Significados personales de los futuros profesores de educación primaria sobre la media aritmética

Juan Jesús Ortiz de Haro y Vicenç Font Moll

Resumen: Un cambio efectivo de la enseñanza de la estadística, tal y como proponen los actuales currículos, requiere mejorar la formación de los profesores que han de enseñarla. El objetivo principal de esta investigación es determinar el significado personal declarado del objeto matemático "media aritmética" de un grupo de futuros profesores de Educación Primaria. La herramienta configuración cognitiva, propuesta por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática, ha permitido poner de manifiesto la gran variedad de tipologías de significados y mostrar que existen importantes dificultades relacionadas con la comprensión del concepto y algunas de sus propiedades. Se finaliza con algunas implicaciones educativas para la formación de profesores en el campo de la estadística.

Palabras clave: media aritmética, significado personal de un objeto matemático, comprensión matemática, formación de profesores, educación estadística.

Personal meanings of future primary school teachers on the arithmetic mean

Abstract: Any effective change in the teaching of statistics, as proposed in current curricula, requires improving the training given to the people who will eventually teach it. The main goal of this study is to determine the personal meaning that Primary School teachers-in-training assign to the mathematical object "arithmetic mean". The cognitive configuration tool proposed by the Onto-Semiotic Approach to Cognition and Mathematics Instruction shows that there is a wide variety of typologies of meanings and that there exist significant difficulties related to the understanding of the concept and some of its properties. We conclude with some educational implications for teacher training in the field of statistics.

Keywords: arithmetic mean, personal meaning of a mathematical object, mathematical understanding, teacher education, statistics education.

Fecha de recepción: 23 de noviembre de 2010.

INTRODUCCIÓN

El interés de la enseñanza de la estadística en España se ha visto reforzado en el Real Decreto por el que se establecen las enseñanzas mínimas para la Educación Primaria (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006), donde se incluye un bloque de contenidos sobre *Tratamiento de la información, azar y probabilidad* desde el primer ciclo. Este documento subraya la necesidad de iniciar lo antes posible el estudio de los fenómenos estadísticos y de hacer más activa y exploratoria la metodología de enseñanza, para incidir en la comprensión de las informaciones presentes en los medios de comunicación y suscitar el interés de los alumnos y su valoración de los conocimientos estadísticos para la toma de decisiones. Estas recomendaciones también se recogen en otros currículos (por ejemplo, National Council of Teachers of Mathematics, 2000; Secretaría de Educación Pública (SEP), 2006).

Ahora bien, según Stohl (2005), un cambio efectivo de la enseñanza de la estadística requiere mejorar la formación de los profesores que han de llevar a cabo la enseñanza, pues, sin una formación específica, tendrían que confiar en sus creencias e intuiciones, a menudo erróneas, que podrían transmitir a sus estudiantes, como se ha comprobado en el trabajo de Ortiz, Mohamed, Batanero, Serrano y Rodríguez (2006). Para conocer si los futuros profesores están debidamente preparados, se ha realizado un amplio estudio de evaluación inicial de la competencia de los futuros profesores de Educación Primaria para resolver problemas elementales de estadística. En este trabajo se presenta sólo una pequeña parte de los resultados relacionada con las prácticas de los futuros profesores de Educación Primaria sobre la idea de media aritmética.

El gran esfuerzo de investigación sobre formación de profesores en la pasada década apenas se refleja para el caso de la estadística, como se observa al analizar los contenidos de la revista *Journal of Mathematics Teacher Education* o en la revisión realizada por Shaugnessy (2007). A pesar de ello, progresivamente se está formando un cuerpo de conocimientos que señala la existencia de dificultades entre los profesores en el uso de los promedios.

Entre las investigaciones centradas en futuros profesores de Educación Primaria, destacamos la de Batanero, Godino y Navas (1997), quienes observaron dificultades en el tratamiento de los valores nulos y valores atípicos en el cálculo de la media aritmética, en la elección de la medida de tendencia central más adecuada en una determinada situación, y en el uso de los promedios en la comparación de distribuciones, constatando que dichas dificultades permanecen incluso después de haber recibido enseñanza específica. Espinel (2007) describe los errores que cometen futuros profesores en la construcción de ciertas gráficas y las dificultades que muestran cuando razonan sobre representaciones de distribuciones de datos.

En un estudio para evaluar el conocimiento del contenido pedagógico y del contenido estadístico de los futuros profesores, Godino, Batanero, Roa y Wilhelmi (2008) observaron que, aunque muchos de ellos poseían una buena intuición sobre la equiprobabilidad, minusvaloraron la variabilidad. En cuanto al análisis didáctico, la mayoría tuvo dificultades en juzgar la idoneidad didáctica de los procesos de instrucción.

En una investigación para profundizar en la comprensión que tenían de la media los futuros profesores, Leavy y O'loughlin (2006) encontraron que 57% de los participantes recurría a la media para comparar dos conjuntos de datos, que sólo 21% dio una respuesta precisa a un problema de medias ponderadas y que 88% fue capaz de construir un conjunto de datos que tuviera una media predeterminada. También observaron que sólo 25% manifestaba alguna forma de comprensión conceptual de la media y que el resto presentaba una comprensión procedimental.

Estrada (2007), en un estudio para evaluar el conocimiento estadístico de los futuros profesores, observó que, aunque los porcentajes de aciertos fueron superiores a 50%, los resultados indican un desconocimiento de los conceptos estadísticos elementales y la presencia de errores al invertir el algoritmo de la media y en conceptos relacionados con el muestreo.

Los resultados de los trabajos de Garrett (2008) y García Cruz y Garrett (2008), con alumnos de secundaria y universitarios, algunos de éstos últimos estudiantes para profesor de matemáticas en Educación Primaria, revelaron que los participantes muestran distintos tipos de razonamiento sobre la media aritmética y sus respuestas se pueden asociar a cinco niveles de comprensión según la taxonomía SOLO de Biggs y Collis (1991), así como que no hubo diferencias significativas entre los estudiantes universitarios y de secundaria en cuanto a los niveles de interpretación observados.

Respecto a los trabajos con estudiantes universitarios, Pollatsek, Lima y Well (1981) han descrito errores de cálculo de la media simple y ponderada a partir de una tabla de frecuencias, y Mevarech (1983) refiere dificultades en la aplicación de algunas propiedades de ésta.

Por todo ello, se considera de interés seguir esta línea de investigación, ya que, como se ve, la media aritmética es un concepto fundamental en estadística del que hay pocas investigaciones sobre futuros profesores de Educación Primaria. Además, como indica Gal (2005), el conocimiento elemental de la estadística forma parte de lo que hoy se denomina “cultura estadística”, que incluye no sólo conocimientos, sino actitudes que lleven a los futuros profesores a interesarse por mejorar su conocimiento y a tratar de completarlo a lo largo de su vida profesional.

Este trabajo tiene como principal objetivo determinar el significado personal de un grupo de futuros profesores de Educación Primaria del objeto matemático “media aritmética”, cuando inician el estudio de la asignatura de Matemáticas y su Didáctica en la Universidad de Granada, España.

Se estructura el artículo en cinco apartados, el primero de los cuales es esta introducción. En el segundo apartado, se describen brevemente algunos de los constructos del Enfoque Ontosemiótico, marco teórico utilizado en esta investigación. En el tercer apartado, se presenta la metodología utilizada, y en el cuarto, se aportan los resultados obtenidos del análisis semiótico de las respuestas de los futuros profesores al problema analizado. Por último, en el quinto apartado se exponen las conclusiones y algunas reflexiones finales e implicaciones para la formación de profesores en estadística.

MARCO TEÓRICO: EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

El marco teórico utilizado en este trabajo es el llamado Enfoque Ontosemiótico de la instrucción y cognición matemática (Godino, Batanero y Font, 2007; Ramos y Font, 2008; Font, Godino y Contreras, 2008; Font y Contreras, 2008; Olivo, Batanero y Díaz, 2008), que se considera el más adecuado para definir y afrontar el problema planteado. A partir de ahora se utilizará el acrónimo EOS.

PRÁCTICAS

En este enfoque se parte del papel clave que en matemáticas tiene la resolución de problemas, donde Godino y Batanero (1994) consideran la práctica matemática como cualquier acción o manifestación (lingüística o de otro tipo) llevada a cabo en la resolución de problemas matemáticos y en la comunicación de soluciones a otras personas, a fin de validarlas y generalizarlas a otros contextos y problemas.

La relatividad socioepistémica y cognitiva de los significados, entendidos como sistemas de prácticas, y su uso en el análisis didáctico llevaron a introducir en el EOS la siguiente tipología de significados (figura 1). En relación con los significados institucionales, se proponen los siguientes tipos:

Pretendido: sistema de prácticas (y configuraciones epistémicas que las activan) incluidas en la planificación del proceso de estudio.

Implementado: sistema de prácticas (y configuraciones epistémicas que las activan) en la actuación docente efectiva.

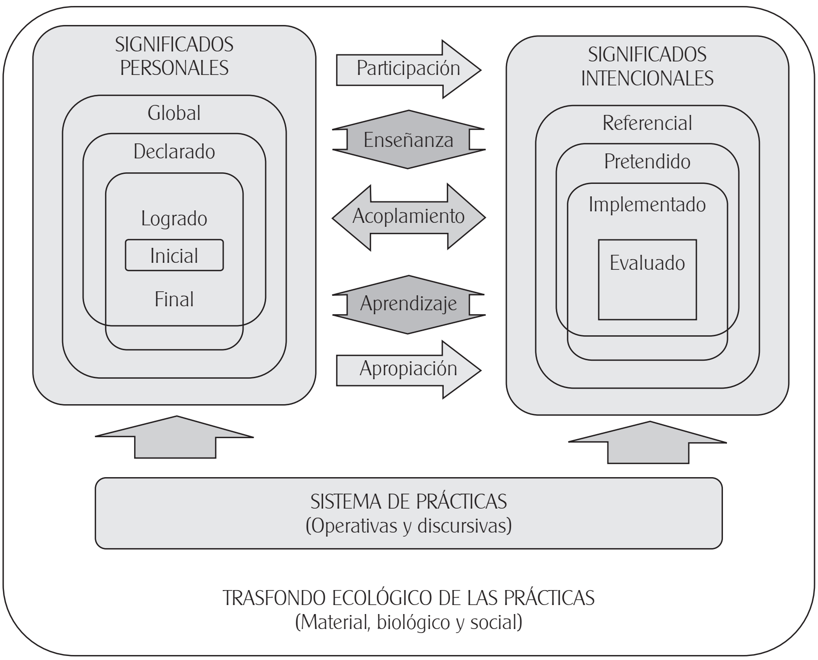
Evaluado: sistema de prácticas (y configuraciones epistémicas que las activan) que son evaluadas por el docente.

Referencial: sistema de prácticas (y configuraciones epistémicas que las activan) que se toma como referencia en la elaboración del significado pretendido.

Respecto de los significados personales, se proponen los siguientes tipos:

Global: sistema de prácticas personales (y configuraciones cognitivas que las activan) relativas a un objeto matemático que el sujeto es capaz de manifestar potencialmente.

Figura 1. Tipos de significados institucionales y personales



Declarado: sistema de prácticas expresadas (y configuraciones cognitivas que las activan) a propósito de las pruebas de evaluación, incluyendo las correctas e incorrectas institucionalmente.

Logrado: sistema de prácticas manifestadas (y configuraciones cognitivas que las activan) que están conformes con el significado institucional. La parte del significado declarado no concordante con el institucional es lo que habitualmente se considera como errores de aprendizaje.

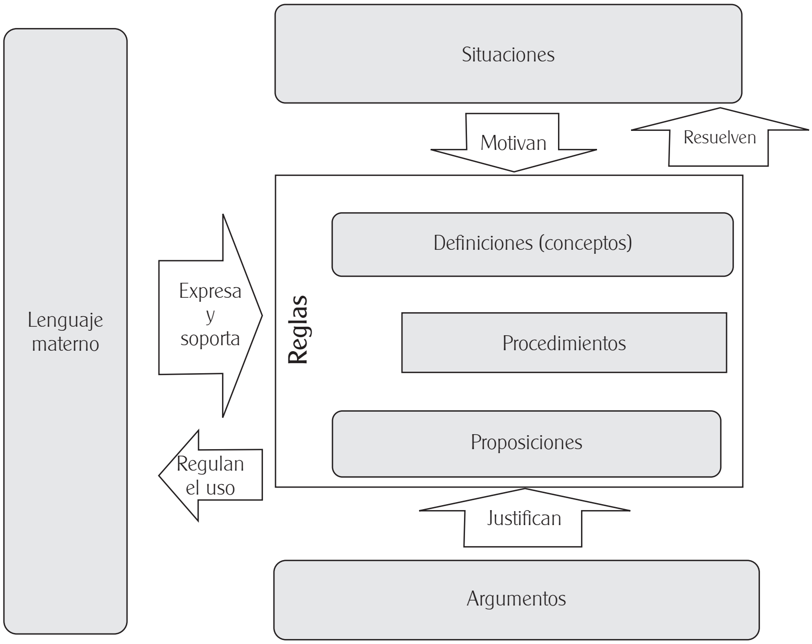
En el análisis del cambio de los significados personales, que tiene lugar en un proceso de estudio, interesa tener en cuenta los significados logrados iniciales de los estudiantes y los logrados que finalmente alcanzan. En la parte central de la figura 1 se indican las relaciones dialécticas entre enseñanza y aprendizaje, que suponen el acoplamiento progresivo entre significados personales e institucionales.

Configuraciones de objetos

El agente necesita conocimientos básicos para la realización de una práctica matemática y para la interpretación de sus resultados como satisfactorios. Según Font y Godino (2006), si se consideran los componentes del conocimiento necesarios para la realización y evaluación de la práctica, que permiten resolver una situación problema (por ejemplo, plantear y resolver un problema de media aritmética), se ve el uso de *lenguajes* verbales y simbólicos. Estos lenguajes son la parte ostensiva de una serie de *conceptos-definiciones*, *proposiciones* y *procedimientos* que intervienen en la elaboración de *argumentos* para decidir si las acciones simples que componen la práctica, y ella en cuanto acción compuesta, son satisfactorias. Así, cuando un agente realiza y evalúa una práctica matemática, activa un conglomerado formado por situaciones problema, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, articulado en la *configuración* de la figura 2.

Para estudiar las relaciones entre estas entidades elementales (situaciones problemas, lenguajes, conceptos...), estos autores proponen la noción de función semiótica, idea tomada de Eco (1979), que se concibe como un par, formado por el significante (expresión) y el significado (contenido), e implica también un acto de interpretación. Ligada a esta idea, se encuentra la de código, que se concibe como la regla de correspondencia entre los planos de expresión y de contenido de las funciones semióticas.

Figura 2. Configuración de objetos



En este trabajo, se entiende el significado personal de la media aritmética como: *1)* el conjunto de prácticas que puede realizar el alumno en las que la media es fundamental (o no) para su realización, y *2)* la configuración cognitiva que el alumno activa para realizar dichas prácticas. Las prácticas que realiza el alumno, en este caso, son la lectura del texto del problema y la producción de un texto como respuesta.

Comprensión matemática

Según Godino, Batanero y Font (2007), básicamente hay dos maneras de entender la "comprensión": como proceso mental o como competencia. Los posicionamientos pragmatistas del EOS llevan a entender, de entrada, la comprensión básicamente como competencia y no tanto como proceso mental. Se considera que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas, lo cual implica concebirla también como “conocimiento y aplicación de las normas” que regulan la práctica.

Por otra parte, si se tiene en cuenta el papel esencial que las funciones semióticas definidas anteriormente tienen en el proceso relacional entre los objetos matemáticos activados en las prácticas, se puede interpretar la comprensión de un objeto matemático O por parte de un sujeto X (persona o institución) en términos de las funciones semióticas que X puede establecer en unas circunstancias fijadas, en las que se pone en juego O como expresión o contenido.

METODOLOGÍA

En relación con la metodología, hay dos cuestiones relevantes, la primera tiene que ver con la selección del cuestionario y la segunda, con el tipo de análisis que se hace de las respuestas de los alumnos.

Selección del cuestionario

El significado del objeto “media aritmética” es complejo, como lo muestra el análisis de libros de texto realizado por Cobo y Batanero (2004). Por esta razón, para evaluar el significado personal declarado de los futuros profesores, se ha utilizado el cuestionario propuesto por Batanero (2000), que se considera idóneo desde el punto de vista del contenido que se pregunta a los alumnos, ya que determina el significado de referencia para el objeto “media aritmética” y es representativo de éste.

Consta de cinco problemas: el primero es sobre estimación de una cantidad desconocida en presencia de errores de medida; el segundo trata de una situación donde se necesita obtener una cantidad equitativa por repartir para lograr una distribución uniforme; el tercero consiste en encontrar un elemento representativo de un conjunto de valores dados, cuya distribución es aproximadamente simétrica, en un contexto de comparación de datos; el cuarto es una situación donde se necesita conocer el valor que se obtendrá con mayor probabilidad al seleccionar un elemento al azar de una población, y el quinto trata sobre la media aritmética ponderada. Por razones de extensión, en este trabajo sólo se analiza el tercer problema, que se considera que permite cumplir con los objetivos propuestos.

El problema planteado es un ejemplo particular de una clase de problemas, en los que se trata la elección de un elemento representativo de un conjunto de valores dados, siempre que la distribución sea aproximadamente simétrica, en un contexto de comparación de datos.

Problema. Elemento representativo de un conjunto de datos
Al medir la altura en cm que pueden saltar un grupo de escolares antes y después de haber efectuado un cierto entrenamiento deportivo, se obtuvieron los valores siguientes. ¿Piensas que el entrenamiento es efectivo?

				Altura saltada en cm						
Alumno	*Ana*	*Bea*	*Carol*	*Diana*	*Elena*	*Fanny*	*Gia*	*Hilda*	*Ines*	*Juana*
Antes del entrenamiento	115	112	107	119	115	138	126	105	104	115
Después del entrenamiento	128	115	106	128	122	145	132	109	102	117

Para comprobar el efecto del entrenamiento, se calcularía la altura media saltada antes y después del entrenamiento, que prueba que el entrenamiento ha sido efectivo, ya que la primera media es de 115.6 cm y la segunda es de 120.4 cm. Para representar un conjunto de datos, se elige la media aritmética debido a sus propiedades como centro de gravedad del espacio de valores muestrales o poblacionales y de localización central. En caso de ser una distribución asimétrica, esta elección no sería la adecuada y se debería optar por otras medidas como la mediana o la moda.

Análisis de las respuestas de los alumnos

Para estudiar el significado personal declarado de los futuros profesores de Educación Primaria del objeto "media aritmética", se seguirá la metodología usada en Malaspina (2007) y Malaspina y Font (2010). En primer lugar, se han de examinar las prácticas matemáticas que realiza el alumno, que en este caso se interpretan como la lectura del problema y la producción de un texto como respuesta. A continuación, se examinará la configuración cognitiva activada por el alumno en su respuesta.

Participantes

La muestra participante estuvo integrada por 40 futuros profesores de la especialidad de Educación Primaria, estudiantes del primer curso de Magisterio de la Universidad de Granada, España. Todos ellos han estudiado conceptos básicos de estadística y probabilidad en la Educación Secundaria. El cuestionario fue respondido por los alumnos antes de iniciar las clases de la asignatura de Matemáticas y su Didáctica.

RESULTADOS

Con base en la configuración cognitiva de las soluciones de los futuros profesores al problema "Elemento representativo de un conjunto de datos", se han obtenido tres categorías de significados personales declarados de los alumnos.

Categoría 1. Alumnos que utilizan la media aritmética para la comparación de dos distribuciones

Práctica matemática: son alumnos que utilizan la media aritmética para la comparación de las dos distribuciones propuestas.

Un ejemplo de configuración cognitiva de uno de los siete alumnos que utiliza en su práctica la media aritmética para la comparación de las dos distribuciones propuestas, argumenta y su respuesta es correcta sería la siguiente (tabla 1).

Hay cuatro futuros profesores (alumnos 22, 25, 29 y 31) que han activado esta misma configuración cognitiva, y los otros dos (alumnos 21 y 38), aunque han calculado la media y han comprobado que la altura media saltada después del entrenamiento ha sido mayor, siguen afirmando que "*en la mayoría de los casos sí es efectivo*", por lo que se considera que, aunque usan la media aritmética para la comparación de las dos distribuciones, no tienen el concepto muy claro, ya que siguen basando sus argumentos en el comportamiento de los casos de manera aislada.

La configuración cognitiva del futuro profesor (alumno 6) que utiliza en su práctica la media aritmética para la comparación de las dos distribuciones propuestas, argumenta y su respuesta es incorrecta, sería similar a la anterior, ya que calcula las medias de cada una de las distribuciones, pero concluye que el entrenamiento *"No ha sido efectivo porque la media antes del entrenamiento* $\bar{x} = 115.6$ *y después la* $\bar{x} = 120.4$*"*.

Tabla 1. Configuración cognitiva alumno 24

Utiliza la media aritmética para la comparación de las dos distribuciones propuestas, argumenta y su respuesta es correcta	Alumno 24
SITUACIÓN PROBLEMA	*Problema. Elemento representativo de un conjunto de datos (al medir la altura…)*
LENGUAJE 115 + 112 + 107 + 119 + 115 + 138 + 126 + 105 + 104 + 115 = 1156 1156/10 = 115'6. 128 + 115 + 106 + 128 + 122 + 143 + 132 + 109 + 102 + 117 = 1204 1204/10 = 120'4. Sí, el entrenamiento es efectivo, porque la media de salto antes era 115'6 y ahora es de 120'4; y $\boxed{120'4 > 115'6}$.	Verbal relacionado con el contexto: entrenamiento, salto. Simbólico: números enteros y decimales, suma (horizontal), división, fracción.
CONCEPTOS-DEFINICIONES	Media aritmética: $\bar{x} = \left(\frac{\bar{x}_i}{n} = \frac{(x1 + x2 + \ldots + x_n)}{n} \right)$ Comparación de medias Suma División
PROPOSICIONES	El entrenamiento es efectivo
PROCEDIMIENTOS	Cálculo de la media aritmética Comparación de las dos medias
ARGUMENTO	Tesis: el entrenamiento es efectivo Argumento: porque la media de salto antes era 115.6 y ahora es de 120.4; y 120.4 >115.6

Categoría 2. Alumnos que analizan los casos de manera aislada para la comparación de dos distribuciones

Práctica matemática: son alumnos que, para comparar las dos distribuciones propuestas, utilizan casos aislados en cada una de ellas.

Las respuestas aportadas por los 27 futuros profesores son incorrectas: 24 de ellos, aunque afirman que el entrenamiento es efectivo, basan sus argumentos en procedimientos que no siempre proporcionan la solución correcta; y los otros tres consideran que el entrenamiento no es efectivo. Según el procedimiento utilizado, en esta segunda categoría se distinguen tres grupos:

Grupo 1. Alumnos que utilizan en su práctica el análisis de los casos de manera aislada y calculan el porcentaje de alumnas que han mejorado sus resultados. Un ejemplo de configuración cognitiva de uno de los siete futuros profesores de este grupo, que argumenta y su respuesta es incorrecta sería la siguiente (tabla 2).

Grupo 2. Alumnos que utilizan en su práctica el análisis de casos aislados, calculan el número de alumnas que han mejorado sus resultados, argumentan y sus respuestas son incorrectas. Está integrado por 16 futuros profesores que utilizan en su práctica una configuración cognitiva similar al caso anterior, pero consideran el número de casos en lugar de porcentajes. Entre ellos, hay dos que afirman que el entrenamiento no es efectivo, porque "*algunos alumnos han superado bien el ejercicio y en cambio otros han empeorado*" (alumno 11) o "*porque después del entrenamiento, excepto en un par de casos, los alumnos saltan más que antes del entrenamiento, por lo que no tienes una medida estable*" (alumno 20).

Grupo 3. Alumnos que utilizan en su práctica el análisis de casos de manera aislada, calculan la suma de las desviaciones entre el valor obtenido después y antes del entrenamiento para cada una de las alumnas. Está constituido por cuatro futuros profesores: tres, que argumentan que el entrenamiento es efectivo, pero sus respuestas son incorrectas (alumnos 23, 27 y 40); este último comete errores de cálculo en alguna diferencia, y uno, que utiliza una configuración cognitiva similar, considera que el entrenamiento no es efectivo, porque "*hay varias alturas y no se varía de la misma unidad*" (alumno 28).

Tabla 2. Configuración cognitiva alumno 36

Utiliza el análisis de los casos de manera aislada, calcula el porcentaje de alumnos que han mejorado sus resultados para la comparación de dos distribuciones casi simétricas, argumenta y su respuesta es incorrecta.	Alumno 36
SITUACIÓN PROBLEMA	*Problema. Elemento representativo de un conjunto de datos (al medir la altura...)*
LENGUAJE Este entrenamiento es efectivo, porque el 80% de los escolares ha obtenido un salto mayor que en los anteriores entrenamientos, frente a un 20% que ha descendido negativamente su puntuación.	Verbal relacionado con el contexto: entrenamiento, salto. Simbólico: números enteros y porcentajes.
CONCEPTOS-DEFINICIONES	Comparación de casos aislados Porcentaje
PROPOSICIÓN	El entrenamiento es efectivo
PROCEDIMIENTO	Cálculo del porcentaje
ARGUMENTOS	Tesis: el entrenamiento es efectivo Argumento 1: porque 80% de los escolares ha obtenido un salto mayor que en los anteriores entrenamientos. Argumento 2: frente a 20% que ha descendido negativamente su puntuación.

Categoría 3. Alumnos que no utilizan ningún cálculo para la comparación de dos distribuciones

Práctica matemática: son alumnos que no utilizan ningún cálculo para comparar las dos distribuciones y aportan otro tipo de argumentos.

En esta categoría hay dos futuros profesores: uno que considera que el entrenamiento sí es efectivo, "*ya que, al entrenar, el cuerpo queda predispuesto para avanzar en los resultados iniciales*" (alumno 17); y otro, que argumenta que "*en algunos casos sí y en otros no es tan efectivo, puesto que no dan más de lo que dieron al principio*" (alumno 32).

En resumen, se han identificado tres categorías de significados personales declarados de los futuros profesores: categoría 1, con ocho futuros profesores que utilizan la media aritmética y aportan argumento y respuesta correctos, salvo uno; categoría 2, con 27 futuros profesores que analizan los casos de manera aislada y sus argumentos y respuestas son incorrectos; categoría 3, con dos futuros profesores que no utilizan ningún cálculo y sus argumentos y respuestas son también incorrectos. En la categoría 2, según el procedimiento utilizado, se distinguen tres grupos: grupo 1, con siete futuros profesores que calculan los porcentajes de casos que han mejorado después del entrenamiento; grupo 2, con 16 futuros profesores que calculan el número de casos que han mejorado después del entrenamiento; grupo 3, con cuatro futuros profesores que utilizan la suma de las desviaciones entre el valor obtenido después y antes del entrenamiento para cada una de los casos, uno de los cuales comete errores de cálculo.

En la tabla 3, quedan recogidas las tipologías de significados personales declarados de los futuros profesores y la frecuencia de cada una de ellas, indicando si son correctas o incorrectas y si argumentan o no su respuesta. En ella se observa que, aunque la media aritmética es el parámetro más eficiente para realizar la comparación de las dos distribuciones, sólo ocho futuros profesores la utilizan (20%).

Tabla 3. Frecuencia de tipologías de significados personales declarados en el problema

Tipologías	Correcta		Incorrecta		No contesta	Total
	Argumenta	No argumenta	Argumenta	No argumenta		
Media	7	0	1	0		8
Casos aislados	0	0	27	0		27
Otras	0	0	2	0		2
No contesta						3
Total	7	0	30	0	3	40

Han obtenido el resultado correcto solo siete futuros profesores (17.5%), donde todos han aportado el argumento correcto. Han respondido de manera incorrecta 30 (75%), que han cometido los siguientes errores: 27 de ellos, que han analizado los casos de manera aislada, basan sus argumentos en procedimientos que no siempre proporcionan la solución correcta; uno que, aunque utiliza la media, no la interpreta bien y responde que el entrenamiento no es efectivo, y dos no han utilizado ningún cálculo y han argumentando de modo erróneo. No contestan tres futuros profesores (7.5%).

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

La herramienta *configuración cognitiva*, propuesta por el EOS, ha permitido poner de manifiesto la gran variedad de tipologías de significados personales declarados de los futuros profesores de Educación Primaria cuando resuelven problemas de estadística, en particular, problemas de media aritmética. En total, se han identificado tres categorías en el problema "*Elemento representativo de un conjunto de datos*", las cuales han sido descritas anteriormente.

El porcentaje de respuestas correctas es apenas de 17.5%, mucho más bajo que el obtenido por Leavy y O'loughlin (2006) de 57%, por Estrada (2007) de 73%, y por Batanero, Godino y Navas (1997) de 51%, aunque en estos dos últimos casos el problema era de respuesta múltiple y la información se presentaba mediante gráficos.

Ochenta por ciento de los futuros profesores no tiene en cuenta la media aritmética para la comparación de estas dos distribuciones, porcentaje que se reduce a la mitad en el estudio de Leavy y O'loughlin (2006), y en su práctica activa otras configuraciones cognitivas son incorrectas o no contesta. Destaca el alto porcentaje de alumnos que aporta argumentos incorrectos (75%).

Los errores encontrados son similares a los descritos por Estrada (2007), Leavy y O'loughlin (2006) y Batanero, Godino y Navas (1997). Entre ellos, se pueden citar la incorrecta utilización del análisis de casos de manera aislada y errores de cálculo. Las causas pueden ser consecuencia de su escasa formación en estadística y de que recibieron, en general, una enseñanza basada en situaciones descontextualizadas, donde sólo había que aplicar el algoritmo de la media aritmética.

En relación con la comprensión matemática de la media aritmética, desde el enfoque teórico utilizado en este trabajo se puede considerar que los futuros profesores que han aplicado este concepto en el problema analizado manifiestan un mayor nivel de comprensión que quienes no la han utilizado ni la han relacionado con esta situación; ya que han establecido una función semiótica entre el problema y el objeto "media aritmética", que les ha permitido reconocer el problema propuesto como una situación extramatemática que cae bajo el dominio de dicho objeto. Se trata de un hecho significativo si se tiene en cuenta que, tal como está formulado el problema, en ningún momento queda explícito que se deba utilizar la media. Esto ha sido corroborado por Leavy y O'loughlin (2006), quienes consideran que un indicador de la comprensión conceptual de la media aritmética es el reconocimiento de situaciones donde la media es una medida adecuada.

Estos resultados ponen de manifiesto que muchos de los errores continúan hasta la universidad y esto apunta a la necesidad de reforzar la formación estadística elemental de los futuros profesores de Educación Primaria; que difícilmente podrán enseñar un concepto que no comprenden y en el que muestran dificultades tan notables.

Como reflexión final, se considera que el formador de profesores debe tenerlas en cuenta, además del razonamiento estadístico, al abordar la enseñanza de la estadística en las facultades de Educación, cambiando no sólo los contenidos sino la metodología. Para ello, se debe proponer a los futuros profesores una muestra de situaciones experimentales y contextualizadas que sean representativas del significado global de la media aritmética y prepararlos en la componente pedagógica, mostrándoles situaciones de uso en el aula, metodología didáctica y los aspectos cognitivos.

NOTA

Esta investigación forma parte del Proyecto EDU2010-14947 (MICINN y FEDER) y del proyecto EDU2009-08120/EDUC y ha sido cofinanciada por el Plan Propio de Investigación de la Universidad de Granada: Programa 20.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Batanero, C. (2000), "Significado y comprensión de las medidas de posición central", *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas,* núm. 25, pp. 41-58.

Batanero, C., J. Godino y F. Navas (1997), "Concepciones de maestros de primaria en formación sobre los promedios", en H. Salmerón (ed.), *VII Jornadas LOGSE: Evaluación Educativa,* Granada, Universidad de Granada, pp. 304-310.

Biggs, J. B. y K. F. Collis (1991), "Multimodal Learning and the Quality of Intelligent Behavior", en H. A. H. Rowe (ed.), *Intelligence: Reconceptualization and measurement,* Hillsdale, NJ, Erlbaum, pp. 57-76.

Cobo, B. y C. Batanero (2004), "Significados de la media en los libros de texto de secundaria", *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas,* vol. 22, núm. 1, pp. 5-18.

Eco, U. (1979), *Tratado de semiótica general,* Barcelona, Lumen.

Espinel, M. C. (2007), "Construcción y razonamiento de gráficos estadísticos en la formación de profesores", en M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (eds.), *Investigación en Educación Matemática XI,* Tenerife, SEIEM, pp. 99-119.

Estrada, A. (2007), "Evaluación del conocimiento estadístico en la formación inicial del profesorado", *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas,* núm. 45, pp. 78-97.

Font, V. y A. Contreras (2008), "The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education", *Educational Studies in Mathematics,* núm. 69, pp. 33-52.

Font, V. y J. D. Godino (2006), "La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores", *Educaçao Matemática Pesquisa,* vol. 8, núm. 1, pp. 67-98.

Font, V., J. D. Godino y C. Contreras (2008), "From representations to onto-semiotic configurations in analysing the mathematics teaching and learning processes", en L. Radford, G. Schubring y F. Seeger (eds.), *Semiotics in mathematics education: epistemology, history, classroom, and culture,* Rotterdam, Sense Publishers, pp. 157-173.

Gal, I. (2005), "Democratic access to probability: Issues of probability literacy", en G. A. Jones (ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning,* Nueva York, Springer, pp. 39-63.

García Cruz, J. A. y A. J. Garrett (2008), "Understanding the Arithmetic Mean: A Study with Secondary and University Students", *Journal of the Corea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education,* vol. 12, núm. 1, pp. 49-66.

Garrett, A. J. (2008), *La media aritmética: aspectos cognitivos, estrategias, errores y dificultades en su comprensión por el alumnado,* Tesis doctoral inédita, Tenerife, Universidad de La Laguna.

Godino, J. D. y C. Batanero (1994), "Significado institucional y personal de los objetos matemáticos", *Recherches en Didactiques des Mathématiques,* vol. 14, núm. 3, pp. 325-355.

Godino, J. D., C. Batanero y V. Font (2007), "The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education", *ZDM-The International Journal on Mathematics Education,* vol. 39, núms. 1-2, pp. 127-135.

Godino, J. D., C.Batanero, R. Roa y M. Wilhelmi (2008), "Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers trough project work", en C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (eds.), *Proceedings of the* ICMI *Study 18 and 2008* IASE *Round Table Conference*, Monterrey, México, ICMI/IASE, pp. 1-6.

Leavy, A. y N. O'loughlin (2006), "Preservice teachers understanding of the mean moving beyond the arithmetic average", *Journal of Mathematics Teacher Education*, núm. 9, pp. 53-90.

Malaspina, U. (2007), "Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 10, núm. 3, pp. 365-399.

Malaspina, U. y V. Font (2010), "The role of intuition in the solving of optimization problems", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 75, núm. 1, pp. 107-130.

Mevarech, Z. R. (1983), "A deep structure model of students' statistical misconceptions", *Educational Studies in Mathematics*, núm. 14, pp. 415-429.

Ministerio de Educación y Ciencia (2006), "Real Decreto 1513/2006, del 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria", Madrid, *Boletín Oficial del Estado*, núm. 293.

National Council of Teachers of Mathematics (2000), *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, VA, NCTM.

Olivo, E., C. Batanero y C. Díaz (2008), "Dificultades de comprensión del intervalo de confianza en estudiantes universitarios", *Educación Matemática*, vol. 20, núm. 3, pp. 5-32.

Ortiz, J. J., N. Mohamed, C. Batanero, L. Serrano y J. Rodríguez (2006), "Comparación de probabilidades en maestros en formación", en P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (eds.), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, Huesca, SEIEM, pp. 268-276.

Pollatsek, A., S. Lima y A. D. Well (1981), "Concept or computation: Students' understanding of the mean", *Educational Studies in Mathematics*, núm. 12, pp. 191-204.

Ramos, A. B. y V. Font (2008), "Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática", *Revista Latinoamericana de Educación Matemática Educativa*, vol. 11, núm. 2, pp. 233-265.

Secretaría de Educación Pública (SEP) (2006), *Programa de estudio. Educación secundaria*, México, Secretaría de Educación Pública. En línea: http://www.reformasecundaria.sep.gob.mx/matematicas/programa.html

Shaugnessy, J. M. (2007), "Research on Statistics Learning and Reasoning", en F. K. Lester (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* Greenwich, CT, NCTM, pp. 957-1008.

Stohl, H. (2005), "Probability in teacher education and development", en G. A. Jones (ed.), *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning,* Nueva York, Springer, pp. 345-366.

DATOS DE LOS AUTORES

Juan Jesús Ortiz de Haro
Facultad de Educación y Humanidades,
Departamento de Didáctica de la Matemática,
Universidad de Granada, España
jortiz@ugr.es

Vicenç Font Moll
Facultat de Formació del Professorat,
Departament de Didàctica de les Ciències Experimentals i la Matemàtica,
Universitat de Barcelona, España
vfont@ub.edu