Una herramienta para el estudio funcional de las matemáticas: los Recorridos de Estudio e Investigación (REI)

Cecilio Fonseca Bon, Alejandra Pereira Añón y José Manuel Casas Miras

Resumen: Este trabajo[1] pretende, a partir de una propuesta inicial y abierta del concepto de recorrido de estudio e investigación (REI), elaborada por Chevallard, diseñar un modelo teórico particular de REI para utilizarlo en la creación de secuencias de enseñanza y aprendizaje para desarrollar en el aula que permitan actuar sobre la actividad matemática institucional y donde la modelación y la tecnología tengan un fuerte protagonismo. Después, presentamos el esbozo de un proceso de estudio, que no está experimentado todavía, el cual sitúa el estudio funcional de las matemáticas en el corazón de la actividad matemática que desarrollarán los alumnos.

Palabras clave: Teoría Antropológica de lo Didáctico; recorrido de estudio e investigación; ingeniería; modelación matemática; secuencia de enseñanza y aprendizaje.

A tool for functional study of mathematics: Research and Study Tours (REI)

Abstract: This paper pretends, starting from an initial and open proposal of the concept of Trajectory of Study and Research (REI, in Spanish) elaborated by Chevallard, to design a particular theoretical model of REI, to be used in the creation of teaching and learning sequences to be developed in a classroom, that allow to act on the institutional mathematical activity and, where the modeling and the technology have a strong protagonism. Then, we present the sketch of a study process that is not experimented yet, that situates the functional study of mathematics in the heart of mathematical activity to develop by students.

Keywords: Anthropological Theory of the Didactic; trajectory of study and research; engineering; mathematical modeling; sequence for teaching and learning.

Fecha de recepción: 2 de marzo de 2010.

[1] Forma parte del proyecto EDU2008-02750/EDUC.

INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas más acuciantes de la educación matemática actual consiste en la *pérdida de sentido de las matemáticas escolares*. Este fenómeno se manifiesta de múltiples maneras que van desde la falta de motivación de los alumnos para estudiar matemáticas y la consiguiente desorientación de los profesores hasta la disminución progresiva del peso de las matemáticas en el currículo y la invisibilidad de las matemáticas en la sociedad. A este aparente aislamiento de los contenidos matemáticos, se contrapone una renovación general de los instrumentos del trabajo matemático a partir de las nuevas tecnologías de la información y, muy especialmente, de la difusión del uso de las calculadoras simbólicas.

Durante muchos años, la "modelación y las aplicaciones" han estado limitadas en las instituciones escolares a la aplicación de un conocimiento matemático, previamente aprendido por los alumnos, a determinadas situaciones más o menos reales, con la doble finalidad de mostrar su utilidad y servir de motivación al aprendiz. Aun hoy día este uso perdura en los sistemas de enseñanza. Sin embargo, en el ámbito de la investigación en Educación Matemática, la "modelación y las aplicaciones" constituyen un dominio de investigación que no ha dejado de crecer intensamente en los últimos años. Por un lado, muchos enfoques en Educación Matemática, avalados por informes internacionales como PISA, propugnan la *necesidad de enseñar las matemáticas como una herramienta de modelación*, especialmente de cuestiones o situaciones que surgen fuera del ámbito de las matemáticas. Por otro, aparece como una exigencia del Espacio Europeo de Educación Superior (EEES). Se piensa que la modelación puede convertirse en una herramienta potente para el estudio escolar de las matemáticas, que debe venir acompañada de una renovación general de los instrumentos del trabajo matemático a partir de las nuevas tecnologías de la información y, muy especialmente, de la difusión del uso de las calculadoras.

La necesidad de que la comunidad matemática nuclear tome parte activa y considere como propio el estudio del problema de la Educación Matemática ha sido reclamada desde diferentes ámbitos. Así, por ejemplo, en Guzmán (1996), se propone explícitamente que los matemáticos participen en los siguientes aspectos de dicho problema:

a) En la elaboración de nuevos diseños de aprendizaje matemático de nivel primario, secundario y terciario, subrayando que, en el nivel universitario, es tanto o más urgente que en los niveles primarios y secundarios, por cuanto que ha sido el más descuidado tradicionalmente.

b) Puesto que la mayor inercia en la utilización de las nuevas herramientas informáticas se presenta actualmente en el nivel universitario, es importante que los matemáticos intervengan muy activamente en el *análisis de los beneficios y los inconvenientes* que se pueden derivar del uso masivo de dichas herramientas.

c) Uno de los aspectos o, si se prefiere, un síntoma de algunos de los aspectos del problema de la Educación Matemática, lo constituye la invisibilidad social de la actividad matemática. Los investigadores en matemáticas deben colaborar activamente en la necesaria tarea de hacer la matemática más claramente visible en la sociedad actual.

Una herramienta muy utilizada por los profesores en la creación de secuencias de enseñanza y aprendizaje son los libros de texto y, por tanto, éstos constituyen buenos indicadores del tipo de actividad matemática que se propone en las instituciones y actúan, en la mayoría de los casos, como el verdadero diseño curricular implementado. Las tareas "abiertas" están casi ausentes de los libros de texto y las pocas que aparecen en la actividad matemática se reducen a la manipulación de un modelo matemático dado previamente, por lo que la actividad de modelación matemática (que incluye la elección de las variables pertinentes y la construcción del modelo matemático de una situación dada) está totalmente ausente. En este sentido Michel Artigue, refiriéndose al caso francés, apunta que:

> en el diseño curricular del bachillerato francés en 1982, se quería organizar la enseñanza del Análisis alrededor de problemas de gran alcance y significativos. Se nota, por una parte, una vez más un desfase creciente entre estos anhelos, expresados siempre en los programas y, por otra, la organización y el contenido de los libros de texto. Los libros recientes más difundidos derivan hacia una acumulación poco estructurada de problemas limitados cuya resolución se descompone en tantas subpreguntas que los estudiantes, simples ejecutantes de micro tareas, pierden todo acceso a su problemática global (Artigue, 1998, pp. 40-55).

El reto que nos planteamos en el presente trabajo es intentar paliar, en la medida de lo posible, las carencias anteriormente descritas. Por ello, nuestro objetivo es articular y completar un modelo de dispositivo didáctico denominado *recorrido de estudio e investigación (REI)* presentado en Fonseca (2007). El REI permitirá dar respuesta a la problemática anteriormente descrita mediante el diseño y construcción de secuencias de enseñanza y aprendizaje para articular la actividad matemática entre la secundaria[2] y la universidad. Se pretende que el profesor encuentre en la didáctica de las matemáticas modelos de aprendizaje que pueda transportar al aula, algo que hoy día parece estar monopolizado casi en exclusiva por los libros de texto. En los recorridos de estudio e investigación, además de primar en todo momento el proceso dinámico, se prioriza el carácter funcional de las matemáticas, situándolo como el corazón de la construcción de la actividad matemática, y la herramienta informática tiene un importante protagonismo. Este dispositivo encaja muy bien en el marco institucional en el que trabajamos que, en este caso concreto, está restringido a las escuelas de ingeniería, donde la actividad matemática debe tener un carácter muy instrumental.

En este trabajo, que está en una fase inicial, estamos analizando algunas de las áreas del currículo de matemáticas (aquí nos restringiremos a ciertos temas de cálculo que se estudian a caballo entre bachillerato y el primer curso universitario) para poner de manifiesto cómo las limitaciones e insuficiencias de los contenidos de cada etapa educativa deberían motivar y dar sentido a los contenidos de la siguiente.

Nos centramos, sobre todo, en el modelo teórico que estamos diseñando y desarrollando. Después, estudiamos la pertinencia de ese modelo teórico para un caso particular que forma parte de un estudio de investigación más amplio que persigue la creación de actividad matemática en el paso de secundaria a la universidad dentro de la institución educativa española.

ANTECEDENTES

Este trabajo se desarrolla en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997). Empezaremos describiendo de una manera muy simplificada la estructura de las *organizaciones* (o *praxeologías*) *matemáticas,* indicando cuáles son sus componentes e ilustrándola con algunos ejemplos sencillos. La primera noción primitiva que utilizaremos para describir

[2] En España, la enseñanza secundaria comprende dos etapas: la educación secundaria obligatoria (4 cursos), y el bachillerato (dos cursos).

las organizaciones matemáticas es la de *tipo de tareas matemáticas* (T). Ésta es una noción muy general, que incluye cualquier tipo de tareas que sean consideradas "matemáticas" en la institución de referencia. Son ejemplos de tipos de tareas matemáticas en la institución docente universitaria: resolver una ecuación diferencial; buscar una base de un espacio vectorial; descomponer un polinomio en factores primos sobre un cuerpo dado; calcular, con cierto grado de aproximación, las soluciones de una ecuación; decidir si un objeto matemático cumple o no las hipótesis de un teorema dado; modelar un sistema físico o biológico mediante un modelo matemático y axiomatizar una teoría matemática, entre otras muchas.

Postulamos que la realización de cualquier tipo de tareas T requiere poner en funcionamiento una *técnica* τ, esto es, una "manera de hacer sistemática y compartida" que depende obviamente de T y de la institución en que nos situemos. Tenemos así un bloque *práctico-técnico* que denotaremos mediante el símbolo $[T/\tau]$ y que está formado por un tipo de tareas T, y una técnica t que la institución considera pertinente para llevar a cabo las tareas de este tipo. Es importante subrayar que, normalmente, cada técnica concreta sólo permite realizar un pequeño subconjunto de las tareas del tipo T de la cual es relativa y fracasa en la realización de las restantes tareas de ese tipo.

Todos los tipos de tareas matemáticas citados anteriormente ponen de manifiesto de manera muy clara esta limitación de las técnicas matemáticas habituales. Así, por ejemplo, las técnicas para descomponer un polinomio en factores primos tienen un ámbito de validez muy restringido y las técnicas que permiten buscar una base en el caso de espacios vectoriales de dimensión finita, no siempre son aplicables al caso de espacios vectoriales de dimensión infinita. Estos mismos ejemplos muestran que una técnica matemática t no es, excepto en rarísimas excepciones, ni algorítmica ni casi algorítmica.

El bloque *práctico-técnico* $[T/\tau]$ no puede vivir aisladamente en una institución. Requiere la existencia de un "discurso racional" (*logos*) que *justifique* la técnica (*tekhnè*) y *muestre su pertinencia* para llevar a cabo el tipo de tareas T. Llamaremos *tecnología de* t a este discurso, que es un discurso matemático, y lo designaremos con el símbolo θ. Así, por ejemplo, el teorema de Bolzano puede hacer el papel de elemento tecnológico (esto es, componente de la tecnología) de una de las técnicas que se utilizan inicialmente para aproximar las soluciones de una ecuación. Otras funciones de la tecnología son: *explicar* y *hacer inteligible el funcionamiento* de la técnica, *relacionarla* con otras técnicas y, lo que es más importante, *producir nuevas técnicas*. El discurso tecnológico contiene siempre afirmaciones más o menos explícitas que, a su vez, pueden requerir justificación en una institución determinada. Se pasa entonces del nivel de justificación-explicación-producción de la técnica (que es el nivel de la tecnología) al nivel de justificación-explicación-producción de la tecnología, que denominamos el nivel de la *teoría de* θ, y que designaremos mediante el símbolo Θ. La *teoría* desempeña, respecto de la *tecnología,* el mismo papel que ésta desempeñaba respecto de la *técnica*. Así, por ejemplo, el teorema de Bolzano, considerado como un elemento tecnológico, puede ser justificado, a su vez, en una teoría axiomática de los números reales que contenga el axioma del supremo.

Resumiremos lo anterior diciendo que, junto al bloque *práctico-técnico* [T/τ] tenemos, dentro de las organizaciones matemáticas institucionalizadas, un segundo bloque, el *tecnológico-teórico* [q/Θ]. El sistema formado por los cuatro componentes constituye una *praxeología* (u *organización*) matemática que consideramos como la *unidad mínima* en que puede describirse la actividad matemática y que designaremos mediante OM $= [T/\tau;\ \theta/\Theta]$.

Las nociones de “tarea”, “técnica”, “tecnología” y “teoría” son doblemente relativas. En primer lugar, son *relativas a la institución de referencia*. Esto significa que lo que es considerado como una tarea (o técnica o tecnología o teoría) matemática en una institución I no tiene por qué serlo en otra institución I’. De hecho, en una institución dada, únicamente pueden considerarse como “tipos de tareas”, T, aquéllas para las que se dispone de algún tipo de técnica, t, con su entorno tecnológico-teórico, [θ/Θ], más o menos explícito. Así, por ejemplo, en secundaria, la descomposición en factores primos de números “pequeños” es una *tarea,* pero la de números “grandes” no lo es.

Para estudiar la rigidez de la actividad matemática de secundaria, en Fonseca (2004) se formuló una conjetura general en forma de hipótesis:

H(S): En secundaria (S) el estudio de las organizaciones matemáticas se centra en el bloque práctico-técnico, la incidencia del bloque tecnológico-teórico sobre la actividad matemática que se realiza efectivamente es muy escasa. No se cuestiona hasta qué punto están justificadas las técnicas que se utilizan, ni la interpretación de los resultados que proporcionan dichas técnicas, ni su alcance o dominio de validez, ni su pertinencia para llevar a cabo una tarea determinada, ni su eficacia, ni su economía, ni sus relaciones con otras técnicas, ni sus limitaciones, ni las posibles modificaciones que podrían sufrir dichas técnicas para aumentar su eficacia en la realización de ciertas tareas. Como consecuencia, la actividad matemática que se estudia en secundaria es *puntual, rígida* y *aislada* (o *poco coordinada* entre sí).

Describimos mediante cinco *conjeturas específicas* algunas de las características principales de esta rigidez:

Conjetura 1. Dependencia de la nomenclatura asociada a una técnica

En la universidad se considera que la "nomenclatura" es irrelevante y que un simple cambio de los símbolos que se utilizan para poner en marcha una técnica no puede representar una modificación importante de la actividad matemática.

Conjetura 2. Aplicar una técnica no incluye interpretar el resultado

En secundaria no se exige interpretar adecuadamente el resultado de aplicar una técnica para considerar que dicha técnica ha estado "correctamente" utilizada. Así, por ejemplo, el uso escolar de las técnicas para calcular límites de funciones no incluye ninguna "interpretación" de los resultados obtenidos.

Conjetura 3. No existen dos técnicas diferentes para realizar una misma tarea

En secundaria se utilizan *técnicas aisladas y muy rígidas* hasta el punto de que, aunque "existan" –en la práctica docente del profesor y en los libros de texto– dos técnicas diferentes para un mismo tipo de tareas, *no forma parte de la responsabilidad matemática del alumno* –en el contrato didáctico– *decidir cuál de las dos técnicas es la más pertinente para cada tarea concreta*. Suele suceder, además, que una de las dos técnicas se acaba imponiendo, de tal manera que se convierte en *la* manera de resolver ese tipo de problemas en secundaria, adquiriendo un carácter *autotecnológico* y provocando la práctica desaparición de la técnica rival.

Conjetura 4. Ausencia de técnicas para realizar una tarea "inversa"

Uno de los aspectos más importantes de la *rigidez* de las OM que se estudian en secundaria se manifiesta en la *no reversión* de las técnicas matemáticas correspondientes. En términos del contrato didáctico, podemos decir que, en secundaria, *no forma parte de la responsabilidad matemática del alumno invertir una técnica para llevar a cabo la tarea inversa*. Podría decirse, más en general, que el contrato didáctico en secundaria no asigna al alumno la responsabilidad de modificar una técnica "conocida" de manera adecuada para llevar a cabo una tarea *un poco diferente* de la tarea inicial. Esta conjetura implica, en particular, que cuando existen dos tareas "inversas" entre sí (esto es, tareas con los datos y las incógnitas intercambiados) las correspondientes técnicas suelen tratarse como si fueran "independientes".

Conjetura 5. Ausencia de situaciones abiertas de modelación

La ausencia de técnicas *explícitas* de modelación comporta que, en ambas instituciones (secundaria-universidad), la modelación matemática constituya una de las actividades más problemáticas y menos reguladas. Al aceptarse implícitamente (sobre todo en la universidad, donde domina el modelo docente "teoricista") que *no existen técnicas de modelación matemática*, se suele considerar que las modelaciones matemáticas que se realizan en secundaria son simples "cambios de lenguaje" o "cambios de nomenclatura" triviales que no tienen la categoría de "verdaderas" técnicas matemáticas.

El estudio que nos permitió contrastar experimentalmente las cinco conjeturas se hizo utilizando dos tipos de datos empíricos como *indicadores* de las características de las OM que se reconstruyen en la institución de la enseñanza secundaria española: por un lado, un cuestionario en el que participaron varias universidades españolas y, por el otro, los datos obtenidos del análisis de una muestra de manuales aprobados oficialmente por las autoridades educativas españolas para su uso en la enseñanza secundaria.

El análisis de los dos tipos de datos empíricos obtenidos (Fonseca, 2004), muestran que los alumnos tienen problemas con la nomenclatura, manejan una sola técnica, no distinguen entre tarea directa y tarea inversa, no interpretan las técnicas y tienen una extraordinaria dificultad para trabajar con tareas abiertas, lo que provoca una falta de completitud de la actividad matemática desarrollada y una desarticulación de las matemáticas escolares. Los resultados ponen de manifiesto que, en secundaria, en el contrato didáctico institucional prima una actividad matemática puntual, rígida y aislada, lo que provoca una falta de completitud de la actividad matemática desarrollada y una desarticulación de las matemáticas escolares que dificulta e incluso impide el desarrollo de la actividad matemática.

La respuesta a esta falta de completitud matemática fue la creación (Fonseca, 2004, y Bosch, Fonseca y Gascón, 2004) de una herramienta didáctica, la organización matemática local relativamente completa (OMLRC), que podemos situar en el mundo de la ingeniería matemático-didáctica y que pretende aportar soluciones a las restricciones de las organizaciones matemáticas descritas anteriormente.

En una institución docente determinada, destacamos *dos condiciones* que se deben cumplir necesariamente para que sea posible reconstruir una OMLRC.

a) Los problemas escolares se presentan, tanto en secundaria como en la universidad, con enunciados muy cerrados en los que figuran como "datos" todos los que se necesitan (exactamente) para resolver el problema, sin que falte ni sobre ninguno.

Rara vez se presenta una *situación abierta* donde el estudiante deba decidir cuáles son los datos que se necesitan para formular correctamente un problema matemático. Pocas veces se problematiza el propio enunciado de los problemas como punto de partida para *plantear nuevos problemas*. No hay ningún dispositivo didáctico institucionalizado (como son la clase de teoría o la clase de problemas en la enseñanza universitaria de las matemáticas) que fomente el trabajo técnico y permita al estudiante pasar de la simple exploración de un tipo de tareas matemáticas al desarrollo suficiente de las técnicas involucradas en una dirección adecuada.

Pues bien, en el diseño de una OMLRC es necesario, en primer lugar, que la organización matemática contenga un *cuestionamiento tecnológico* pertinente, esto es, un conjunto de tareas matemáticas que hagan referencia a la interpretación, la justificación, la fiabilidad, la economía y el alcance de las técnicas y, además, que dicho cuestionamiento incida de tal modo sobre la práctica matemática que propicie el desarrollo del momento del trabajo de la técnica en una dirección tal que produzca una actividad matemática de complejidad creciente, que provoque la ampliación del tipo de problemas que puedan abordarse.

b) En segundo lugar, se requiere que el tipo de tareas que generan la actividad matemática esté asociado a una *cuestión matemática* "*con sentido*" y que conduzca a alguna parte, que no se trate de una cuestión "muerta".

La razón de ser (matemática o extramatemática) de la actividad matemática está ausente en los contenidos matemáticos "oficiales", incluso en entornos tan favorables a la modelación matemática como son las escuelas de ingeniería. Es lo que el profesor Chevallard llama monumentalismo (Chevallard, 2004), esto es, el "olvido" de la razón de ser de las praxeologías que se construyen en el aula, olvido que se manifiesta en la ausencia de las cuestiones (matemáticas y extramatemáticas) a las que responden las matemáticas enseñadas.

MARCO TEÓRICO

En Chevallard (2006), se introduce por primera vez un nuevo dispositivo didáctico, denominado *recorrido de estudio e investigación* (REI). En esa propuesta inicial, un REI viene generado por el *estudio de una cuestión viva* Q_0 con fuerte poder generador capaz de imponer un gran número de cuestiones derivadas. El estudio de Q_0 y de sus cuestiones derivadas conduce a la construcción de un gran número de saberes que delimitarán el mapa de los posibles recorridos y sus límites.

Esta primera propuesta abierta del concepto de REI elaborada por Chevallard, además de los trabajos de Barquero (2006), Bosch, García, Gascón y Ruiz Higueras (2006), Ruiz, Bosch y Gascón (2006), junto con las restricciones matemáticas en Fonseca (2004) expuestas anteriormente, nos permitió comenzar a elaborar y experimentar un modelo de REI que se adapte a nuestro entorno institucional (escuelas de Ingeniería donde impartimos la docencia).

Este modelo adaptado de REI (Fonseca, 2007; Fonseca y Casas, 2009, y Fonseca, Pereira y Casas, 2009) con el que estamos trabajando viene caracterizado por los siguientes elementos:

I. Un *problema didáctico-matemático* al que el sistema de enseñanza tiene que dar respuesta.
II. Una *institución* concreta en la cual se plantea el problema en cuestión.
III. *Una razón de ser*. Si denominamos "*razón de ser*" de una OM a las cuestiones, inicialmente problemáticas, a las que dicha obra responde, entonces podemos decir que muchas de las OM que se proponen para ser estudiadas en la escuela han perdido su razón de ser, su "sentido".

En la TAD se postula que, para que una cuestión matemática pueda estudiarse con "sentido" en la escuela (Gascón, 2003), es necesario:

a) Que *conduzca a alguna parte,* esto es, que esté relacionada con otras cuestiones que se estudian en la escuela, sean estas matemáticas o relativas a otras disciplinas (*legitimidad funcional*). Plantearemos una serie de cuestiones problemáticas cruciales con gran poder generador a las que tendremos que dar respuesta.

b) Que provenga de *cuestiones* que la sociedad propone que se estudien en la escuela *(legitimidad cultural o social*). Aquí debe figurar el diseño curricular, manuales, aportaciones de organismos oficiales (PISA,...), Internet (en la red pueden existir contenidos que permitan completar el estudio), etcétera.

c) Que aparezca en ciertas *situaciones* "umbilicales" de las matemáticas, esto es, situadas en la *raíz central* de las matemáticas (*legitimidad matemática*).

d) Además de las legitimidades anteriores marcadas por la Teoría Antropológica de lo Didáctico, es importante estudiar los contenidos que la educación matemática considera como problemáticos *(legitimidad didáctica).*

IV. Una *cuestión generatriz* (CG): para abordar el problema didáctico-matemático elegiremos, de todas las cuestiones problemáticas planteadas en la legitimidad funcional, una cuestión Q cuyo estudio tenga sentido en la institución en la que nos situamos y que, además, sea suficientemente rica, viva, fecunda y capaz de generar una actividad matemática de complejidad creciente y que obligue al alumno a un cierto compromiso personal en su resolución. A esta cuestión la llamaremos cuestión generatriz (CG), porque es la que impulsa y provoca todo el proceso de estudio y se debe mantener viva a lo largo de éste.

V. Una *organización matemática local relativamente completa* (OMLRC). A partir de la CG, plantearemos muchas cuestiones cuyas respuestas serán asequibles sólo en parte mediante la actividad matemática desarrollada por los alumnos. Aparecerán cuestiones derivadas para las que la comunidad de estudio no dispone de manera inmediata de una técnica conocida que permita encararlas, es decir, que no pueden ser formulables con la actividad matemática desplegada hasta ese momento. Este posible conflicto desencadenará la creación de nueva actividad matemática que, por un lado, pondrá en marcha un proceso de ingeniería didáctica gestionado por los momentos didácticos y, por otro lado, aparecerá el resultado de ese proceso, la OM creada, que es un producto de ingeniería matemática, cuyo grado de completitud está articulado alrededor de ocho indicadores OML1-OML8.

Presentamos a continuación una versión muy resumida de una OMLRC que se puede ver con mayor profundidad en Fonseca (2004).

a) El proceso de construcción de la actividad matemática, es un proceso de ingeniería didáctica y viene articulado alrededor de los momentos didácticos:

Inicial de equipamiento praxeológico: a lo largo del proceso de estudio de la OM se debe potenciar la necesidad de retomar tareas, técnicas, nociones y conceptos de aquellas OM (estudiadas anteriormente o no) que contienen los materiales necesarios para construir la nueva actividad matemática, es decir, es el momento donde se habla de la mínima infraestructura praxeológica necesaria para comenzar a estudiar la nueva OM.

Primer encuentro: hace referencia al momento matemático donde el alumno se encuentra con un primer tipo de tareas (T).

Exploratorio: posibilidad de explorar una técnica potencialmente útil para resolver las tareas T.

Trabajo de la técnica: debe provocar un desarrollo progresivo de la técnica. Se trabaja la técnica para evitar que su aplicación se reduzca a un tipo restringido de problemas, para poder utilizarla de manera flexible, adaptándola a nuevos problemas.

Tecnológico-teórico: necesidad de crear un marco tecnológico-teórico que permita construir, justificar, interpretar y relacionar todas las técnicas.

Institucional: debe precisarse lo que es "exactamente" la organización matemática elaborada.

Momento de las tecnologías de información y comunicación (TIC): uso de las tecnologías de información y comunicación y la utilización de calculadoras simbólicas para simplificar, completar y extender el proceso de estudio.

Evaluación: es preciso evaluar la calidad de los componentes de la OM construida, analizando no sólo las responsabilidades del profesor y los alumnos en el REI, sino también la actividad matemática desarrollada.

b) La construcción de la organización matemática genera un producto que es un proceso de ingeniería matemática. Para medir su grado de completitud, se utilizarán los siguientes indicadores:

OML1: deben aparecer tipos de tareas asociadas al "cuestionamiento tecnológico", esto es, tareas que hagan referencia a la interpretación, la justificación, la fiabilidad, la economía y el alcance de las técnicas, así como a la comparación entre ellas.

OML2: existencia de diferentes técnicas para cada tipo de tareas y de criterios para elegir entre ellas.

OML3: existencia de diferentes representaciones de la actividad matemática.

OML4: existencia de tareas y de técnicas "inversas".

OML5: interpretación del funcionamiento y del resultado de la aplicación de las técnicas.

OML6: existencia de tareas matemáticas "abiertas".

OML7: Necesidad de construir técnicas nuevas capaces de ampliar los tipos de tareas.

OML8: debe existir la posibilidad de perturbar la situación inicial.

Hay que subrayar, que la noción de "completitud" es relativa. No tiene sentido hablar de OML "completas" ni de OML "incompletas". Se trata, en todo caso, de una cuestión de grado: existen OML más o menos "completas" que otras en función del grado en que sus componentes cumplen las condiciones descritas por los indicadores OML1-OML8.

VI. *Contrato didáctico* (CD): la aparición en el espacio europeo de educación superior del concepto de *competencia* y de *crédito europeo* (ECTS), junto con las restricciones puestas de manifiesto en Fonseca (2004), exige la puesta en marcha de un nuevo contrato didáctico. Algunas características de este nuevo contrato son:

a) La aparición de nuevas responsabilidades del profesor y alumno que se traducen en:

i. Distribución de las tareas presenciales y no presenciales.
ii. Trasladar muchas de las responsabilidades, que no estaban cuestionadas institucionalmente, del profesor al alumno.
iii. Primar el aprendizaje autónomo y el trabajo en grupos y fijar las responsabilidades de ambos: la clase puede dividirse en grupos donde, como tal, debatan cuestiones que aporten cada vez más información al proyecto provocado por la CG y donde prime el

cuestionamiento tecnológico, entendido éste como un proceso reflexivo donde se utilicen distintas estrategias y técnicas.

iv. Uso de las tecnologías de información y comunicación, utilizando las plataformas de libre distribución y código abierto CLAROLINE Y MOODLE, que permitan el trabajo autónomo y colaborativo de los alumnos. Se puede crear una wiki que permita el trabajo autónomo, y también el colaborativo del alumno. Frente a entornos inspirados en el contrato didáctico dominante tipo "campus virtual", básicamente unidireccional, donde el profesor define la estructura del proceso de enseñanza/aprendizaje, cuáles son los papeles de los participantes y cómo debe regularse su actividad, las wikis presentan tecnología "rupturista", ya que otorgan la misma importancia a todos los participantes, y basa su éxito en la actividad colectiva de reflexión, comunicación y autoorganización de la comunidad. Las wikis fomentan, pues, el trabajo colectivo y solidario.

b) Por lo que se refiere a la disciplina (matemáticas) podemos afirmar:

i. Se rompe el contrato didáctico habitual de la clase de problemas que comporta el cambio relativamente frecuente de un tipo de problemas a otro y, por tanto, cierta rigidez en el uso de las técnicas matemáticas.

ii. La construcción del conocimiento matemático se hace a partir de situaciones ricas y vivas que les hagan ver la utilidad de la actividad matemática que van a construir y, en la elección de la CG, los alumnos pueden tener algún tipo de participación.

iii. Se pretende que el estudiante aprenda a realizar pequeños desarrollos tecnológicos a partir de un trabajo práctico previo y que comience a ejercer como ingeniero, aportando con el conocimiento matemático nuevas respuestas que permitan buscar una optimización del proyecto provocado por la CG.

iv. Se quiere potenciar la interdisciplinaridad y hacer más visibles las matemáticas para la sociedad. Siempre que sea posible, las cuestiones problemáticas deben formar parte del futuro mundo profesional de los ingenieros y debe ser posible que se lleven a cabo en el marco institucional, es decir, debe ser un proyecto realista.

v. Los estudiantes manejarán programas informáticos, que son herramientas indispensables para el estudio y aprendizaje de la actividad matemática.

vi. La experimentación se hace en un taller de matemáticas que se apoya en la combinación de dos estrategias didácticas, por un lado, proponer el estudio de una cuestión problemática definida inicialmente mediante unos datos fijos, pero *cuyo estudio requiere que éstos se transformen progresivamente en parámetros* y, por otro lado, utiliza una calculadora simbólica para instrumentalizar las técnicas matemáticas necesarias para abordar los tipos de problemas que surgen en esta actividad, tal como se propone en Ruiz, Bosch y Gascón (2006).

c) Evaluación:

i. Todo el proceso de estudio ha de tener como referencia el REI.
ii. El alumno (o grupo de alumnos) tiene que presentar periódicamente resultados (orales y escritos) que deben ser defendidos por el propio grupo y evaluados por el profesor. Se hará una evaluación por proyecto correspondiente a cada tema determinado.
iii. La realización del proyecto por parte de los alumnos combinará el trabajo en aula con el trabajo fuera del aula.
iv. Los alumnos entregarán, por medio de la plataforma establecida, evidencias sobre el trabajo realizado con todos los proyectos propuestos.
v. En la nota final de la asignatura, la evaluación de los proyectos tendrá un peso importante.

LOS REI EN LA CONSTRUCCIÓN DE SECUENCIAS DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

En lo que sigue diseñamos un proceso de estudio, que no está experimentado, que permite reconstruir una organización matemática relativamente completa para el estudio de los extremos de una función. A partir de una cuestión generatriz, generamos nuevas técnicas, nuevas justificaciones y explicaciones y nuevas cuestiones, de modo que se vaya ampliando la actividad matemática de partida, que suele ser muy puntual y aislada. Ahora bien, este proceso de estudio requiere nuevos dispositivos didácticos y también un nuevo contrato didáctico que sitúe la modelación matemática como protagonista del proceso de estudio y que especifique cuales son las *cuestiones, inicialmente problemáticas*, a las que dicha obra responde, es decir, que explique cuál es su *razón de ser*. El tipo de organización didáctica que nosotros proponemos para que esto se lleve a cabo es el REI.

Los REI que estamos diseñando y experimentando priorizan el carácter funcional de las matemáticas, situándolo en el corazón de la construcción de la actividad matemática y, como recurso didáctico, encajan muy bien para el estudio de la modelación matemática. En un REI, el modelo didáctico es el inverso del modelo institucional imperante, en el que primero se da la teoría y después se buscan aplicaciones de esa teoría. Las cuestiones cruciales se sitúan como punto de partida de la actividad matemática y son, junto con sus cuestiones derivadas, el origen y el motor de todo el REI. Partimos de una cuestión problemática inicial definida por una CG y, mediante procesos sucesivos de la actividad matemática, la iremos completando y ampliando hasta obtener una OMLRC. Trabajamos sobre proyectos generados por cuestiones cruciales a los que debemos dar una respuesta lo más amplia y completa posible, primando en todo momento el proceso dinámico.

Queremos desarrollar diversos REI alrededor de la derivada que comiencen en secundaria y continúen en la universidad, retomando los contenidos de secundaria con el objetivo de cuestionarlos, mostrar sus limitaciones, y reestructurarlos o integrarlos en organizaciones cada vez más amplias y completas por estudiar en la etapa universitaria. En Artigue (2003) se habla de la necesidad de centrarse en las reconstrucciones que han mostrado un papel crucial en la enseñanza del cálculo en la transición de la enseñanza secundaria a la universidad.

Después de explicar el modelo de REI con el que trabajamos, a continuación explicitamos ese modelo para un ejemplo concreto que gira alrededor del diseño y construcción de un acueducto para obtener el mayor caudal posible, el cual forma parte de un campo de problemas más amplio relativo a la OM de la derivada que estamos desarrollando. Exponemos brevemente una propuesta de diseño e implementación de un REI para el estudio de la actividad matemática ligada a la optimización de funciones reales.

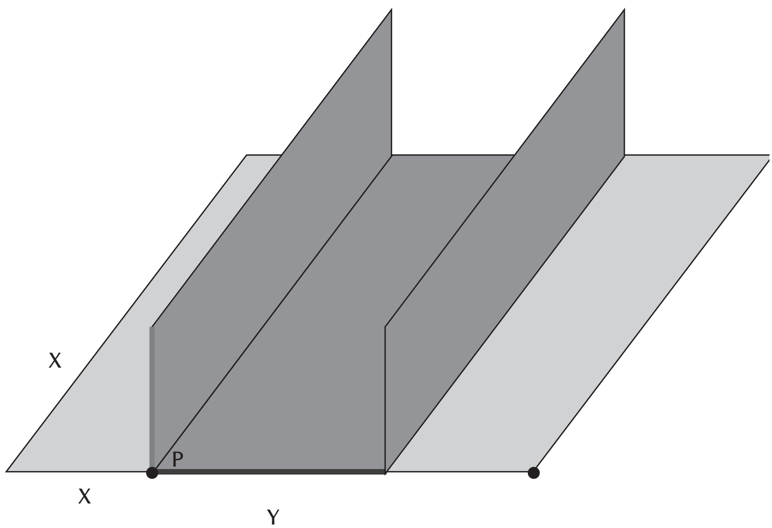
Problema didáctico-matemático. "¿Qué tengo que enseñar a mis alumnos a propósito de los problemas de optimización y cómo tengo que enseñarlo?".

Institución. Bachillerato del IES Escolas Proval y Escuelas de Ingeniería Técnica Industrial y Forestal de la Universidad de Vigo.

Razón de ser. Que explique el proceso de estudio de la actividad matemática en la que ha surgido el problema en cuestión. Debemos justificar cuál es su origen, qué contenidos propone la sociedad para su estudio y cuál es su ámbito de aplicación (dónde podemos utilizarla) y el por qué de su elección. Los alumnos tienen que completar en su cuaderno virtual cuáles son las legitimidades: *funcional* (plantearemos diversas cuestiones problemáticas con un fuerte poder generador), *social* (programa, manuales, Internet...), *matemática* (cuándo y por qué de los extremos relativos) y *didáctica* (todo lo relacionado con el estudio de la variación de una función aparece como un concepto problemático) de la optimización de funciones.

Cuestión generatriz CG. De todas las posibles cuestiones con sentido, relativas a la legitimidad funcional, discutimos con los alumnos cuál nos parece rica y fecunda. Acordamos elegir la relativa a un sistema de ingeniería que podemos describir en forma *de desafío* de la manera siguiente:

CG: "*Tenéis que diseñar* un acueducto para obtener el mayor caudal posible a partir de una lámina rectangular metálica".



Longitud de la lámina = l m
Anchura de la lámina = a m

Intencionadamente se plantean enunciados muy abiertos, sin datos numéricos, rompiendo el contrato didáctico profesor-alumno, en el que el profesor siempre da todos los datos necesarios para que el alumno resuelva el problema. Estamos, pues, ante una *tarea matemática "abierta"* (OML6).

El proceso de estudio viene provocado por la búsqueda de una respuesta a esa cuestión generatriz. Esa respuesta se traduce en la fabricación de una OM en sentido fuerte, que pasa por la construcción de una OMLRC.

Desarrollo de una OMLRC. La construcción de la organización matemática relativa a la *optimización de funciones* la comenzamos a partir de tareas propuestas en el 1er curso de bachillerato. Estudiaremos sus limitaciones, que nos servirán para ampliar la actividad matemática de la derivada a 2° de bachillerato. Después, les propondremos tareas en el 2° curso de bachillerato que no tienen respuesta con las técnicas disponibles por el alumno. Este tipo de tareas, que no tienen respuesta en bachillerato, constituyen una posible razón de ser para el estudio de la actividad matemática desarrollada en la universidad (Fonseca, 2007).

Momento inicial praxeológico. En lo que se refiere a las matemáticas en el currículo actual de bachillerato, los alumnos estudian, en primer curso de bachillerato, la monotonía, la concavidad y convexidad de funciones polinómicas sencillas. En segundo curso de bachillerato se amplían esas nociones a otras funciones como las trigonométricas, la inversa, la exponencial, la logarítmica, la raíz cuadrada y todas las que resulten de transformaciones elementales de éstas y es donde aparece por primera vez la optimización de funciones.

En lo que se refiere al instrumento informático, trabajamos con un programa de geometría dinámica (Geogebra) y otro de cálculo simbólico (Maxima). Ambos programas son software de libre uso.

Momento del primer encuentro. Es donde podemos concretar la cuestión generatriz, se delimita el sistema por estudiar y se introducen las primeras restricciones.

Retomamos la actividad de bachillerato, donde situamos el primer nivel de complejidad, y planteamos, de acuerdo con su diseño curricular, el estudio de la CG para unos parámetros concretos. Posteriormente, se efectuarán modificaciones sobre el enunciado que generen una actividad matemática más amplia y completa.

> Un ingeniero está diseñando un acueducto y tiene que usar láminas rectangulares de metal de 20 m de ancho por 15 m de largo. Quiere doblar las láminas a lo largo para formar dos ángulos rectos. ¿Cómo se debe efectuar este doblaje de modo que el caudal sea máximo?"

El primer tipo de tareas podemos situarla en el mundo de la geometría. Es posible abordar el problema ya con una primera técnica que los alumnos ya conocen, como es la fórmula del área (A = base × altura, sustituyendo valores dados), utilizando como herramienta lápiz y papel. Según Freudenthal (1984), toda pedagogía de las matemáticas, que aspire a lograr de cada alumno el máximo de lo que sea capaz, no debe conformarse con el estudio de situaciones estáticas. Ésta es una técnica (fórmula) muy rudimentaria con un costo enorme. La búsqueda de una técnica que disminuya el costo provoca la aparición del *momento exploratorio,* momento en el que podemos empezar a explorar la CG con una nueva técnica que puede ser un programa de geometría dinámica (Artigue, 2006). Utilizando como instrumento informático el Geogebra, se puede establecer una relación entre la altura del acueducto y su área que nos permita ver intuitivamente que el caudal crece, alcanza un valor máximo y después decrece de nuevo, según las diferentes dimensiones del lado plegado.

Utilizar esta técnica es una primera hipótesis del resultado, pero es sólo eso, una hipótesis por el momento. La necesidad de ser rigurosos en la respuesta nos introduce en el *momento del trabajo de la técnica,* en el que construiremos el modelo matemático (identificar los elementos que forman parte del sistema, elegir las variables que lo determinan, la forma de relación de las variables y la expresión algebraica del modelo). La construcción del modelo algebraico le da un impulso muy importante al proceso de estudio y aparecen nuevas tareas: les pediremos a los alumnos que justifiquen si la expresión algebraica obtenida representa una función y que nos digan cuál es su dominio y cuál su recorrido (nos permitirá evaluar conceptos que deberían ser conocidos por los alumnos). Analizaremos posibles respuestas utilizando las técnicas numéricas y gráficas y haremos un cuestionamiento tecnológico (OML1) sobre las debilidades y fortalezas de ambas técnicas (cada nueva técnica debe ir acompañada de un cuestionamiento tecnológico en el que figuren debilidades y fortalezas de la propia técnica). Como las debilidades de ambas técnicas no nos permiten dar una respuesta rigurosa, nos sumergimos en el *momento tecnológico-teórico,* en el que justificaremos el estudio teórico de la derivada (primando el desarrollo tecnológico de acuerdo con la institución en la que trabajamos). Volveremos a retomar el momento del trabajo de la técnica (tendrá un importante protagonismo el programa de cálculo simbólico Maxima). Escaparemos de la rigidez y de la puntualidad de las tareas de bachillerato, eso quiere decir que estudiaremos en profundidad la variación de todo el sistema. Eso significa no sólo estudiar cómo varía la función que forma parte de la actividad rutinaria de la matemática institucional, sino también cómo varían las funciones primera y segunda derivada (el alumno no tiene claro que sean funciones), estableceremos tablas numéricas de la función y sus derivadas, pediremos que interpreten (OML5) numéricamente la primera y segunda derivada en puntos concretos (les ayudará a saber por qué deriva), veremos la posibilidad de representar no sólo la función, sino también la función primera y segunda derivada (que está fuera del CD de bachillerato) y resolveremos, con el programa de cálculo simbólico Maxima, la determinación del extremo relativo. En el marco del REI donde nos situamos, se pueden plantear diferentes tareas inversas, por ejemplo, determinar el polinomio mónico, o bien, la familia de funciones polinómicas de segundo grado, a partir de su extremo relativo. Posteriormente, esta tarea podría ampliarse utilizando funciones polinómicas de grado superior.

En su trabajo como futuros ingenieros que tienen que construir proyectos, debatiremos con los alumnos que el modelo construido da una buena respuesta al problema, pero está incompleto. Aquí es donde se pone de manifiesto (OML1) el proceso de modelación en la TAD, en el sentido de que, a partir de una cuestión generatriz, se crea una actividad matemática de complejidad creciente donde cada nueva OM que aparece, amplía y completa la anterior. El grado de complejidad aumenta de una manera considerable cuando se introducen parámetros, es decir, cuando pasamos de un caso particular a un caso general, algo que no se hace en la enseñanza del bachillerato en España y que debemos poder hacer en la universidad. La necesidad de articular un modelo general con un fuerte protagonismo de los parámetros y las variables no es problema sencillo. El propio concepto de variable presenta muchas dificultades para los alumnos (Trigueros y Ursini, 2006).

En el taller, se le plantean al grupo de alumnos nuevas tareas de perturbación (OML8) de la cuestión Q que permiten completar y generalizar el estudio de nuestro proyecto en el tránsito de secundaria a la universidad, algunas de las cuales figuran a continuación:

Primera modificación de la situación inicial. Acueducto de sección trapezoidal obtenido de una lámina rectangular de metal de 20 m de ancho por 15 m de largo, con lado de plegado fijo (2 m) respecto de la horizontal y ángulo variable.

Segunda modificación de la situación inicial. Acueducto de sección trapezoidal obtenido de una lámina rectangular de metal de 20 m de ancho por 15 m de largo, con lado de plegado variable respecto a la horizontal y ángulo fijo (60°).

Tercera modificación de la situación inicial. Cambio en la sección del acueducto (acueducto de base semicircular). Acueducto obtenido de una lámina rectangular de metal de 20 m de ancho por 15 m de largo, doblando longitudinalmente 90° una tira de ancho x. Con la base que permanece, se construye una semicircunferencia.

Cuarta modificación de la situación inicial. Acueducto obtenido de una lámina rectangular de metal de 20 m de ancho por 15 m de largo, doblando longitudinalmente una tira de ancho x a cada lado hasta obtener una sección rectangular (ángulo de doblado 90°).

Quinta modificación de la situación inicial. Acueducto de sección trapezoidal obtenido de una lámina rectangular de metal de L m de ancho por K m de largo, con lado de plegado fijo respecto a la horizontal y ángulo a variable.

Sexta modificación de la situación inicial. Acueducto de sección trapezoidal obtenido de una lámina rectangular de metal de L m de ancho por K m de largo, con lado de plegado variable (x m.) respecto de la horizontal y ángulo fijo (α).

Séptima modificación de la situación inicial. Acueducto de sección trapezoidal obtenido de una lámina rectangular de metal de L m de ancho por K m de largo, con una longitud variable del lado inclinado x variable y una inclinación de plegado variable respecto de la horizontal de α grados.

La tarea anterior nos permite completar y ampliar todavía más la actividad matemática y puede servir como una posible razón de ser para el estudio de funciones de varias variables y, en particular, para el estudio de sus extremos relativos.

El cálculo del volumen máximo en cada una de las modificaciones de la situación inicial puede aprovecharse para plantear a los alumnos nuevos desafíos dentro del proyecto y para que participen en la toma de decisiones. Por ejemplo, se puede discutir sobre la geometría del acueducto que proporciona máximo caudal a partir de una misma plancha inicial.

En la universidad, se podrían plantear nuevos desafíos y estudiar el problema en el nivel interdisciplinar, relacionándolo con otras materias como, por ejemplo, la mecánica de fluidos. Se puede plantear el cálculo del flujo laminar del líquido y las posibles turbulencias, lo que permitiría conocer, de verdad, el comportamiento y la cantidad real de líquido movido.

En el *momento didáctico de las TIC*, además del instrumento informático utilizado, algo que se supone obligatorio en el mundo de la ingeniería, los alumnos disponen de un sistema informático, creado por nosotros dentro de una plataforma institucional basada en CLAROLINE y MOODLE, que permite un trabajo colaborativo entre los propios alumnos.

Momento institucional. Pretendemos, en este caso, que el alumno (o grupo de alumnos) de ingeniería, además de estudiar la herramienta teórica relativa a la derivada, de la que destacamos su faceta tecnológica, se acostumbre a una forma de trabajo autónoma. Para ello, contará con una herramienta informática, pensada para obtener información sobre un proyecto determinado, que admite planteamientos distintos de una cuestión inicial, acompañada de un discurso tecnológico unificador, que tenga una incidencia efectiva sobre el desarrollo de la práctica matemática, que lo obligue a justificar, analizar e interpretar la razón de ser de la actividad matemática que vaya apareciendo. En todo el procedimiento, debe ocupar un lugar preferente el por qué y el para qué del proceso de estudio utilizado. La respuesta final a la cuestión generatriz debe poder ser debatida y asumida por toda la comunidad escolar implicada en el proceso de estudio.

Momento de la evaluación. Analizaremos, además de las responsabilidades del profesor y del estudiante en el REI estudiado, la propia actividad matemática institucional utilizada. Tendremos que analizar qué tipos de tareas se propusieron (si existen especímenes suficientemente variados de cada tipo, si están bien identificadas, etc.), con cuáles tipos de técnicas se abordaron (si son pertinentes, si son fiables, si son rigurosas, cuál es su costo...) y el propio discurso tecnológico (¿es suficientemente explícito?, ¿ayuda efectivamente a interpretar y justificar las técnicas?...). Todos los datos recogidos en el proyecto deben poder ser evaluados y cuestionados con el propósito de introducir mejoras en él. La necesidad de involucrarse en proyectos de este tipo, que tengan una respuesta amplia y completa y que permitan conectar distintas nociones matemáticas, aparece también en otras teorías didácticas (APOE) en las que se estudia la necesidad de trabajar con funciones en diferentes contextos (Trigueros, 2005). En este mismo sentido Artigue (2006) apunta que, *para que esta flexibilidad pueda ejercerse, no basta con enfrentar al alumno con tareas abiertas, llenas de potencialidades diversas. También es necesario que le sean accesibles, que éste pueda responsabilizarse de ellas y asumirlas*. En Kaiser y Schwarz (2006), se habla de la necesidad de introducir a los estudiantes en los procesos de modelación mediante "problemas auténticos" que corresponderían, sobre todo, a situaciones extra matemáticas.

CONCLUSIONES

El modelo teórico de REI que proponemos es un dispositivo didáctico que pone en manos del profesor y del alumno nuevos recursos que están ausentes del marco institucional actual. En un REI aparecen indicadores que miden el grado de completitud de la OM desarrollada y las matemáticas se entienden como una herramienta que quiere dar soluciones a situaciones problemáticas planteadas en la sociedad.

En este trabajo, se quiere dar respuestas a un problema situado en el mundo de la ingeniería. Partiendo de una cuestión puntual, se varían las hipótesis iniciales, dando lugar a la aparición de un proyecto con nuevas cuestiones y nuevas respuestas. Estará acompañado de un discurso que tiene en cuenta, además de la razón de ser de la nueva actividad matemática que va apareciendo, los cuestionamientos tecnológicos de las técnicas empleadas (costo, rigor, sencillez, limitaciones, en qué tipos de tareas tiene éxito y en cuáles fracasa, qué modificaciones son posibles...). Este discurso forma parte del mundo de la ingeniería.

El REI que se propone quiere transitar desde secundaria hasta la universidad, aunque en este caso concreto podamos situarlo más cerca del campo universitario. La elección de la situación problemática elegida se hace, porque es una cuestión rica, viva y con un fuerte poder generador, situada en el entorno institucional donde trabajamos y que puede formar parte del futuro mundo profesional del ingeniero. Además, se trata de una cuestión versátil que permite adaptarse a nuevas situaciones y que hace factible una buena conexión secundaria-universidad.

En la parte experimental del desarrollo teórico de nuestro modelo de REI, es muy probable que nos encontremos con algunas limitaciones, como problemas de encaje entre el tiempo didáctico y el tiempo institucional, problemas con los alumnos para trabajar en equipo, problemas con el cambio de contrato del profesor y del alumno, que tienen que asumir y compartir responsabilidades nuevas, y también problemas en la manera de evaluar el trabajo del profesor y del alumno. Creemos que la implantación de REI en las instituciones escolares requiere todavía mucha experimentación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M (1998), "Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares?", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* vol. 1, núm. 1, pp. 40-55.

——— (2003), "Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel universitario", *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana,* vol. X, núm. 2, pp. 117-134.

——— (2006), "La inteligencia del cálculo", *Revista digital de divulgación matemática de la Real Sociedad Matemática Española,* vol. 2, núm. 5.

Barquero, B., M. Bosch y J. Gascón (2006), "La modelación matemática como instrumento de articulación de las matemáticas del primer ciclo universitario de Ciencias: estudio de la dinámica de poblaciones", en L. Ruiz Higueras, A. Estepa y F. J. García (eds.), *Matemáticas, escuela y sociedad. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico,* Jaén, Publicaciones de la Diputación de Jaén, Servicio de Publicaciones – Universidad de Jaén, pp. 531-544.

Bosch, M., C. Fonseca y J. Gascón (2004), "Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 24, núms. 2-3, pp. 205-250.

Bosch, M., F. J. García, J. Gascón y L. Ruiz Higueras (2006), "La modelación matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico", *Educación Matemática,* vol. 18, núm. 2, pp. 37-74.

Chevallard, Y. (2004), "Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire", *Journées de didactique comparée,* Lyon.

——— (2006), "Steps towards a new epistemology in mathematics education", *Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education,* San Feliu de Guixols, pp. 17-21.

Chevallard, Y., M. Bosch y J. Gascón (1997), *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje,* Barcelona, Horsori.

Fonseca, C. (2004), *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria,* Tesis de doctorado, Universidad de Vigo, España.

——— (2007), "Una posible "razón de ser" de la diagonalización de matrices en ciencias económicas y empresariales", *Actas del 2° Congreso de la* TAD, Uzès.

Fonseca, C. y J. M. Casas (2009), "El paso de estudiar matemáticas en secundaria a la universidad y los REI", *Actas III Jornadas Internacionales de las Matemáticas en Ingeniería,* pp. 119-140.

Fonseca, C., A. Pereira y J. M. Casas (2009), "Diseño de un REI para la docencia práctica de matemáticas en una escuela de Ingeniería", *Actas 17 Congreso Universitario de Innovación Educativa en las Enseñanzas Técnicas,* CUIEET.

Freudenthal, H. (1984), "En todos los niveles: ¡Geometría!", *Actas III Jornadas sobre aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas,* pp. 15-34.

Gascón, J. (2003), "La pedagogía y la didáctica frente a la problemática del profesorado de Matemáticas", Comunicación presentada en el XVI Congreso de ENCIGA, Cangas de Morrazo, Pontevedra.

Guzmán, M. (1996), "El papel del matemático en la educación matemática", *Actas del 8° Congreso Internacional de Educación Matemática,* Sevilla, pp. 47-63.

Kaiser, G. y B. Schwarz (2006), "Mathematical modeling as bridge between school and university", *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, núm. 38, pp. 196-208.

Ruiz, N., M. Bosch y J. Gascón (2006), "Modelación funcional con parámetros en un taller de matemáticas con Wiris", en L. Ruiz Higueras, A. Estepa y F. J. García (eds.), *Matemáticas, escuela y sociedad. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico,* Publicaciones de la Diputación de Jaén, pp. 635-660.

Trigueros, M. (2005), "La noción de esquema en la investigación en matemática educativa de nivel superior", *Educación Matemática,* vo1. 17, núm. 1, pp. 5-31.

Trigueros, M. y S. Ursini (2006), "¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas?", *Educación Matemática,* vo1. 18, núm. 3, pp. 5-38.

DATOS DEL AUTOR

Cecilio Fonseca Bon
Departamento de Matemática Aplicada I, Universidad de Vigo, España
cfonseca@uvigo.es

Alejandra Pereira Añón
IES Escolas Proval, España
alejandrapereira@edu.xunta.es

José Manuel Casas Miras
Departamento de Matemática Aplicada I, Universidad de Vigo, España
jmcasas@uvigo.es