más fácilmente cuando las unidades de medida son plenamente visibles. También analiza los problemas de confusión entre área y perímetro, considerando que es probable que los alumnos no dispongan de oportunidades suficientes para la exploración práctica

de los fundamentos especiales de estas ideas y de las relaciones que las ligan. Para ello considera distintas actividades presentadas a los alumnos y analiza la resolución que realizan los mismos.

Olmos y otros (1993) ofrecen una recopilación de investigaciones sobre área y volumen que permiten a los docentes plantearse cómo trabajar estos temas proporcionándoles un estímulo para el cambio en las aulas. En relación con el área y el perímetro, afirman que el logro de la bidimensionalidad del área se confirma como un proceso largo y complejo. La manipulación de figuras o las tareas de cubrimiento son algunos medios para poner de manifiesto variados matices. El cubrimiento de superficies permite el paso de estructuras aditivas a estructuras multiplicativas y facilita posteriormente las tareas de aritmetización. La percepción del área puede desarrollarse a partir de la idea de cubrir objetos, no sólo planos. En el caso del área, la posibilidad de confusión con el perímetro de las figuras es un hecho constatado por varios investigadores. El niño erróneamente puede considerar el área de una figura teniendo en cuenta sus dimensiones lineales. Sostienen que es útil el trabajo con figuras que a pesar de poseer dimensiones lineales engañosas tengan la misma área (paralelogramos con la misma base y altura) y figuras que a pesar de engañosas coincidencias en sus dimensiones lineales tengan distinta área.

En este artículo se describe una secuencia de aprendizaje implementada en un curso de octavo año de E.G.B. (13-14 años). El objetivo de la misma ha sido proporcionar una serie de actividades para que los alumnos puedan establecer la independencia de los conceptos de perímetro y área.

En las siguientes secciones describimos las jornadas de trabajo y las conclusiones alcanzadas. En la última sección enunciamos una hipótesis de trabajo elaborada a partir de los resultados obtenidos.

Descripción y análisis de la propuesta implementada

Analizando tanto los diseños curriculares del tercer Ciclo¹ de la provincia de Santa Fe, como los Contenidos Básicos Comunes que propone Nación, en el eje Geometría vemos que uno de los temas a tratar es el referido a la relación entre figuras de igual área y distinto perímetro o distinto área e igual perímetro.

Este trabajo se implementó en dos octavos años de distintas escuelas de la ciudad de Santa Fe, llevándose a cabo durante dos jornadas. Para la documentación de las actividades de las clases se trabajó con grabadores, videos y registro etnográfico.

El mismo se realizó en base a una reformulación de la propuesta didáctica "Investigación en didáctica de matemáticas: área de superficies planas en CM y 6^{ème}" de Régine Douady y Marie-Jeanne Perrin, de la revista *Hacer Escuela* núm 9.

Para la implementación de la secuencia de aprendizaje nuestra experiencia docente nos llevó a plantearnos las siguientes hipótesis:

- Los conceptos se construyen a través de acciones. Los problemas movilizan en el alumno distintos conceptos para su resolución debiendo determinar cuáles se ponen en juego en cada caso particular.

¹ El Tercer Ciclo está compuesto por tres años: séptimo (12-13 años), octavo (13-14 años) y noveno (14-15 años).

- Un concepto se construye a partir de un conflicto generado y en función de conocimientos anteriores; con el fin de ampliarlos, modificarlos y/ o reestructurarlos para construir otros.
- La consideración simultánea de dos variables independientes dificulta la construcción de un concepto. En este caso las variables son área y perímetro, en primer lugar dejamos fija una de ellas para después considerar a ambas.

Primera jornada

Nuestro objetivo en esta primera jornada fue observar si los alumnos logran diferenciar las nociones de área y longitud. Para ello se les entregó a cada uno un tangram de cartulina (figura. 1), hilo que no se estira, tijera, goma de pegar y regla graduada.

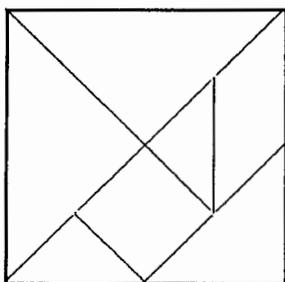


Figura 1

Para el desarrollo de la actividad se formaron grupos de 4 alumnos, cada uno de ellos dispuso de un tangram, todos recibieron figuras idénticas y un cuadrado de igual área como testigo por grupo.

Las consignas que se formularon a los alumnos fueron las siguientes:

1. *Recortá tu tangram en las siete piezas sin perder ningún pedazo. Armá un rompecabezas con las piezas, sin superponerlas de manera de obtener otra figura distinta de la testigo. Se quieren cuatro figuras diferentes en cada equipo. Pegá tu figura en una hoja (para evitar que se te desarme).*
2. *Pedí por escrito la longitud de hilo necesario para bordear exactamente la figura realizada y verifiqué si la longitud es la correcta pegando el hilo sobre el borde. Si la longitud no es la correcta, realizé nuevamente el pedido y volví a intentarlo.*
3. *Comparé los perímetros de las figuras obtenidas y de la testigo. Escribí tus conclusiones y las dificultades encontradas en el papel afiche.² Comparé las áreas de las figuras obtenidas y de la testigo. Escribí tus conclusiones.*

Planteamos esta figura con el objetivo de evitar cortes curvos, lo que impediría que los alumnos pudieran realizar medición con regla, agregando una dificultad que considera-

² Afiche: lámina de papel rectangular de 1,20 m por 0,90 m.

mos innecesaria en este caso. Además el hecho de tener figuras poligonales facilita el cálculo del área de la nueva figura en caso que los alumnos no noten a simple vista que coincide con la de la testigo.

Nuestro supuesto fue que los alumnos realizaran algunos de los siguientes procedimientos en la resolución de la tarea:

- Comparar por superposición de piezas.
- Considerar que la unión de las piezas recortadas sin superposición nos da la misma área (concepto de equivalencia de áreas).
- Calcular el área de ambas figuras aplicando fórmulas y comparando resultados.

En la realización de la tarea observamos algunas cuestiones que queremos destacar. Al recibir la primera consigna un alumno preguntó si debía armar una “figura geométrica”, refiriéndose a polígonos convexos que son con los que habitualmente se trabaja, dándole la calidad de figura a aquellas que responden a esas características.

En la segunda consigna un grupo asegura que van a ser iguales las longitudes de todos los hilos; no obstante, el procedimiento utilizado por todos fue tomar la regla y medir en centímetros cada una de las longitudes que intervienen en el perímetro y sumarlas.

Las dificultades observadas para la realización de la tarea fueron relativas al trabajo con el hilo, ya sea el referido al pedido de la longitud del mismo como al pegado del hilo en el borde de la figura. Algunos alumnos cometieron reiteradamente errores de medición o bien tomaron las longitudes de todos los lados de las diferentes piezas aunque no sean bordes de la figura.

Respecto de la tercera consigna, un alumno dijo que el área de la figura obtenida es igual a la de la testigo porque se obtuvo de ella, pero a su vez dijo que es mayor porque al superponerlas observó que la primera sobresale, en parte, de la segunda.

Puesta en común

A continuación presentamos cuestiones realizadas por los alumnos, en primer término respecto al perímetro.

- *Cuanto más “picos” tiene la figura mayor es su perímetro.*
- *Las figuras “cerradas” tienen menor perímetro que las “abiertas”; considerando “cerradas” a las compuestas por las piezas dispuestas en forma más compacta.*
- *Una de las figuras presentadas es un polígono “con agujero” (conjunto conexo); un alumno dijo que en ese caso el perímetro está mal hallado, porque debió pegarse el hilo también por el borde del agujero.*

A continuación presentamos algunas consideraciones realizadas por los alumnos respecto del área:

- *Dos grupos dijeron que todas las figuras tienen igual área porque se obtienen del mismo cuadrado, no obstante uno de ellos calcula el área de las figuras obtenidas para justificar sus conclusiones.*

- *Tres grupos no pudieron obtener la conclusión por desconocer la fórmula para hallar el área de su figura.*
- *En un caso se utilizó una fórmula para el cálculo del área dado que era un rectángulo; en otro se obtuvo por descomposición de la figura utilizando varias fórmulas. En el segundo caso el valor obtenido coincide con el área de la testigo, no sucediendo lo mismo en el primero. La justificación fue que al no unir perfectamente las siete piezas aumentó la medida del área.*

En todos los casos, luego de la puesta en común y de las discusiones realizadas, los alumnos concluyeron que todas las figuras tienen la misma área pero distinto perímetro. No obstante, la afirmación de que los perímetros de las figuras son distintos se obtuvo después de realizar la medición del hilo.

Respecto de la conservación del área, algunos grupos la observaron desde el comienzo.

Segunda jornada

En esta jornada nuestro objetivo fue observar si los alumnos pueden reconocer la independencia de las variaciones del área y del perímetro de una figura dada.

Para esto se les entregó cuatro modelos de polígonos distintos de cartulina (figura 2); tijera, goma de pegar y regla graduada.

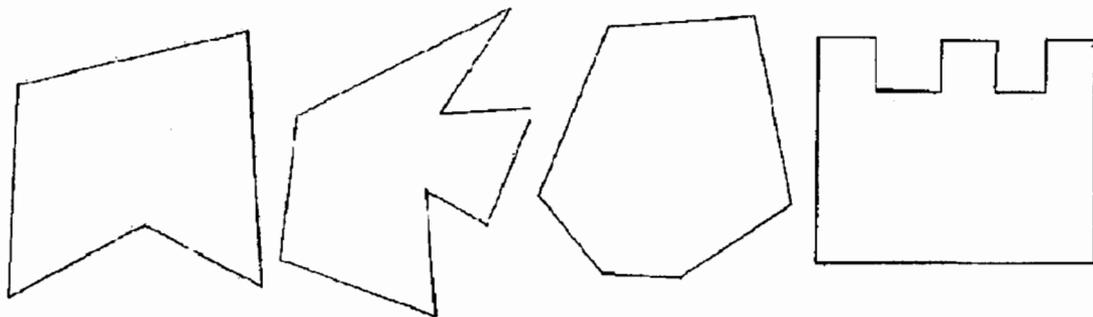


Figura 2

La actividad se realizó en dos etapas: la primera parte individual, donde se le entregó a cada alumno un polígono y en la segunda se conformaron los cuatro grupos, en relación con los polígonos recibidos, de manera tal que todos los integrantes del mismo tenían igual modelo.

Las consignas que se formularon a los alumnos fueron las siguientes:

1. *Modificá la figura recibida de manera de obtener otra de menor área y mayor perímetro.*
2. *Reunanse los compañeros que recibieron originalmente el mismo polígono.*
3. *Peguen en el papel afiche las figuras obtenidas. Discutan si cumplen las condiciones pedidas en la consigna 1 y anoten las conclusiones en el afiche.*

La razón por la cual se les entregó el modelo –en lugar de pedirles que cada uno dibuje una figura– fue que se presentaran polígonos cóncavos y convexos irregulares, dado que generalmente los alumnos tienden a dibujarlos convexos. Además se pidió que formaran grupos de 4 o 5 integrantes, considerando que esta forma de trabajo enriquece la discusión y facilita la puesta en común.

Nuestro supuesto fue que los alumnos realizaran algunos de los siguientes procedimientos en la resolución de la tarea:

- Cortar una pieza del borde. Esto asegura la disminución del área pero no siempre el aumento del perímetro, una forma de asegurar esto último es aumentar la irregularidad del borde.
- Dibujar una figura incluida en la anterior con borde suficientemente irregular, asegurándose de esta manera la consigna requerida.
- Quitar una parte del interior de la figura, que asegura la disminución del área y el aumento de perímetro.

Durante la realización de la tarea observamos que los alumnos tuvieron inconvenientes en considerar simultáneamente la variación de área y perímetro, a pesar de que en la jornada anterior se tomó como variable sólo el perímetro.

En la mayoría de los casos al realizar el corte para disminuir el área, no se respetó la consigna para el perímetro. Para responder a esta exigencia los alumnos consideraron que debían realizar cortes “entrando”, “formando picos”. En ningún caso tuvieron en cuenta la propiedad de los lados de un triángulo que les facilitaba cumplir con la consigna.

Un alumno sostuvo la invariancia del área independientemente que se agregue o se quite un trozo de la figura, a pesar de que su grupo presentó conclusiones correctas.

En algunos casos descompusieron la figura dada realizando cortes rectos en ella. Desecharon un trozo y con los restantes armaron una nueva figura, realizando mediciones en su contorno para asegurarse el aumento del perímetro, o bien armando una figura tan “abierto” con los trozos como para asegurar el aumento de perímetro. A nuestro entender este procedimiento pudo haber sido influenciado por la actividad realizada en la clase anterior.

Con el procedimiento de cortado y armado pocos alumnos lograron construir un polígono con agujero.

Una cuestión que notamos en el desarrollo de ambas jornadas fue la falta de precisión en el lenguaje matemático por parte de los alumnos.

Puesta en común

Presentamos algunas cuestiones expresadas, por los alumnos, en la puesta en común:

- *Para obtener una figura de menor área se debe quitar un trozo, lo cual no asegura el aumento del perímetro.*
- *Para aumentar el perímetro, el corte se debe realizar “entrando” en la figura, o bien recortándola en trozos y pegándolos formando una figura “más abierta”.*

Al realizar la puesta en común pudimos observar que los alumnos consideraron por un lado la variación del área y por otro la del perímetro. Luego de las discusiones realizadas

aceptaron que podían modificar la figura de manera que aumente su perímetro y disminuya su área.

Conclusiones de ambas jornadas

Se observó que los conceptos de área y perímetro no están claros. Por un lado los alumnos afirmaron que, si no quitan ningún trozo las figuras tienen igual área y por otro, consideraron que al cortar trozos de una determinada figura y disponerlos de manera más dispersa, el "lugar" ocupado por ésta es mayor que el de la original y por lo tanto tiene mayor área y mayor perímetro.

Luego de los trabajos y discusiones realizadas en ambas jornadas, pudo apreciarse que, en general, no pueden establecer la independencia entre la variación de área y perímetro.

No obstante notamos que algunos alumnos comenzaron a plantearse qué tipo de relación existe entre área y perímetro de figuras de distinta forma. Esto nos permite avanzar en la reconstrucción de dichos conceptos y su independencia.

Luego del análisis del trabajo realizado en las jornadas descriptas formulamos la siguiente hipótesis: "*se presenta en los alumnos una fractura entre lo que perciben visualmente y el concepto de área*".

Con el fin de encontrar argumentos que la sustenten se consultó bibliografía de investigación relacionada con la visualización y la formación de conceptos geométricos.

Fischbein (1993) considera que las figuras geométricas poseen simultáneamente características conceptuales y figurales, por esta doble naturaleza las denomina *conceptos figurales*. "Los objetos de investigación y manipulación en el razonamiento geométrico son entidades mentales llamados conceptos figurales, que reflejan propiedades espaciales (forma, posición, magnitud) y al mismo tiempo poseen cualidades conceptuales (idealidad, abstracción, generalidad, perfección)".

Castro y Castro (1997) aportan datos que indican que muchas dificultades en el aprendizaje pueden evitarse si se anima a los estudiantes a usar e interiorizar representaciones visuales asociadas a los conceptos matemáticos. Es decir, se debe desarrollar en los alumnos la habilidad de resolver problemas utilizando el pensamiento visual y analítico en concordancia.

Castro (1995) sostiene que "la visualización es importante para la educación puesto que la comprensión alcanzada mediante elementos visuales y analíticos se complementan; por ello mismo, el aprendizaje debe lograrse integrando información que utilice ambos tipos de códigos".

Por lo tanto suponemos que la fractura entre lo visual y lo conceptual podría deberse a dos aspectos:

- El proceso de construir conceptos figurales muchas veces es considerado como una competencia natural.
- El uso de recursos visuales en la enseñanza requiere que los docentes dispongan de una formación adecuada que les permita poner en marcha diversas habilidades pedagógicas.

Nuestra tarea futura será realizar entrevistas a alumnos que participaron en las jornadas tratadas en este artículo, encuestar a docentes y revisar el tratamiento de este tema en distintos libros de texto.

Referencias bibliográficas

- Castro, E. (1995) *Exploración de Patrones Numéricos mediante Configuraciones Puntuales*. Granada: Comares
- Castro, E. y Castro, E. "Representaciones y Modelización", en *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona. Horsori. 95 - 124.
- Cohen L. y Manion, L. (1989) *Métodos de investigación educativa*. Madrid . La Muralla.
- Chamorro, M (1995) "Aproximación a la medida de las magnitudes en la Enseñanza Primaria", en *UNO Procedimientos en Matemáticas Nº 3*. Graó. Barcelona. 31- 53
- del Olmo, M.; Moreno, M. Gil, F. (1993) *Superficie y volumen ¿algo más que el trabajo con fórmulas?*. Madrid. Síntesis.
- Dickson, L.; Brown, M.; Gibson, O.; (1991) "Medida", en *El aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona. Labor. 88-181.
- Douady, R. y Perrin, M. (1988) "Investigaciones en didáctica de matemáticas: Áreas de superficies planas en CM y 6ème". En *Hacer Escuela Nº9*. Escuela Nueva Soc. Coop. Ltda. Buenos Aires. 34-60.
- Fischbein, E. (1993): " The theory of figural concepts" en *Educational Studies in Mathematics*, 24. 139-162.
- Ministerio de Educación. (1999). "Diseño Curricular Jurisdiccional. Tercer Ciclo E.G.B." Santa Fe.