Actitudes matemáticas: propuestas para la transición del bachillerato a la universidad

Inés Ma. Gómez-Chacón

Resumen: La investigación en educación matemática universitaria en la última década ha puesto de relieve la variedad de factores que influyen en la transición entre la enseñanza secundaria y la universitaria en matemáticas. Para iniciar a los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos, es fundamental una actitud positiva hacia la Matemática y, en particular, hacia el enfrentamiento con tareas matemáticas complejas. Este trabajo se centra en las dificultades de aprendizaje del estudiante cuyo origen se encuentra en la interacción cognición-afecto. Pretende aportar ciertas reflexiones basadas en datos empíricos y ejemplificar algunas actividades que pueden desarrollarse en propuestas de innovación universitaria que se enfoquen en el desarrollo de actitudes positivas y actitudes matemáticas (actitud inductiva, actitud de precisión y rigor).

Palabras clave: transición del bachillerato a la universidad, cognición y afecto, afecto y pensamiento matemático, actitudes matemáticas, actitud inductiva, rigor e intuición, evaluación de actitudes matemáticas.

Mathematical attitudes: proposals for the transition from high school to university

Abstract: In the last decade, research in math education has highlighted the variety of factors that influence the transition between secondary education and higher education in mathematics. A positive attitude toward mathematics and, in particular, toward the confrontation with complex math homework, is fundamental to initiate the students in the resolution of mathematical problems. This paper centers on the university apprenticeship difficulties that have their origin in the interaction between cognition and affect. It tries to contribute certain reflections based on empirical facts and exemplify some activities that can be developed in university innovated proposals that focus on the development of positive attitudes and mathematical attitudes (inductive attitude, precision and rigor attitude) and habits of mind.

Fecha de recepción: 8 de enero de 2009.

Keywords: transition from high school to the university, cognition and affect, affect and mathematical thinking, mathematical attitude, habits of mind, inductive attitude, rigor and intuition, evaluation of mathematical attitudes.

INTRODUCCIÓN

En estos últimos años, la transición de la educación secundaria postobligatoria a la universidad es uno de los temas que más preocupa a matemáticos y educadores matemáticos. Muchos son los factores que influyen en esta transición. Delimitar variables que intervienen en la distancia cada vez mayor que se produce entre la enseñanza secundaria y la universitaria en matemáticas no es nada fácil (Gueudet, 2008).

Si nos acercamos a la literatura sobre el tema, se puede comprobar la gran la variedad de aproximaciones a esta problemática por países (Artigue, Batanero y Kent, 2007; Hoyles *et al.*, 2001; Wood, 2001). Sin embargo, cada vez hay más consenso en que hacer un estudio de las dificultades de aprendizaje de los estudiantes en la transición de secundaria a universidad nos exige acercarnos a varias perspectivas diferentes: la percepción del estudiante, la percepción del profesor y los indicadores cognitivos, procedentes del ámbito institucional, de calidad y excelencia en el área de conocimiento.

Ciertos expertos han identificado algunas áreas problemáticas matemático-didácticas. En el estudio realizado en la universidad Complutense de Madrid por Miguel de Guzmán y otros investigadores (Guzmán *et al.*, 1998) sobre dificultades del paso de la secundaria a la universidad, se propusieron distintas categorías para tener en cuenta en las investigaciones: perspectivas epistemológicas, cognitivas, socioculturales y didácticas.

La mayoría de las primeras investigaciones realizadas sobre esta temática se han centrado en las dificultades cognitivas y los saltos conceptuales que experimenta el estudiante, así como en los cambios en la forma de comunicación y en los procesos de demostración en ambos ámbitos institucionales (Tall, 1991; Robert, 1998; Selden y Selden, 2005; Iannone y Nardi, 2007).

En estos últimos años, autores que se sitúan en la perspectiva antropológica analizan la cuestión de la transición entre la enseñanza secundaria y la superior como un problema de transición entre culturas (Artigue, 2004; Bosh *et al.*, 2004). Se concibe la Matemática como conocimiento cultural, describiendo "el conocimiento matemático en términos de organizaciones o praxeologías matemáticas cuyos componentes principales son: tipos de tareas, técnicas, tecnologías, y teorías. Desde este punto de vista, las organizaciones matemáticas se componen de un bloque práctico o 'saber-hacer', formado por los tipos de tareas y las técnicas, y por un bloque teórico o 'saber', formado por el discurso tecnológico-teórico que describe, explica y justifica la práctica docente" (Chevallard, 1992). El problema central de la didáctica es el estudio de la relación institucional con el saber, sus condiciones y sus efectos, considerando el conjunto de condicionantes cognitivos, culturales, sociales, inconscientes y fisiológicos del alumno, que desempeñan o pueden desempeñar un papel en la formación de su relación personal con el objeto de saber en cuestión.

En esta perspectiva se sitúa el problema del paso secundaria-universidad en el ámbito más general de la enseñanza de las matemáticas y su consideración social. Se han analizado factores, tanto internos como externos, que han influido en el estudio escolar de las matemáticas. Por ejemplo, factores de origen ideológico y factores que dependen de actuaciones concretas de los agentes que intervienen directamente en el sistema de enseñanza. También se han analizado aquellos factores que, por provenir de la estructura de las matemáticas escolares y de las diferentes maneras de organizar su estudio, son relativamente independientes de las acciones que provienen del "exterior" del sistema. En esta línea encontramos referencias significativas, como son las de Praslon (2000), Gueudet (2004), Artigue (2004) y, Bosch, Fonseca y Gascón (2004).

En síntesis, el origen de las dificultades en la transición de la secundaria a la universidad tiene un amplio espectro: modos de pensamiento y organización del conocimiento (Tall, 1991; Sierpinska, 2000), demostración y comunicación (Dreyfus, 1999; Iannone y Nardi, 2007), transposición didáctica y contrato didáctico (Artigue, 2004; Gueudet, 2008). Se puede comprobar que, en estas investigaciones, escasamente se han estudiado las influencias afectivas en el conocimiento matemático como una tipología de dificultades de los estudiantes en la transición de la secundaria a la universidad. Ha habido expertos como Hoyles *et al.* (2001, p. 833) que, al analizar el salto conceptual que se produce de bachillerato a universidad, han señalado tres áreas principales: falta de pensamiento matemático (es decir, la habilidad de pensamiento abstracto o lógico; los procesos de demostración); la falta de competencias de cálculo y la falta de espíritu matemático (es decir, falta de motivación y perseverancia); dejando entrever bajo la categoría *espíritu matemático* aspectos relativos a la dimensión emocional del sujeto. En la actualidad, comienzan a iniciarse algunas investigaciones en esta dirección (Liston y Odonoghue, 2008; Gómez-Chacón y Haines, 2008).

Partimos de la tesis de que la actividad matemática "como un comportamiento 'puramente cognitivo' es extremadamente raro" (Schoenfeld, 1983, p. 330). Ya en la primera mitad del siglo XX, matemáticos como Henri Poincaré y Jacques Hadamard[1] reflexionaron sobre la naturaleza de la actividad matemática y distinguieron aspectos que, en nuestros días, podrían considerarse adscritos al dominio afectivo.[2] Si recordamos relatos procedentes de distintos matemáticos, descubrimos cómo la imagen puramente racional y fría del aprendizaje de las matemáticas como disciplina dura y árida da paso a la posibilidad de un aprendizaje en el que el ejercicio racional está inmerso en un cúmulo de afectos, emociones, creencias y valores.

Este trabajo se centra en las dificultades de aprendizaje del estudiante que tienen su origen en la interacción cognición-afecto. En primer lugar, se indican brevemente algunas variables de origen afectivo que influyen en el aprendizaje. Luego, se definen dos de los descriptores del dominio afectivo: las actitudes hacia la matemática y las actitudes matemáticas. Por último, se presentan reflexiones y se ejemplifican algunas actividades que pueden ser desarrolladas en propuestas de innovación universitaria que integren esta dimensión actitudinal.[3]

VARIABLES AFECTIVAS Y APRENDIZAJE MATEMÁTICO

En las dos últimas décadas, distintas investigaciones han puesto de manifiesto que el éxito y fracaso en matemáticas depende de algo más que del conocimiento de ciertos requisitos de contenido matemático. Conocer apropiadamente hechos, algoritmos y procedimientos no es suficiente para garantizar el éxito. Otros factores influyen en la dirección y el resultado de la ejecución de la tarea matemática, por ejemplo: las decisiones y estrategias relativas al control y regulación de la acción (es decir, decisiones relativas al análisis de las condiciones

[1] Hay dos referencias clásicas de dos matemáticos que hacen este estudio: J. Hadamard (1945), *The psychology of invention in the mathematical field*, Princeton, Princeton University Press, y H. Poincaré (1974), "La creación matemática", en M. Kline (ed.) (1974), *Matemáticas en el mundo moderno*, Madrid, Blume, pp. 14-17.

[2] Es bien conocido el problema de terminología, véanse, por ejemplo, Gómez-Chacón (2000) o Leder, Pehkonen y Töner (2002). En el dominio afectivo en matemáticas, identificamos cuatro categorías: creencias, actitudes, emociones y valores.

[3] Una primera versión de este texto fue expuesta en la conferencia de apertura del Simposio Internacional "Dificultades matemáticas y didácticas en el primer año universitario", Universidad Autónoma de la Ciudad de México, Ciudad de México, del 1 al 4 de diciembre de 2008.

del problema, planificación de la acción, evaluación del proceso), las actitudes, emociones y sentimientos al trabajar la tarea matemática (ansiedad, frustración, alegría), los valores y las creencias acerca de la Matemática y su aprendizaje (Schoenfeld, 1985; McLeod, 1992; Gómez-Chacón, 2000; Leder, Pehkonen y Töner, 2002). Todos estos factores, aunque no de manera explícita, dirigen la instrucción y el comportamiento matemático del estudiante.

En particular, los estudios sobre el tema de aprendizaje y afecto hacen referencia a que las reacciones afectivas pueden tener influencias diferentes en varios procesos cognitivos y conativos que afectan el desarrollo del pensamiento matemático (procesos creativos e intuitivos, procesos atribucionales...) y los catalogados como procesos directivos (procesos metacognitivos y metaafectivos). Si al mismo tiempo cruzamos estos datos con los resultados de las investigaciones sobre dificultades en los estudiantes de primer año, comprobamos que estos últimos, cuando llegan a la universidad, escasamente han adquirido procesos de pensamiento matemático y tienen pocas destrezas y actitudes para imbuirse en procesos de pensamiento avanzado. Por tanto, partir del supuesto de que el quehacer matemático tiene anclajes emocionales con procesos como los descritos anteriormente nos hace plantearnos distintas cuestiones, como por ejemplo: ¿podemos tratar de incidir eficazmente en los procesos de pensamiento, a fin de propiciar la ayuda necesaria para que la interacción cognición y afecto sea positiva? ¿Hay formas más propicias de inculturación en el quehacer matemático que la hagan posible? ¿Es posible una formación explícita de los estudiantes en actitudes matemáticas? ¿Qué enseñar y cómo enseñar actitudes matemáticas?

En mi opinión, un programa adecuado que ayudara a los estudiantes a mejorar sus procesos de pensamiento, sobre todo en las zonas de interacción cognición y afecto, conllevaría el desarrollo en la formación de los estudiantes de los siguientes aspectos:

1. La adquisición de una actitud inicial adecuada.
2. La adquisición de actitudes matemáticas.
3. El aprendizaje de procesos y estrategias de pensamiento para enfrentarse a un problema.
4. La estructuración de los conocimientos alrededor de los temas específicos en los que se va a ocupar mentalmente.

A continuación, vamos a centrarnos en los dos primeros puntos de la dimensión actitudinal, identificando factores de interacción cognición y afecto y algunas sugerencias de actuación.

La razón para priorizar el tema de las actitudes es que, cuando nos centramos en la *vivencia emocional de la materia* por parte del estudiante, nos estamos refiriendo a un conjunto complejo de elementos emocionales: atribuciones de causalidad, autoconcepto matemático, actitudes y creencias en matemáticas, creencias sobre el profesor, etc. La percepción de dificultad, el rechazo o el aprecio a las matemáticas serían algunos ejemplos de actitudes entendidas como predisposiciones evaluativas que condicionan al sujeto para percibir y reaccionar de un modo determinado. Sin embargo, en su actuación un profesor debe diferenciar entre *actitudes hacia las matemáticas y actitudes matemáticas*. Pensamos que es conveniente establecer esta diferencia, ya que el estímulo para la valoración de esta disciplina y el interés por el aprendizaje de la materia es muy diferente del cultivo del gusto y la preferencia en el modo de utilizar capacidades mentales importantes para el trabajo matemático.

Aunque aquí no vamos a analizar con detenimiento la dificultad intrínseca de las matemáticas, no se puede obviar ninguna de sus características propias: abstracción, inducción, jerarquización, globalización, rigor. Las matemáticas son una disciplina que requiere para su asimilación cierto esfuerzo y el uso de estrategias cognitivas de orden superior. Tenemos la convicción práctica de la importancia de bucear en la propia afectividad, en las emociones, en las motivaciones, a fin de darnos cuenta del profundo influjo que ejercen sobre nuestro dinamismo mental en la resolución de los problemas, pero esto no sería posible sin la posibilidad de explicitar reglas y modos concretos de proceder. En una metodología de enseñanza que ayude al estudiante a lograrlo, entrarían las actitudes matemáticas, con su dimensión cognitiva y afectiva, así como su relevancia en un enfoque heurístico del aprendizaje de la Matemática y a través del enfoque de un aprendizaje activo.

Paso a continuación a situar los conceptos de actitudes hacia la Matemática y actitudes matemáticas.

ACTITUDES HACIA LA MATEMÁTICA Y ACTITUDES MATEMÁTICAS

Aunque el estudio de las actitudes hacia la Matemática se viene desarrollando desde largo tiempo (Di Martino y Zan, 2001; Estrada, 2002; Hannula, 2002; Hernández y Gómez-Chacón, 1997; Kulm, 1980; Leder y Forgasz, 2006; Ruffell *et al.*, 1998), el estudio de las actitudes matemáticas ha tenido un despliegue menor.

Ya Aiken y Aiken (1969) sugirieron dos categorías clásicas: actitudes hacia la ciencia (cuando el objeto de la actitud es la propia ciencia) y actitudes científicas (si el objeto de la actitud son los procesos y actividades de la ciencia, esto es, la epistemología científica), asumidas después por distintos autores en el ámbito de la Matemática (Callejo, 1994; Hart, 1989; NCTM, 1989; Gómez-Chacón y Hernández, 1997, y Gómez-Chacón, 2000) como actitudes hacia la Matemática y actitudes matemáticas. Lo que va dando lugar a distinciones entre actitudes sobre la imagen de la Matemática, actitudes sobre los métodos de la Matemática, actitudes matemáticas, actitudes sobre las implicaciones sociales de la Matemática y actitudes sobre la enseñanza de las matemáticas.

Estos modos de categorizar las actitudes van reclamando el establecimiento de taxonomías para clasificar todos los objetos potenciales de las actitudes relacionadas con las matemáticas; para ello, parece necesario construir una base mayor sobre cognición y emoción y la interacción entre ambos. Éste es un campo en el que se ha avanzado en estos últimos años en matemáticas (Goldin, 2000; Gómez-Chacón, 2000; Hannula, 2002); en otros trabajos hemos explorado y analizado fenómenos cognitivos-emocionales que producen comportamientos que tradicionalmente se caracterizan como actitud en el aprendizaje matemático con GeoGebra (Gómez-Chacón, prensa).

Pasamos a plantear la diferencia que deberíamos hacer en los procesos de enseñanza y aprendizaje entre actitudes hacia la Matemática y actitudes matemáticas.

Las actitudes hacia la Matemática se refieren a la valoración y al aprecio de esta disciplina y al interés por esta materia y por su aprendizaje, y subrayan más la componente afectiva que la cognitiva; aquélla se manifiesta en términos de interés, satisfacción, curiosidad, valoración, etcétera.

Las actitudes matemáticas, por el contrario, tienen un carácter marcadamente cognitivo y se refieren al modo de utilizar capacidades generales, como la flexibilidad de pensamiento, la apertura mental, el espíritu crítico, la objetividad, etc., que son importantes en el trabajo en matemáticas. En el estándar 10 de la NCTM (1989/1991), en relación con esta categoría se afirma:

> La actitud matemática es mucho más que una afición por las matemáticas. A los alumnos podrían gustarles las matemáticas, pero no demostrar el tipo de actitudes que se indican en este estándar [se refiere a la flexibilidad, el espíritu crítico...]. Por ejemplo, a los alumnos podrían gustarles las matemáticas y, a la vez, creer que la resolución de problemas constituye siempre la

búsqueda de una respuesta correcta de la manera correcta. Estas creencias, a su vez, influyen sobre sus acciones cuando se enfrentan a la resolución de un problema. Aunque estos alumnos tengan una disposición positiva hacia las matemáticas, no muestran, sin embargo, los aspectos esenciales de lo que venimos llamando actitud matemática (NCTM, 1991, p. 241).

Por el carácter marcadamente cognitivo de la actitud matemática, para que estos comportamientos puedan ser considerados como actitudes, hay que tener en cuenta la dimensión afectiva que debe caracterizarlos, es decir, distinguir entre lo que un sujeto es capaz de hacer (capacidad) y lo que prefiere hacer (actitud).

A continuación, pasamos a ver algunas ejemplificaciones.

ADQUISICIÓN DE UNA ACTITUD INICIAL ADECUADA

Denominamos actitud inicial adecuada a un talante inicial apropiado: confianza, tranquilidad, motivación y disposición para aprender, curiosidad, gusto por el reto, creencias positivas hacia la Matemática y su aprendizaje, etcétera.

Para lograr una actitud inicial adecuada, hemos constatado que uno de los factores que más influye es la imagen y las creencias que tienen los estudiantes sobre las matemáticas y su aprendizaje. Éste es un factor importante en términos de motivación. Los estudiantes llegan al aula con una serie de expectativas sobre qué son las matemáticas y cómo ha de ser la manera en la que el profesor debe enseñárselas. Cuando la situación de aprendizaje no corresponde a estas creencias, se produce una fuerte insatisfacción que incide en la motivación del alumno.

En un estudio reciente que hemos hecho sobre la transición de secundaria a universidad, en el área de Geometría Avanzada,[4] uno de los objetivos fue identificar dificultades procedentes de la percepción y de las creencias de los estudiantes sobre Geometría. Se aplicó un cuestionario sobre creencias a 22 alumnos de bachillerato de un Instituto de Enseñanza Secundaria de Madrid y a 28 alumnos de primero de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense

[4] La finalidad de esta investigación es realizar un estudio exploratorio sobre dificultades que entrañan la transición secundaria-universidad en el área de conocimiento de Geometría Avanzada. Fue presentado como trabajo de DEA en el programa de doctorado de Investigación Matemática 2008. En la investigación colaboraron I. Sevilla, M. Castrillón e I. Ma. Gómez-Chacón.

de Madrid (UCM). También se utilizó un cuestionario dirigido al profesor para indagar sobre las creencias de los estudiantes (cuatro profesores con docencia en primero de Matemáticas de la UCM). El objeto del diagnóstico era conocer qué tipos de creencias tiene el alumnado que pueden estar favoreciendo o dificultando el aprendizaje. Se focalizó en: creencias del estudiante sobre la función y actitud del profesor, creencias sobre el gusto y conocimientos de la Geometría, creencias sobre procesos matemáticos como visualización y sentido espacial, y creencias sobre desarrollos de conceptos y formalización de intuiciones.

Los datos pusieron de manifiesto que los estudiantes parecen tener una idea ajustada y coherente de la naturaleza de la Geometría, así como una convergencia entre las percepciones de los profesores y estudiantes sobre qué es la Geometría. Sin embargo, los datos señalan la falta de percepción por parte de los estudiantes de la utilidad de la Geometría en la vida ordinaria, aspecto que es ratificado por los profesores. Los profesores consideran que, a los ojos de los estudiantes, la Geometría se ve con pocas aplicaciones y como una ciencia concluida y sin avances. En este mismo estudio se constatan dos aspectos clave: "el gusto" y la "utilidad" como un motivo interno incontrolable.[5] La asignación que realizan estos jóvenes parece evidenciar posturas en las que el control y la perspectiva de modificabilidad no son controlables por el sujeto ("Como no te gusten, no las coges" (J. CI); "me fue mal porque no me gustaba mucho y no veía su aplicabilidad" (M., CI)).

En la práctica, para los estudiantes la motivación significa aquello que perciben en el aprendizaje como una causa que es posible que quieran realizar. Es importante conocer las atribuciones que hace el estudiante sobre su éxito y fracaso escolar. La atribución como proceso por el cual el individuo atribuye su comportamiento a causas internas o a causas externas es una percepción cognitiva sobre la manera como funcionan las cosas (Hewstone, 1992).

Esta tipología de datos nos ofrece información sobre las barreras de aprendizaje que podrían haber estado en la falta de desarrollo de *actitudes de valoración y gusto por la disciplina* o en la manera en la que ellos han experimentado la educación secundaria. En consecuencia, si queremos favorecer una mejor integración en la enseñanza universitaria, es necesario preguntarse de dónde vienen las creencias de los estudiantes y tratar de encontrar esclarecimiento, intentando

[5] Las creencias sobre el éxito y fracaso escolar se analizaron en términos del marco de la Teoría de la Atribución (Weiner, 1986), distinguiendo el lugar de la causa (interna o externa al sujeto) y si era controlable o no por el joven. Establecimos cuatro categorías de respuesta: interna incontrolable (ii), interna controlable (ic), externa controlable (ec) y externa incontrolable (ei).

buscar qué relaciones o significados aparecen en las explicaciones y experiencias que manifiestan de su propio contexto cultural de secundaria y que deben ser modificadas en el contexto universitario.

ADQUISICIÓN DE ACTITUDES MATEMÁTICAS

Una actitud positiva hacia la Matemática y, en particular, hacia el enfrentamiento con tareas matemáticas complejas es fundamental para iniciar a los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos. Pero, junto con esta valoración positiva del papel de la Matemática en la formación intelectual y como herramienta para la resolución de problemas en la vida diaria, hace falta *inculturar* al estudiante en las formas propias del quehacer matemático. Autores como Schoenfeld y Guzmán acuñaron este término de *inculturación* en la década de 1990 para designar las formas propias de proceder del matemático. Coincidimos con ellos en que el estudiante debe ser imbuido de ciertos hábitos y *actitudes matemáticas,* como la perseverancia en el trabajo, el interés, la motivación, la flexibilidad, el espíritu reflexivo y crítico, la apertura en la manera de percibir los problemas, etcétera.

Paso a comentar dos de estas *actitudes matemáticas* que, desde mi punto de vista, favorecen *la adquisición de procesos de pensamiento mediante la inculturación a través del aprendizaje activo*: la actitud inductiva y la actitud de precisión y rigor.

ACTITUD INDUCTIVA

Esta actitud requiere saber ascender de las observaciones a las generalizaciones y descender de las generalizaciones más altas a las observaciones más concretas; es lo que Polya (1966) denomina como actitud inductiva.

Urge cultivar en los estudiantes esta actitud: "Los alumnos han de aprender a decir 'puede ser' y 'quizás' en miles de formas diferentes". En nuestra vida personal nos aferramos con frecuencia a ilusiones. En muchos casos, no nos atrevemos a examinar ciertas creencias, que podrían contradecirse con la experiencia, por temor a destruir nuestro equilibrio emocional. Pueden darse circunstancias en las que no resulte insensato aferrarse a las ilusiones, pero en la ciencia, es necesaria una actitud muy diferente: la actitud inductiva.

Una actitud que reclama adaptar las creencias y experiencias tan eficazmente como sea posible:

> “estando dispuestos a revisar cualquiera de nuestras creencias”, “siendo capaces de cambiar una creencia cuando existe una razón compulsiva para ello”, “no cambiando las creencias frívolamente sin que haya una buena razón, sólo por la moda”. Para ello se necesita “coraje intelectual, honestidad intelectual, y sabia contención… las tres cualidades morales del científico” (Polya, 1966).

A continuación, nos detenemos en algunas definiciones y conceptos pertinentes para una mejor comprensión del concepto de actitud inductiva.

Es sabido que la *inducción* es el paso de lo particular a lo general. La *inducción*, como la sugerencia de una idea o una hipótesis, desempeña sin duda un papel importante en las matemáticas. Desde el punto de vista puramente heurístico, permite adivinar cuál deber ser, según todas las apariencias, la solución.

La generalización es una forma de inducción. El *razonamiento inductivo* conduce al descubrimiento de leyes generales a partir de la observación de casos particulares y sus combinaciones. La inducción es el paso de lo particular a lo general. La *generalización*, como proceso, va ligada en muchos casos a otro proceso previo de particularización. La *inducción* trata de descubrir, mediante la observación, la regularidad y la coherencia; sus instrumentos más visibles son la generalización, la particularización y la analogía.

El *método de inducción matemática* es un método especial de demostración matemática que permite, con base en observaciones particulares, juzgar las regularidades generales correspondientes. Éste es uno de los métodos más desconocidos. Cuando los estudiantes llegan a la universidad, desconocen cómo aplicarlo.

Por ejemplo, ante problemas como el siguiente:

Demostrar que si $a \geq 0$, $b \geq 0$, *entonces para todo* $n = 2, 3, 4, 5\ldots$ *se verifica que*

$$(n-1)\, a^n + b^n \geq n\, a^{n-1}\, b$$

los estudiantes tienen dificultades para resolverlos. Sin embargo, es posible establecer una gradación mediante la propuesta de los problemas de inducción más asequibles como el siguiente (triángulo de lados enteros):

Enunciado 1. ¿Cuántos triángulos con lados enteros hay en los que su lado mayor mida 15 cm? ¿Y si su lado mayor mide 20 cm?

Este problema es más factible y puede constituir una manera de familiarizar a los estudiantes con estos procesos. Además, podría plantearse a través de un enunciado más general:

Enunciado 2. Los tres lados de un triángulo tienen longitudes l, m *y* n *respectivamente. Las cifras* l, m *y* n *son enteros positivos;* l $\leq$ m $\leq$ n. *Encuentra el número de triángulos diferentes de la clase descrita para un* n *dado [Toma* n = *1, 2, 3, 4, 5, ...]. Encuentra una ley general que regule la subordinación del número de triángulos respecto de* n.

El problema inicial es este mismo problema para casos particulares de $n = 15$ y $n = 20$.

Si resolvemos el problema a partir del enunciado 2, un razonamiento inductivo, fijando el segundo lado (de mayor a menor) y recorriendo los posibles valores del tercero, nos revela la ley que subordina el número de triángulos con la medida entera n del lado mayor

Para $n = 2k + 1$ $\quad NT = 1 + 3 + 5 + \ldots (2k + 1) = (k + 1)^2 = (n + 1)^2/4$
Para $n = 2k$ $\quad NT = 2 + 4 + 6 + \ldots + 2k = (k + 1)k = (n + 1)^2/4 - {}^1/4$

O bien una expresión que aglutine a ambos (ésta fue propuesta por Polya, 1966, p. 479).

$NT = \{(n + 1)^2/4\}$ siendo {...} = entero más próximo.

En el caso particular de $n = 15$; $NT = 64$ triángulos.

Para $n = 20$; $NT = 110$ triángulos.

En este problema y otros problemas de inducción, las situaciones de bloqueo no se producen tanto por falta de conocimientos como por vislumbrar una enumeración tediosa y larga (Ledesma, 1996). Es de destacar que, a la hora de abordar un problema, el resolutor está dispuesto a proseguir la enumeración sólo hasta cierto punto. Ese momento de bloqueo es clave y muy rico y se caracteriza por:

- Se produce cierta paralización en el proceso de resolución.
- Se pueden dar renuncias a las enumeraciones, estrategias de recuento y cambios de estrategias o de procedimiento.
- Se experimenta ansiedad, desaliento e incertidumbre o entusiasmo.
- Es escasa la perseverancia del estudiante en este tipo de tarea.

Este momento es muy interesante en el aprendizaje; lo podríamos denominar *umbral de la generalización,* pues se puede intuir la manera de formular una regla general, para emitir una conjetura. En una concepción de la resolución de problemas como método de enseñanza, consideramos de interés forjar un modo de comportamiento en el estudiante, independientemente de la manera como esté planteado el enunciado, y considerar el problema un entorno de aprendizaje, una idea por explotar, un camino que seguir y no simplemente una pregunta que contestar o una solución que buscar. Los estudiantes siguen en muchos casos un patrón inductivo básico. Los alumnos que más avanzan en el proceso siguen el siguiente esquema:

- Recabar información en particular (primeras indagaciones, tanteos, cálculos simples, enumeraciones cortas, etcétera).
- Tomar nota de lo que ocurre para ir comprendiendo el problema y aprendiendo de la situación.
- Repetir las acciones anteriores tantas veces como sea necesario.
- Poder intuir y emitir una conjetura. La mayoría de los alumnos cree que esta conjetura ya es la solución, no es consciente de que sólo está formulando una posibilidad y que hay una provisionalidad en los razonamientos y en las conclusiones.

De acuerdo con este esquema que siguen los alumnos, el papel del profesor es clave. Es éste quien debe ayudar al estudiante a hacer la distinción entre *parece ser* y *por qué*... Los alumnos, al considerar las conjeturas como soluciones, no sienten la necesidad de justificarlas, ni siquiera de aportar argumentos que las confirmen.

Por tanto, en este ejemplo de la actitud inductiva que venimos analizando, el profesor debe trabajar la conciencia del estudiante sobre las conjeturas como solución, ya que el estudiante no siente la necesidad de justificarlas, ni siquiera de aportar argumentos que las confirmen. Además, como hemos dicho, el método de inducción completa parece desconocido. Pensamos que trabajar la recursividad puede facilitar la aproximación al método y ayudar a mejorar la capacidad de razonamiento combinatorio.

Además, si incorporamos la resolución de *problemas como contenido,* podemos estudiar la repercusión que produciría asumir consignas como éstas: ¿Qué información aporta el caso n para obtener la del caso $n + 1$?

La extracción del concepto apropiado de una situación concreta, la generalización a partir de los casos observados, los argumentos inductivos, los argumentos por analogía y los ejemplos intuitivos para una conjetura imprevista son modos matemáticos de pensamiento. De hecho, sin alguna experiencia en tales procesos "informales" de pensamiento, el estudiante no puede comprender el verdadero papel de la demostración formal y rigurosa.

Después de poner de relieve que el pensamiento matemático no es sólo razonamiento deductivo y la necesidad del desarrollo de la actitud inductiva, pasamos a comentar una segunda actitud que entre los alumnos de primer curso de universidad se constata poco adquirida: la actitud de precisión y rigor.

Actitud de precisión y rigor

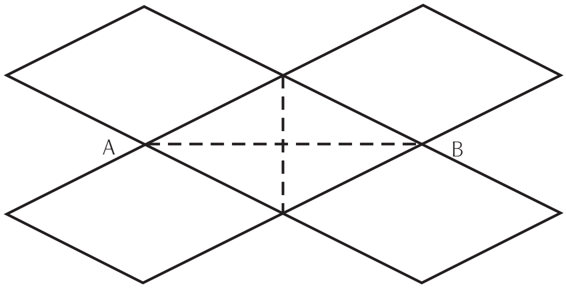
La Matemática suele percibirse como una ciencia exacta. Los estudiantes, partiendo de esta concepción, se ven presionados a contestar de manera clara y precisa. Cuando esto no es posible y encuentran aspectos en los que la ambigüedad tiene un papel fundamental para avanzar en el pensamiento, surge el *pánico*.

En el punto anterior ya hemos planteado la necesidad de una actitud inductiva propia de un razonamiento plausible constitutivo de la Matemática (de una Matemática más allá de una ciencia exacta). Aquí nos planteamos cómo trabajar elementos de precisión y rigor, genuinos en el quehacer matemático, sin que caigamos en el tratamiento moderno de las matemáticas que tan perjudicial ha sido para su aprendizaje.

Comenzamos por la comprensión del concepto. El término rigor admite interpretaciones diversas. Por rigor entenderemos la necesidad de que la búsqueda y obtención de resultados sea convincente, válida, coherente y comunicable. Aunque no entendemos el rigor como la necesidad de que una situación se exprese mediante un lenguaje preciso, breve y simbólico, hacemos notar, sin embargo, que durante el proceso de demostración es importante la precisión en el lenguaje matemático. El desarrollo de la potencia matemática de un estudiante implica el aprendizaje de los signos, símbolos y terminología de las matemáticas. Esto se consigue mejor en situaciones de resolución de problemas en las que los alumnos tienen oportunidad de leer, escribir y discutir ideas para las cuales el uso del lenguaje matemático es algo natural. A medida que comunican sus ideas, aprenden a clarificar, refinar y consolidar su pensamiento.

Cuando los estudiantes entran en los niveles universitarios, se les impone una presentación excesiva de la Matemática como producto axiomático deductivo. Los profesores nos deberíamos hacer conscientes de que hay varios niveles de rigor.

Figura 1



El estudiante debería aprender a comprender, buscar y criticar las demostraciones desde niveles que se acomoden a su madurez evolutiva. Si se lo empuja prematuramente a un nivel en exceso formal, puede desanimarse y hastiarse. Además, la necesidad de rigor puede advertirse mucho mejor en ejemplos en los que las demostraciones presentan dificultades reales.

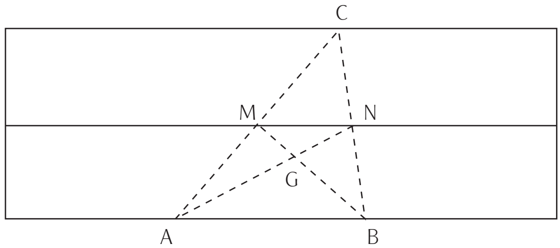
Un buen ejemplo para el cultivo de esta actitud es el siguiente:

Determinar el punto medio de un segmento AB, utilizando como único instrumento de dibujo una regla plana, no graduada, de bordes rectilíneos y paralelos.

Al resolver el problema nos damos cuenta de que podemos tener dos situaciones. Una primera situación es que la longitud del segmento AB sea mayor que la anchura de la regla. Se coloca la regla de manera que los extremos del segmento toquen sus bordes y se trazan sendas paralelas. Se coloca la regla en la otra posición, como indica la figura 1, y se trazan otras dos paralelas.

Y una segunda situación: que la longitud del segmento AB sea menor que la anchura de la regla. Se traza la recta que pasa por AB y, con la regla, una paralela a ésta: Sobre esta recta se pone de nuevo la regla y se traza otra paralela. La distancia entre dos paralelas coincide con la anchura de la regla. En la última paralela trazada se toma un punto C cualquiera y se une con A y con B. Los puntos M y N obtenidos son, por el teorema de Tales, los puntos medidos de los lados AC y BC del triángulo ABC, por tanto AN y BN son las medianas de ese triángulo. El punto donde se cortan las medianas es el baricentro G del triángulo, luego, trazando la tercera mediana, CG cortará el segmento AB en el punto medio (figura 2).

Figura 2



Este problema permite trabajar una solución clara e intuitiva a la par que rigurosa, posibilitando el desarrollo de ideas matemáticas con mayor fundamento. La idea de demostración rigurosa ha variado a lo largo del tiempo; depende del contexto y del entorno cultural. Desde el desarrollo de la Matemática moderna, que ponía un exagerado énfasis en la demostración formal, se ha producido un declive en el uso de cualquier tipo de demostración en los ámbitos de secundaria, esto tiene fuertes consecuencias en la transición a la universidad. Es crucial que el profesor de secundaria tome parte activa en ayudar a los alumnos a la comprensión de por qué la demostración es necesaria y cuándo es válida, favoreciendo actitudes de precisión y rigor. Sería un craso engaño abandonar al descubrimiento de los estudiantes la adquisición de métodos, esquemas mentales eficaces, información específica del campo de la prueba matemática, etcétera.

Con estos dos ejemplos, se ha querido reseñar que la enseñanza consiste básicamente en educar la atención, en producir cambios en el *locus*, en el foco y en la estructura de la atención, y estos cambios se pueden aumentar a través de otros, trabajando en la propia conciencia. Tradicionalmente se ha distinguido entre saber-qué, saber-cómo y saber-sobre (tener una historia para después dar cuentas), Skemp (1979) indicaba que también existía *saber-actuar*. *Saber-hacer* algo no es sólo *saber-cuándo*, qué es lo que tiene un sentido de conocimiento académico (escribir sobre ello) sin tener necesariamente el conocimiento práctico en el momento. *Saber-hacer* algo es el tipo de conocimiento que permite a las personas actuar de manera creativa y natural.

Aquí, intencionalmente, hacemos una distinción entre los automatismos que involucran conciencia en un nivel inconsciente y los hábitos que son comportamentales y para los que se requiere atraer la conciencia si se los quiere educar y cambiar. Por ejemplo, cuando tecleamos, los movimientos de nuestros dedos están informados; no estamos haciendo uso de un hábito que nos lleve siempre de una tecla a otra. De modo que la conciencia está presente en el nivel de los sentidos, en un metanivel, a través de un análisis cognitivo consciente y también en el nivel de realización de procesos automatizados (que en algún momento del pasado requirieron una conciencia tanto en el nivel de los sentidos como en el metanivel de análisis que les permitió llegar a ser automatizados). Esto es lo que hemos pretendido mostrar al lector con las ejemplificaciones de cómo trabajar las actitudes matemáticas.

EVALUACIÓN DE ACTITUDES

Una vez que en el desarrollo curricular se ha priorizado qué tipo de actitudes desarrollar en los estudiantes para favorecer esta inmersión en los modos propios del quehacer matemático, una de las dificultades mayores que el profesorado encuentra es que desconoce cómo medirlas y cómo evaluarlas y no posee los criterios suficientes para determinar su peso en el rendimiento de los alumnos. En el área de las actitudes, no se han dado a los profesores unos objetivos y contenidos análogos a los que poseen para la enseñanza del contenido matemático del currículo.

El tema de las actitudes en matemáticas se debe acompañar de técnicas relevantes y medios adecuados para su evaluación. Aunque aquí no nos podemos extender mucho, vamos a dar, sin embargo, algunas pistas sobre evaluación. Al lector interesado le recomendamos la lectura del libro *Matemática emocional* (Gómez-Chacón, 2000), del cual hemos extraído estos ejemplos.

La evaluación de *actitudes hacia la Matemática y actitudes matemáticas* se puede llevar a cabo usando diversas técnicas. Cada una de ellas presenta ventajas e inconvenientes, atendiendo al tiempo que el evaluador y el estudiante deben emplear para aplicarla, así como a la calidad y a la validez de la información recogida. Las técnicas que voy a describir son: la observación, los cuestionarios y escalas y los protocolos.

TÉCNICAS DE OBSERVACIÓN DE ACTITUDES

Uno de los métodos para la evaluación de actitudes es el observacional. Las ventajas de la observación, frente a otros métodos, es que hace posible obtener la información tal como ocurre. Es adecuada cuando los sujetos no pueden proporcionar informaciones verbales o cuando la utilización de otros métodos alteraría mucho sus conductas y provocaría resistencias por parte de las personas evaluadas.

Usualmente requieren que el profesor, o alguna otra persona, observe al estudiante y relate su comportamiento. Para ello, es importante determinar la técnica de registro y el instrumento de observación. Se puede elaborar una rejilla de observación o parrilla que recoja: nombre, actividad, comportamiento observado a través del establecimiento de categorías (indicadores de la actitud matemática) que deseamos evaluar con un instrumento más ajustado (cuadro 1).

Cuadro 1 Instrumento para la observación de actitudes matemáticas

Fecha: Acción observada	Nombre alumno 1	Nombre alumno 2	Nombre alumno 3
	Puntuación	Puntuación	Puntuación
Confianza: Hace preguntas	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7
Está seguro(a) de encontrar respuestas	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7
Aporta ideas en las actividades	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7
Otra/notas:	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7
Flexibilidad: Resuelve los problemas de más de una manera	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7
Cambia de opinión basado en argumentos convincentes	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7
Otra/notas:	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7
Perseverancia en el trabajo	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7
Otra/notas	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7
Interés por la actividad	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6 7

Cuestionarios y escalas de actitud

Se podría afirmar que la tendencia en los diferentes estudios ha sido el uso de los cuestionarios tipo escala Likert para la evaluación de las actitudes, formulados desde la perspectiva de la definición multidimensional de actitud (cognitiva,

Cuadro 2 Escala de actitudes: confianza hacia las matemáticas

Nombre ______________________________ **Curso** ______________________________

Fecha ______________________________ V ☐ M ☐

1. Estudiar o trabajar con las matemáticas no me asusta en absoluto.

Totalmente de acuerdo	De acuerdo	En desacuerdo	Totalmente en desacuerdo

2. Tengo confianza en mí mismo(a) cuando me enfrento a un problema de matemáticas.

Totalmente de acuerdo	De acuerdo	En desacuerdo	Totalmente en desacuerdo

3. Estoy calmado(a) y tranquilo(a) cuando me enfrento a un problema de matemáticas.

Totalmente de acuerdo	De acuerdo	En desacuerdo	Totalmente en desacuerdo

4. No me altero cuando tengo que trabajar en problemas.

Totalmente de acuerdo	De acuerdo	En desacuerdo	Totalmente en desacuerdo

5. Me provoca una gran satisfacción llegar a resolver problemas.

Totalmente de acuerdo	De acuerdo	En desacuerdo	Totalmente en desacuerdo

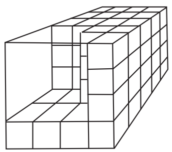
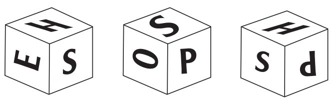
afectiva y comportamental) y en los que se tiene en cuenta la confianza y la motivación matemática como principales dimensiones con respecto a su influencia en el aprendizaje.

Presentamos dos maneras diferentes de evaluación de confianza hacia las matemáticas: escala Likert de actitud (cuadro 2) y cuestionario de problemas (cuadro 3).

Otra manera distinta de evaluar la confianza en matemáticas es el siguiente cuestionario (cuadro 3). Se trata de un cuestionario que pretende medir el nivel de confianza que tiene el sujeto en relación con las respuestas. Para ello, se establecen cinco columnas (cinco niveles de confianza): "estoy seguro que es correcto", "creo que es correcto", "apuesto en 50% a que es correcto", "creo que es incorrecto", "estoy seguro de que es incorrecto".

Los participantes deben responder a todas las preguntas, indicando su nivel de confianza. Para establecer el nivel de confianza, se adjudican las siguientes puntuaciones: "estoy seguro de que es correcto" (4 puntos), "creo que es correcto"

Cuadro 3 Ejemplos de preguntas planteadas en el cuestionario

	Respuesta	Estoy seguro de que es correcto	Creo que es correcto	Apuesto en 50% a que es correcto	Creo que es incorrecto	Estoy seguro de que es incorrecto
Ejemplo: 6×4	24	X				
1. ¿Cuál de estos tres decimales es más grande? 0.5 0. 416 0. 0964						
2. ¿Cuántos cubos hay en esta caja? 						
3. ¿Cuántos cubos de 1 cm × 1 cm × 1 cm es necesario colocar en una caja de 3 cm × 3 cm × 10 cm?						
4. Un juego de palabras utiliza dados con una letra en cada cara. En la figura se ven tres aspectos distintos de uno de estos dados.  ¿Qué letra es la que figura en la cara opuesta a la que ocupa la H?						
5. Si A es un número y si $(A+1)^{\frac{1}{2}} = 4$, entonces $(A-6)^{\frac{1}{2}} = \square$						

(3 puntos), "apuesto en 50% a que es correcto" (2 puntos), "creo que es incorrecto" (1 punto), "estoy seguro de que es incorrecto" (0 puntos). Se suman los puntos de cada pregunta y se obtiene el nivel de puntuación total. El cuestionario completo pueden encontrarlo en Gómez-Chacón, 2000, pp. 241-243).

Hemos tomado estos dos instrumentos para poner de relieve el tipo de evaluaciones que realizan los estudiantes como indicador de sus actitudes y que un profesor debería tener en cuenta en la evaluación de actitudes. Las primeras reacciones de valoración del estudiante tienen que ver con asociaciones, cuando no está implicado en una tarea concreta, por ejemplo, si el estímulo es un cuestionario para indagar sobre sus actitudes (cuadro 2). Estas asociaciones automáticas se producen por experiencias previas con las matemáticas. Ahora bien, en este caso de utilización de cuestionarios como el del cuadro 3, el estudiante puede experimentar procesos cognitivos de evaluación variados al dar la respuesta. En este caso, el estudiante puede imaginar una situación matemática y esperar experimentar una emoción al imaginar esta escena, o bien, evaluarlo de acuerdo con lo que está experimentando al resolver el problema. Esta segunda evaluación es más cognitiva. Para la evaluación de la actitud, es importante establecer diferencias entre lo que el estudiante opina y lo que el estudiante experimenta cuando actúa sobre una situación.

¿ES POSIBLE DESARROLLAR EXPERIENCIAS DE INNOVACIÓN DESDE ESTOS ELEMENTOS?

A continuación, paso a reseñar brevemente una experiencia institucional que se viene desarrollando desde 1999 en la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid (UCM), donde trabajo.

Hace unos años, nuestra experiencia en el primer año de la licenciatura de Matemáticas era de un número elevado de reprobados (alrededor de 60%), una tasa baja de asistencia a clase y un índice de abandono de los estudios tras el primer curso de aproximadamente 30% (Pozo, 2006). Conscientes de la especial dificultad del primer curso para los alumnos de los estudios científicos y técnicos, nuestro plan de estudios (de 1995) incorporaba un primer curso compuesto por sólo cuatro asignaturas anuales (Álgebra Lineal y Geometría, y Análisis de Variable Real, de 18 créditos, y Álgebra Básica e Informática, de 9 créditos) para permitir un periodo de tiempo de asimilación más largo. Posteriormente, en 1999 se incorporó una asignatura genérica, Laboratorio de Matemáticas, de 7.5 créditos, reservada para los alumnos nuevos de primero de Matemáticas. En un principio, se hacía a lo largo del primer cuatrimestre, pero con el tiempo, se fue adelantando y comprimiendo hasta su forma actual, que se imparte de manera intensiva durante los meses de septiembre y octubre para que sirva de punto de arranque para las demás asignaturas con un periodo previo de intensificación "en las actitudes positivas hacia el quehacer matemático". Dicha asignatura se imparte en cinco grupos (todos están incluidos actualmente en el programa de grupos piloto de la UCM adaptados al EEES).

En el diseño e implementación de esta asignatura, han participado durante los últimos años distintos profesores del Centro: entre ellos, el profesor Miguel de Guzmán, fallecido en abril de 2004, que se implicó con entusiasmo en el proyecto desde sus inicios (Guzmán, 2000). Durante el presente curso 2008-2009, la asignatura está siendo impartida por los profesores Sixto Álvarez, María Gaspar, Ángeles Prieto, Mercedes Sánchez e Ignacio Villanueva, quienes han perfilado –sobre el fruto del trabajo realizado los años precedentes– el material que está recogido en el sitio web: http://www.mat.ucm.es/~angelin/labred/. El curso se ha estructurado para ser impartido en sesiones de tres horas diarias durante cinco semanas al comienzo de curso escolar.

El objetivo de esta asignatura es ayudar a los estudiantes de primer año a hacerse de procedimientos prácticos básicos para afrontar las dificultades de adaptación al estudio de las matemáticas en la universidad. Uno de los objetivos primordiales es que los alumnos adquieran práctica en distintas estrategias y técnicas más comunes en la resolución de problemas matemáticos (Guzmán, 1995).

El curso, eminentemente práctico, pretende que los estudiantes que inician sus estudios se introduzcan de manera eficaz en el trabajo matemático. Se trataban temas como:

1. Diferencias entre el lenguaje natural y el lenguaje matemático.
2. Familiarización con el ejercicio y formas diversas de la demostración matemática.
3. Introducción de distintas nociones relativas a conjuntos: las relaciones de equivalencia en un conjunto, las aplicaciones entre conjuntos y la cardinalidad.
4. Algunos conceptos que tradicionalmente se suponían conocidos por los alumnos de bachillerato y que, en la actualidad, no se estudian en muchos centros. Son temas que forman parte de lo que se conoce como Matemática Discreta.

5. Repaso de algunos aspectos fundamentales del Cálculo que se supone que los estudiantes han adquirido en su paso por la enseñanza secundaria con mayor o menor profundidad.
6. Repaso de algunas ideas y técnicas en torno al Álgebra y la Geometría, ya tratadas en la enseñanza secundaria.
7. Familiarización con el uso de la visualización en el quehacer matemático.

La propuesta de Laboratorio de Matemáticas que se desarrolla en la UCM no se centra tanto en los contenidos matemáticos, sino en las prácticas y en los modos propios del hacer de los matemáticos (los matemáticos se consideran aquí como nivel individual y como cultura colectiva), lo que Miguel de Guzmán denominó *la adquisición de procesos de pensamiento mediante la inculturación a través del aprendizaje activo* (Guzmán, 2000). Por tanto, se trata de ayudar a los estudiantes a desarrollar la experiencia matemática mediante el cultivo de actitudes matemáticas y la estructuración de algunos conocimientos básicos.

CONCLUSIONES

En este trabajo, se ha tratado de poner de relieve que gran parte de la dimensión emocional de aceptación o rechazo de la Matemática en la transición del bachillerato a la universidad está estrechamente ligada a los *procesos cognitivos y conativos*. Nos hemos centrado en el tema de *actitudes hacia la Matemática y actitudes matemáticas* por considerarlas clave en *la inculturación del estudiante en el quehacer matemático*.

Las matemáticas constituyen un área particularmente propicia para el desarrollo de ciertas actitudes relacionadas con los hábitos de trabajo, la curiosidad y el interés por investigar y resolver problemas, con la creatividad en la formulación de conjeturas, la flexibilidad para cambiar el propio punto de vista, la autonomía intelectual para enfrentarse a situaciones desconocidas y la confianza en la propia capacidad de aprender y resolver problemas.

Ahora bien, como hemos querido mostrar con los ejemplos que hemos seleccionado, es importante trabajar una *dimensión constructiva-preparatoria* que abarca *estrategias dinamizadoras (motivadoras)* y *estrategias de preparación* (previendo condiciones, resultados y modos de actuación como estudiantes universitarios).

Al introducir las *actitudes matemáticas* como estrategia de anticipación constructiva, tratamos de afirmar que el bagaje matemático previo del estudiante que comienza en primero de universidad es una variable importante a la hora de comprender el fenómeno de dificultades de origen afectivo en matemáticas (o fenómeno de ansiedad hacia las matemáticas). Lógicamente, una mayor preparación anterior de los estudiantes conlleva una menor reacción de estrés ante nuevas situaciones de resolución de problemas.

Pensar de manera matemática supone trabajar, esforzarse. Si las actitudes negativas o los estados de ansiedad hacia la Matemática han bloqueado la capacidad de razonamiento, un paso importante es conseguir que el pensamiento siga funcionando. Para ello, es clave la conciencia y la autorregulación por parte del estudiante, pero también la metodología del profesor. En este trabajo, hemos puesto énfasis en un método activo de aula que favorezca la inmersión en actitudes matemáticas y que pueda ayudar al diagnóstico y evaluación de actitudes hacia la Matemática que sean un obstáculo en el aprendizaje.

Cuando se trata de estudiar actitudes y comportamiento, es decir, cómo se comporta una persona dentro de una situación, esto depende, por una parte, de las creencias particulares o la predisposición activada por la actitud hacia el objeto y, por otra parte, de las creencias o predisposición activada por la situación. La acción es determinada no sólo por una simple actitud, sino por un número de actitudes y por las condiciones de la situación. En las manos del profesor y de las instituciones educativas está propiciar una mejor interacción entre las actitudes y las situaciones a través de una mejor calidad en las situaciones de aprendizaje.

Por último, es preciso indicar que hemos querido poner de manifiesto que la emoción positiva del estudiante puede provenir de hacerse *consciente* de que su *conciencia* está siendo educada. La sensación de que se crece en el *aprendizaje personal* y se tiene la capacidad de control sobre las cosas es muy emocionante y es resultado de *la educación de la conciencia*. Creemos que esta sensación de crecimiento personal es la manera más grande y efectiva de motivación en clase, y lamentablemente tememos que muchos estudiantes la experimentan de manera poco frecuente en sus clases de matemáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Aiken, R. L. y D. R. Aiken (1969), "Recent research on attitudes concerning science", *Science Education*, núm. 53, pp. 295-305.

Artigue, M. (2004), "Le défi de la transition secondaire/supérieur: que peuvent nous apporter les recherches didactiques et les innovations développées dans ce domaine?", trabajo presentado en el Primer Congreso Franco-canadiense de Ciencias Matemáticas, Toulouse, Francia.

Artigue, M., C. Batanero y P. Kent (2007), "Mathematics thinking and learning at post-secondary level", en F. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* Greenwich, Connecticut, Information Age Publishing, pp. 1011-1049.

Bosch, M., C. Fonseca y J. Gascón (2004), "Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 24, núms. 2-3, pp. 205-250.

Buxton, L. (1981), *Do You Panic About Maths? Coping with Maths Anxiety,* Londres, Heinemann Educational Books.

Callejo, M. L. (1994), *Un club matemático para la diversidad,* Madrid, Narcea.

Chevallard, Y. (1992), "Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées para une approche anthropologique", *Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 12, núm. 1, pp. 77-111.*

Di Martino P. y R. Zan (2001), "Attitude toward mathematics: some theoretical issues", en *Proceedings of PME 25,* Utrecht, Países Bajos, vol. 3, pp. 351-358.

Dreyfus, T. (1999), "Why Johny can't prove", *Educational Studies in Mathematics,* núm. 38, pp. 85-109.

Estrada, A. (2002), "Actitudes hacia la Estadística e instrumentos de evaluación", en *Actas de las Jornades Europees d' Estadística,* Palma de Mallorca, Instituto Balear de Estadística, pp. 369-384.

Goldin, G. A. (2000), "Affective pathways and representation in mathematical problem solving", *Mathematical Thinking and Learning,* vol. 2, núm. 3, pp. 209-219.

Golovina, L .I. e I. M. Yaglóm (1976), *Inducción en Geometría,* Moscú, Mir.

Gómez-Chacón, I. Ma. (2000), *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático,* Madrid, Narcea.

——— (en prensa), "Mathematics attitudes in computerized environments. A proposal using GeoGebra", en L. Bu, R. Schoen, M. Hohenwarter y Z. Lavicza (eds.), *Model-centered Learning with GeoGebra: Theory and Practice in Mathematics Education,* Nueva York Sense Publisher.

Gómez-Chacón, I. Ma. y C. Haines (2008), "Students' attitudes to mathematics and technology. Comparative study between the United Kingdom and Spain", en *ICME-11, 11th International Congress on Mathematical Education,* (http://tsg.icme11.org/tsg/show/31).

Gueudet, G. (2004), "Rôle du géométrique dans l'enseignement de l'algèbre linéaire", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 24, núm. 1, pp. 81-114.
——— (2008), "Investigating the secondary-tertiary transition", *Educational Studies in Mathematics*, núm. 67, pp. 237-254.
Guzmán, M. de (1995), *Para pensar mejor. Desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos*, Madrid, Pirámide.
——— (2000), *Pensamientos en torno al quehacer matemático*, CD- ROM.
Guzmán, M. de y otros (1998), "Difficulties in the passage from Secondary to Tertiary Education. Documenta Mathematic", *Extra volume ICM 1998-III*, pp. 735-746.
Hannula, M. (2002), "Attitude toward mathematics: emotions, expectations and values", *Educational Studies in Mathematics*, núm. 49, pp. 25-46.
Hart, L. (1989), "Describing the Affective Domain: Saying what we mean", en Mc Leod y Adams (eds.), *Affect and Mathematical Problem Solving*, Springer Verlag, pp. 37-45.
Hernández, R. e I. Ma. Gómez-Chacón (1997), "Las actitudes en educación matemática. Estrategias para el cambio", *UNO Revista de Didáctica de las matemáticas, Monográfico Actitudes y Matemáticas*, núm. 13, pp. 41-61.
Hewstone, M. (1992), *La atribución causal. Del proceso cognitivo a las creencias colectivas*, Barcelona, Paidós.
Hoyles, C., K. Newman y R. Noss (2001), "Changing patterns of transition from school to university mathematics", *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 32, núm. 6, pp. 829-845.
Iannone, P. y E. Nardi (2007), "The interplay between syntactic and semantic knowledge in proof production: Mathematicians' perspectives", en *Proceedings of the Fifth Congress of European Society for Research in Mathematics Education (CERME 5)*, Larnaca, Chipre.
Kulm G. (1980), "Research on Mathematics Attitude", en R. J. Shumway (ed.), *Research in Mathematics Education*, Reston, VA, NCTM, pp. 356-387.
Leder, G. y H. J. Forgasz (2006), "Affect and mathematics education", en A. Gutiérrez y P. Boero (eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, Nueva York, Sense Publishers, pp. 403-427.
Leder, G. C., E. Pehkonen y G. Töner (eds.) (2002), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education*?, Holanda, Kluwer Academic Publishers.
Ledesma, A. (1996), "Problemas de inducción en el Open Matemático", *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, núm. 8, pp. 39-52.

Liston, M. y J. Odonoghue (2008), "The influence of affective variables on student's transition to university mathematics", en *ICM-11 Proceedings*, Monterrey, Mexico.

McLeod, D. (1992), "Research on affect in mathematics education: A reconceptualization", en D. Grows (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, McMillan, pp. 575-596.

NCTM (1989), *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*, NCTM, 1989, publicado en castellano por la Sociedad Andaluza para la Educación Matemática, THALES.

Nimier, J. (1976), *Mathématique et affectivité*, París, Stock.

Polya, G. (1966), *Matemáticas y razonamiento plausible*, Madrid, Tecnos.

Pozo, L. (2006), "Convergencia europea: la experiencia piloto en el primer curso de Matemáticas en la UCM", en *Actas de la I Jornadas nacionales de intercambio de experiencias piloto de implantación de metodologías, ECTS*, Badajoz, del 13 al 15 de septiembre.

Praslon, F. (2000), *Continuités et ruptures dans la transition terminale S/DEUG Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement*, Tesis de Doctorado de la Université Paris 7.

Robert, A. (1998), "Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 18, núm. 2, pp. 139-190.

Ruffell M., J. Mason y B. Allen (1998), "Studying attitude to mathematics", *Educational Studies in Mathematics*, núm. 35, pp. 1-18.

Schoenfeld, A. H. (1983), "Beyond the purely cognitive: Beliefs systems, social cognitions, and metacognitions as driving forces in intellectual performance", *Cognitive Science*, núm. 7, pp. 329-363.

——— (1985), *Mathematical problem solving*, Orlando, Academic Press.

Selden, A. y J. Selden (2005), "Perspectives on advanced mathematical thinking", *Mathematical Thinking and Learning*, vol. 7, núm. 1, pp. 1-13.

Sierpinska, A. (2000), "On some aspects of students' thinking in linear algebra", en J. L. Dorier (ed.), *On the teaching of linear algebra*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 209-246.

Skemp, R. (1979), *Intelligence, Learning and Action*, Chichester, Wiley.

Sominski, I. S. (1975), *Método de inducción matemática*, Moscú, Mir.

Tall, D. (ed.) (1991), *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Tobias, S. (1978), *Overcoming Math Anxiety*, Nueva York, Norton.

Weiner, B. (1986), *An Atributtional Theory of Motivation and Emotion,* Nueva York, Springer-Verlag.
Wood, T. (2001), "The secondary-tertiary interface", en D. Holton (ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 87-98.

DATOS DE LA AUTORA

Inés Ma. Gómez-Chacón
Facultad de Ciencias Matemáticas,
Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España
igomezchacon@mat.ucm.es