Configuraciones epistémicas asociadas al número irracional. Sentidos y desafíos en Educación Secundaria

Luis Reina, Miguel R. Wilhelmi y Aitzol Lasa

Resumen. La evolución histórica del número irracional determina diferentes significados parciales de dicha noción. Estos significados pueden ser descritos mediante configuraciones epistémicas, constituidas por diferentes redes de objetos matemáticos (situaciones, acciones, lenguaje, conceptos, propiedades y argumentos). Estas configuraciones permiten el análisis de libros de texto de secundaria donde se introduce el número irracional, de tal forma que este análisis puede permitir a su vez la planificación de procesos de estudio de la noción.

Palabras clave: didáctica de las matemáticas, número irracional, configuración epistémica, holosignificado.

Epistemic configurations associated with the irrational number. Senses and challenges in secondary education

Abstract. The historical evolution of the irrational number determines different partial meanings of this notion. These meanings can be described by epistemic networks configurations, which are made up of different mathematical objects (situations, actions, language, concepts, properties and arguments). These configurations allow us to analyze how the textbooks introduce the irrational number, and this analysis might come in useful for the planning of study process of the notion.

Key words: mathematics education, irrational number, epistemic configuration, holistic meaning.

Fecha de recepción: 20 de Mayo de 2011. Fecha de aceptación: 13 de diciembre de 2012.

La reconstrucción de la noción de "número irracional" permite el análisis de las prácticas operativas, discursivas y regulativas en Educación Secundaria. En particular, se puede abordar el análisis de los libros de texto y, por lo tanto, valorar la presencia efectiva de distintos usos y significados de la noción en el currículo, así como su repercusión en procesos de estudio potenciales. Realizamos esta reconstrucción de la noción mediante algunas herramientas del "enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos" (EOS; Godino Font, Wilhelmi y Lurduy, 2010).

Según el EOS, el análisis de la actividad matemática comporta, en primera instancia, la determinación de los tipos de entidades intervinientes en dicha actividad. Se distinguen seis tipos primarios: situaciones, acciones, lenguaje, conceptos, propiedades y argumentos. En una segunda fase, estos objetos se relacionan entre sí formando, "configuraciones", definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas.

> Estas configuraciones pueden ser epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales). Los sistemas de prácticas y las configuraciones se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión personal e institucional (Font, Godino y D'Amore, 2007: 6).

La identificación de configuraciones epistémicas permite el análisis comparativo de libros de texto, por cuanto determinan una referencia para identificar ausencias y presencias relevantes para la introducción o desarrollo de una noción matemática. Con otras palabras, permiten un análisis de la *idoneidad epistémica* de procesos de enseñanza y aprendizaje potenciales basados en dichos libros de texto.

> La idoneidad epistémica se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia (Godino, Font y Wilhelmi, 2006: 2).

¿Cuál es el significado de referencia del número irracional en secundaria? Esta noción ha tenido diversos usos y significados a lo largo de la historia (sección 2), que nos permitirán construir las configuraciones de referencia (sección 4), según el marco teórico (sección 3). Este trabajo epistemológico permitirá el análisis de libros de texto (sección 5) y la conclusión sobre aspectos esenciales de la actividad matemática que puede potencialmente llevarse a cabo, así como algunas recomendaciones para los profesores. Pero antes de todo ello, en la sección 1, se motiva la necesidad de un estudio de la noción de número irracional en la enseñanza preuniversitaria.

EL NÚMERO IRRACIONAL COMO OBJETIVO PROPIO DE LA EDUCACIÓN SECUNDARIA

El número irracional no puede ser, en secundaria, una mera formación propedéutica, que encontraría su pleno sentido solo años más tarde en la universidad, en particular en las facultades de ciencias. En esta sección, justificaremos la pertinencia de su estudio con "carta de ciudadanía" en la educación secundaria.

PRINCIPIO DE NECESIDAD

Bergé y Sessa (2003) justifican por qué se puede afirmar que Euclides relacionó estrechamente la noción del continuo con los segmentos inconmensurables y cómo esta relación encierra una dificultad epistemológica esencial que dificulta la adquisición por parte de los estudiantes. De hecho, esta dificultad es estable en el tiempo, pudiéndose observar errores persistentes en estudiantes universitarios con relación a la completitud de la recta numérica real (Bergé, 2010).

Shinno (2007) resalta la importancia de los números irracionales como resultado de una medición o de una ecuación. Este autor concluye que la fracción continua puede ser un método que permita el necesario proceso de formalización para dar respuesta a las necesidades matemáticas en la transición práctica-teoría. Así, "la introducción de nuevos números debe ser una actividad cuyo fin sea responder a una necesidad o superar una limitación" (p. 187).

Scaglia (2000), basándose en la historia de las matemáticas, muestra cómo la noción de inconmensurabilidad "fuerza la necesidad" de trascender la manipulación concreta y progresar en el estudio de procesos infinitos. Esta necesidad no es por supuesto privativa de la inconmensurabilidad ni tiene su fundamento en la historia de las matemáticas. Muy al contrario, se refiere a un aspecto esencial en todo proceso de construcción y comunicación de un objeto matemático, ya en condiciones escolares, ya en relativo a la investigación de los matemáticos profesionales.

> La introducción y desarrollo de un tópico matemático debe fundamentarse en un *principio de necesidad*, según el cual una noción, proceso o significado matemáticos son necesarios

> para el cálculo de un ejercicio, la resolución de un problema o el análisis de una situación; cálculo, resolución o análisis que de otra forma sería muy costoso realizar e incluso inviable. La necesidad matemática se mide entonces en términos de costo, eficiencia o viabilidad (Contreras, Ordoñez y Wilhelmi, 2010, 378).

La fracción continua en la enseñanza secundaria

Los números irracionales pueden ser clasificados y diferenciados gracias a la potencia de métodos que involucran fracciones continuas (Reina, 2010). Estos métodos y otras propiedades, llevan a Iaffei (2008) a plantear la necesidad de incorporar las fracciones continuas como técnica de aproximación de irracionales en la enseñanza de las matemáticas en secundaria.

Sin embargo, los irracionales y las fracciones continuas suelen aparecer en secciones del tipo "curiosidades matemáticas", "para saber más", etc., normalmente desvinculadas de una verdadera actividad matemática y de un proyecto de enseñanza institucionalizado. De hecho, es clásica la introducción del número áureo (y de manera relacionada, en su caso, de la sucesión de Fibonacci), pero sin referencia a la familia de los "números metálicos" (Spinadel, 1995; 2003) o a la familia de los "números mórficos" (Redondo, 2008) de la que forma parte.

Sin embargo, Condesse y Minnaard (2007) han razonado por qué algunos acercamientos didácticos a esta familia pueden ser importantes en diferentes niveles de la enseñanza. Asimismo, la aparición más reciente del número irracional "plástico" (Stewart, 1996) y su relación con las espirales matemáticas como la logarítmica (Reina, 2008) son también conocimientos matemáticos que podrían motivar la importancia y utilidad del número irracional y, en particular, de las fracciones continuas (Redondo, 2008).

Por otro lado, la fracción continua como técnica de aproximación podría aportar "transparencia" en la representación, por parte del alumno, en la diferenciación entre un número racional y otro irracional, con el objetivo de disminuir la complejidad semiótica (Zaskis y Sirotic, 2004; 2010).

El infinito matemático: conflictos cognitivos y dificultades epistemológicas

Con relación al infinito matemático se presentan fenómenos didácticos como el de *aplastamiento,* que juega en contra de la construcción del *sentido del* *infinito* (D'Amore *et al.*, 2006) necesario para el reconocimiento de números irracionales.

En alumnos entre 16 y 17 años, este sentido del infinito se encuentra en construcción, suponiendo el infinito actual como una noción *contraintuitiva* (Garbín, 2005).

¿Cómo proponen Arrigo y D'Amore (1999) superar los obstáculos provocados por la cardinalidad de los conjuntos infinitos? A través de la noción de densidad, clave en la construcción de los números reales y, por lo tanto, en la necesidad de los números irracionales. Pero, como justifican Mamolo y Zazkis (2008), no solamente hace falta una "cultura matemática" de base que ayude a los alumnos a entender la noción de infinito matemático, sino que será necesaria una intervención sostenida, específicamente diseñada, que permita la conceptualización del infinito matemático.

El problema de las representaciones de los números irracionales

Zaskis y Sirotic (2004) observan una dualidad "transparencia-opacidad" en las representaciones de los alumnos de los números racionales e irracionales que dificulta su distinción, hecho potenciado por el uso de la calculadora. Asimismo, la ubicación de un número irracional en la recta real plantea a los estudiantes conflictos cognitivos en general difíciles de gestionar (Sirotic y Zazkis, 2007).

Scaglia (2000) identifica dos dificultades de los estudiantes relacionadas con la representación: una, ¿cómo un número cuya representación (decimal) infinita puede asignársele un punto determinado en la recta real?; otra, ¿por qué la marca o trazo efectuados con lápiz para representar un objeto geométrico no "son realmente" el objeto ideal?

De hecho, las definiciones escolares usualmente utilizadas de número irracional parecen "competir" con las concepciones de los estudiantes (Zaskis y Sirotic, 2010) hecho que, evidentemente, debe ser tenido en cuenta en su enseñanza.

> Desde un punto de vista ontosemiótico, el problema no es si hay que introducir una sola representación de un objeto o más de una, ni qué traducciones o relaciones entre representaciones hay que tener en cuenta. El problema está realmente en determinar si las representaciones introducidas facilitan, o no, la realización de las prácticas que interesan que formen parte del significado global del alumno, en saber si aumentan o disminuyen la complejidad semiótica y también en saber si producen o no conflictos semióticos innecesarios (Font, Godino y D'Amore, 2007, 15).

Así, los profesores tendrán que elegir las representaciones mejor adaptadas al proceso de construcción de los significados personales de los estudiantes. En particular, habrá que tener en cuenta que esta construcción puede exigir un alejamiento de una realidad concreta (D'Amore, 2004) que, en el caso de los números irracionales, será insoslayable.

ORIGEN HISTÓRICO Y CONTEXTOS DE USO DEL NÚMERO IRRACIONAL

Conmensurabilidad, proporcionalidad o aproximación de irracionales por racionales son términos que actualmente son reconocidos como "próximos". Sin embargo, un breve análisis histórico nos permitirá comprender la complejidad de estas conexiones matemáticas y el coste intelectual que la humanidad ha debido invertir para establecerlas. Asimismo, nos dará un marco para la determinación de configuraciones asociadas al número irracional, que servirá de referencia para el análisis de libros de texto (sección 5).

LOS INCONMENSURABLES

Dadas dos longitudes *a* y *b*, se dice que son conmensurables si existen dos números *n* y *m*, enteros positivos ($n, m \in Z^+$), tal que:

$$a \,.\, n = b \,.\, m$$

Esto es, la razón de *a* y *b* es el número racional *n*/*m*.

En caso contrario (no existencia de *n* y *m* en las condiciones antes dichas), las cantidades *a* y *b* se dicen inconmensurables. La existencia de cantidades "inconmensurables" se debe al desarrollo de la geometría por la escuela pitagórica griega (siglo V a. C.). Entonces se observó, en particular, que no es posible determinar una razón entre las longitudes de la diagonal de un cuadrado y su lado, esto es, tales longitudes son inconmensurables.

La noción de inconmensurabilidad se mantendrá largamente "atada" a la geometría y a los problemas "clásicos" propuestos en la matemática griega (Rey Pastor y Babini, 2000a: 53). Es más, se evitó la entrada al infinito matemático, aspecto clave en la comprensión de los inconmensurables.

> Al desarrollar el estudio de la composición entre los entes geométricos, los griegos pusieron de manifiesto su gran intuición respecto a las nociones del continuo, del infinito matemático

> y del límite. Sin embargo, dichas nociones se quedaron solamente en un plano implícito y el énfasis se centró en la búsqueda de alternativas que tornaran "innecesarios" los procesos infinitos (que se remontan al periodo del descubrimiento de los inconmensurables) en la matemática (Crisóstomo *et al.*, 2005: 132).

Proporcionalidad e inconmensurabilidad

A pesar del origen de la noción de inconmensurabilidad en un contexto geométrico, esta emerge asociada a la proporción. Eudoxo de Cnido (408?-355? a. C.), en su teoría de proporciones, introduce el proceso de comparación entre magnitudes inconmensurables preservando la "homogeneidad" de las mismas.

Más aún, Eudoxo, en un contexto exclusivamente geométrico, logró una verdadera evolución, "pues resolvió al mismo tiempo las dos máximas dificultades que entonces se oponían a ese progreso: los irracionales y las equivalencias" (Rey Pastor y Babini, 2000a: 63).

Esta evolución provocada por la teoría de las proporciones en el tratamiento de la inconmensurabilidad provoca no solo una nueva configuración epistémica, sino una falla epistemológica con la anterior.

> Las rupturas epistemológicas se producen a partir de la constatación de la existencia de magnitudes de carácter inconmensurable y para eludir el infinito se crean los métodos de exhausción y de las razones entre las magnitudes, con la doble reducción al absurdo (Crisóstomo *et al.*, 2005: 135).

La aproximación de irracionales

Ya en la producción matemática de los babilonios se puede apreciar la aproximación sexagesimal de la raíz cuadrada de dos. El método general se desconoce, pero se propusieron diferentes alternativas (O'Connor y Robertson, 2001; Fowler y Robson, 1998) como el empleo de la media aritmética (Collette, 1985). Asimismo, estaban en conocimiento de las hoy denominadas "ternas pitagóricas".

El método de aproximación de irracionales por "fracciones continuas" tiene origen en la matemática babilonia. Una fracción se denomina "continua simple" cuando es posible expresarla en la forma:

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}}$$

Siendo a_0 un número entero y a_i ($i \in N$, $i > 0$) números enteros positivos.

Si el número es racional es posible aproximarlo por una fracción continua simple finita (es decir, con un número finito de a_j ($j \in N \cup \{0\}$). Si el número es irracional, puede ser aproximado por una fracción continua simple infinita (existen infinitos a_j ($j \in N \cup \{0\}$).

Los babilonios trabajaron en la resolución de problemas mediante fracciones continuas "ascendente" (Høyrup, 1990), cuya expresión actual es:

$$x = \cfrac{1 + \cfrac{1 + \cfrac{1 + \ldots}{a_3}}{a_2}}{a_1}$$

Según Høyrup (1990) este método, utilizado también en Egipto, perduró hasta el Medievo.

Numerosos análisis históricos (Heath, 1897; 1921; Hardy y Wright, 1975; Courant y Robbins, 1962; Rey Pastor y Babini, 2000a) refieren el uso más o menos estable en las distintas escuelas matemáticas de la fracción continua como método de aproximación de medidas y distancias. Desde la matemática griega a los desarrollos de Rafael Bombelli a finales del siglo XVI, hasta Euler (1707–1783) o Lagrange (1736–1813), las fracciones continuas fueron utilizadas como método para indagar, describir o utilizar números irracionales con una aritmética racional.

La irracionalidad

Las cortaduras de Dedekind (1831–1916) suponen una ruptura epistemológica con la teoría de las proporciones de Eudoxo, a pesar de las concomitancias sugeridas por diversos historiadores (Corry, 1994). Dedekind consideraba el principio de continuidad de Eudoxo inconsistente, estableciendo la necesidad de un desarrollo de la aritmética.

> En efecto, la forma en que los números irracionales usualmente se introducen se basa directamente en el concepto de las magnitudes extensivas –concepto que no se define cuidadosamente en ninguna parte– y explica el número como el resultado de medir una magnitud por otro número de la misma naturaleza. En lugar de este enfoque, exijo que la aritmética sea desarrollada a partir de sí misma (Dedekind, 1901: 9-10).

El trabajo de Dedekind, cambió el estatus epistemológico de los irracionales, que pasaron a ser "números". Este hecho es crucial, puesto que matemáticos notables, como Kronecker (1823−1891), negaban su existencia.

> ¿A qué vienen sus hermosas investigaciones sobre el número π? –observaba a Lindemann–. ¿Por qué elige tales problemas si en verdad no existen números irracionales de ninguna clase? (citado por Rey Pastor y Babini, 2000b: 169).

La definición matemática de número irracional, tal y como la conocemos actualmente, tuvo que afrontar, por lo tanto, cuestiones cruciales relativas al infinito matemático y el cardinal de conjuntos infinitos, la densidad de Q en R o la necesaria axiomatización debido a la imposibilidad de construir "efectivamente" ciertos números.

Todo ello permite enunciar, en el ámbito de la didáctica de las matemáticas, la hipótesis según la cual esta complejidad epistémica esencial de los números irracionales determina sobremanera los procesos de enseñanza y aprendizaje relativos a dicha noción. En la sección siguiente introducimos el marco teórico que nos permitirá un análisis de los libros de texto y, de manera indirecta, de los procesos de enseñanza potenciales que con ellos se podría llevar a cabo.

MARCO TEÓRICO

El enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) es una perspectiva fundada en tres aspectos: 1) las matemáticas son una actividad humana (fundamento *antropológico*); 2) los objetos matemáticos se relacionan entre sí de una manera "vital y necesaria" (fundamento *ecológico*); y 3), el conocimiento matemático es una respuesta a una cuestión práctica o teórica, ya intramatemática ya extramatemática (fundamento *pragmático*). La noción central de esta perspectiva es la de *situación problemática*, a partir de la cual emergen las nociones de "práctica matemática", "objeto matemático" y "significado de un objeto".

> En concreto se considera que los objetos matemáticos son emergentes de sistemas de prácticas. Dicha emergencia es un fenómeno complejo cuya explicación implica considerar, como mínimo, dos niveles de objetos que emergen de la actividad matemática. En el primer nivel tenemos aquellas entidades que se pueden observar en un texto matemático (problemas, definiciones, proposiciones, etc.). En un segundo nivel tenemos una tipología de objetos que emerge de las distintas maneras de ver, hablar, operar, etc., sobre los objetos del nivel anterior; nos referimos a objetos personales o institucionales, ostensivos o no ostensivos, unitarios o sistémicos, etc. (Godino, Batanero y Font, 2009: 6).

Esta actividad matemática es analizada por el EOS a partir de las seis entidades primarias siguientes (Godino *et al.*, 2009: 7):

- *Elementos lingüísticos* (términos, expresiones, notaciones, gráficos...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual...).
- *Situaciones-problema* (aplicaciones, tareas, ejercicios, cuestiones, etcétera).
- *Conceptos-definición* (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función...).
- *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos...).
- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo...).
- *Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo...).

Estas entidades primarias se interrelacionan formando configuraciones o redes de objetos, que serán *cognitivas* (relativas a una persona) o *epistémicas* (si son compartidas en el seno de una institución por un grupo de personas). Estas redes no son únicas para una determinada noción o proceso matemáticos, sino que están vinculadas a los contextos de uso que determinan sus distintos sentidos.

> Podemos entender que hay un uso ecológico del término contexto que permite situar el objeto matemático en diferentes "lugares", por ejemplo, diferentes instituciones (universidad, secundaria, etc.). Estos "lugares" no tienen por qué ser solo instituciones; pueden ser también, por ejemplo, diferentes programas de investigación o diferentes "juegos del lenguaje" (Ramos y Font, 2006: 539).

El estudio de estos diferentes "lugares" donde vive el objeto número irracional nos llevará a conocer los distintos "nichos" donde se alojó y se aloja este objeto que se manifiesta complejo.

> Ahora bien, puesto que cada problema se enmarca dentro de una configuración epistémica diferente se puede entender, de manera metafórica, que la situación-problema "sitúa" el objeto en un "lugar" o en "otro" es decir, lo relaciona con un determinado tipo de lenguaje, un determinado tipo de procedimientos y técnicas, un tipo de argumentaciones, una determinada definición del objeto y unas determinadas propiedades. Desde esta perspectiva, cada situación problema sitúa al objeto en un determinado "nicho". De esta manera, se tiene que la situación problema cumple dos funciones, una de referencia particular al activar la dualidad extensivo-intensivo y otra, de tipo "ecológico", al situar el objeto matemático en un "nicho" o bien en otro. (Ramos y Font, 2006: 541).

Entonces nos podríamos preguntar si "¿es posible estructurar en un complejo coherente distintas definiciones de una noción matemática emergentes de diferentes sistemas de prácticas en contextos de uso determinados?" (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007: 80). La noción de *holosignificado* introducida por estos autores permite responder a esta cuestión; es decir, determinar qué expresamos al afirmar que una persona comprende una determinada noción.

La adquisición del holosignificado supone la capacidad de poner en funcionamiento un *pensamiento matemático flexible* (PMF; Wilhelmi, 2003); es decir, la capacidad de tránsito rutinario entre diferentes significados asociados a un objeto matemático, reconociendo las limitaciones propias de cada uno de ellos; asimismo, el PMF permite establecer nexos firmes entre dichos significados y uno o varios contextos matemáticos, que determinan un control eficaz de la actividad y capacitan al sujeto para responsabilizarse matemáticamente de los resultados que produce. El holo-significado incorpora las relaciones entre dichos significados y las tensiones, filiaciones y contradicciones que entre ellos se establecen (que el pensamiento matemático flexible permite identificar, describir y controlar).

Así, el objetivo de este trabajo es la descripción de los diferentes "sentidos" asociados al número irracional, que pueden ser asociados a prácticas matemáticas propias de ciertos momentos históricos y su reflejo en los textos escolares.

CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS DE REFERENCIA

En esta sección describimos los distintos sentidos según las entidades primarias (situaciones, acciones, lenguaje, conceptos, propiedades y argumentos), que nos permitirá una comparación objetiva de las configuraciones asociadas.

Configuración epistémica implícita de los números irracionales

Esta configuración, que puede ser relacionada con la comparación entre magnitudes en un contexto preponderantemente geométrico y cuya noción fundamental es la inconmensurabilidad entre segmentos por medida común, puede ser descrita según los siguientes elementos de significado:

Lenguaje:

- *Verbal*: Predominantemente geométrico, ya que incluso el lenguaje aritmético es, en cierto sentido, "geométrico"; es decir, los parámetros representan magnitudes geométricas.
- *Gráfico*: Dibujos de segmentos y figuras geométricas, que nos han llegado a través de la obra *Elementos*, donde se muestran los procedimientos para considerar conmensurables o no segmentos entre sí y áreas de polígonos entre sí.
- *Simbólico*: Sistema notacional griego antiguo para números enteros positivos.

Situaciones. Problema de división de un segmento en media y extrema razón.

Conceptos. Número entero positivo. Magnitud. Segmentos conmensurables por medida común. Sección áurea. Razón. Proporción. Segmentos inconmensurables por medida común. Noción de infinito potencial, horror al infinito, que surge y que se mantendrá por mucho tiempo.

Procedimientos. Métodos geométricos, tales como: diagonal de un cuadrado en relación con su lado, diagonales de un pentágono regular en relación con sus lados, medición por medio de comparación de magnitudes geométricas, división de un segmento en extrema y media razón, *antifairesis*,[1] método axiomático (material, informal) en contraposición con la axiomática formal de Hilbert (1993).

[1] ***Antifairesis***: "a y b están en la misma razón que c y d cuando la antifairesis o sustracción recíproca entre a y b es la misma que entre c y d". Euclides usa esta noción para definir la inconmensurabilidad: "Si al restar continua y sucesivamente la menor de la mayor de dos magnitudes desiguales, la que queda nunca mide a la anterior, las magnitudes serán inconmensurables" (***Proposición 2 del libro X de los Elementos***).

Propiedades. Proposiciones y definiciones presentes en los "Elementos".

Argumentos. Deductivos. Demostración por reducción al absurdo (Dantzing, 1954).

Configuración epistémica explícita para los números irracionales

Esta configuración, que puede ser relacionada con el problema de preservación de la "homogeneidad de las magnitudes" y cuya noción fundamental es la de proceso de comparación entre magnitudes inconmensurables, puede ser descrita según los siguientes elementos de significado:

Lenguaje

- *Verbal*: Predominantemente geométrico, aunque también se presenta un lenguaje aritmético-geometrizado.
- *Gráfico*: Dibujos de segmentos y figuras geométricas que nos han llegado a través de los *Elementos*, que muestran los procedimientos para considerar el tratamiento de magnitudes inconmensurables.
- *Simbólico*. Sistema notacional griego antiguo, para números enteros positivos y fracciones.

Situaciones: Existencia del infinito potencial, imposibilidad del infinito actual. Problema de razones y proporciones entre magnitudes inconmensurables.

Conceptos. Número entero positivo. Magnitudes homogéneas. Número par e impar. Números primos entre sí. Razón. Proporción. Segmentos conmensurables por medida común. Segmentos inconmensurables por medida común. Razón entre magnitudes inconmensurables. Proporción. Continuidad de la recta (implícita).

Procedimientos. Medición por comparación de magnitudes geométricas.

Propiedades. Definiciones y Proposiciones plasmadas en los *Elementos*.

Argumentos. Deductivos. Método de exhaución. Demostración por doble reducción al absurdo (Rey Pastor y Babini, 2000a).

Configuración epistémica de la aproximación racional de números irracionales

Esta configuración, que puede ser relacionada con el proceso de aproximación mediante racionales de números irracionales, empleando originariamente métodos geométricos y más adelante analíticos, puede ser descrita según los siguientes elementos de significado:

Lenguaje

- *Verbal*: Geométrico. Algebraico.
- *Gráfico*: Dibujos de figuras geométricas.
- *Simbólico*: Notación de fracciones en el sistema sexagesimal. Diferentes notaciones para la fracción continua a través de los tiempos.

Situaciones. Problema de aproximación racional de números irracionales por distintos métodos. Problema de aproximación de irracionales por fracciones continuas.

Conceptos. Fracciones sexagesimales. Procedimientos para la extracción de raíces cuadradas. Máximo común divisor entre números. Métodos de aproximación: fracción continua ascendente. Fracción continua. Familia de los números metálicos. Familia de los números mórficos (Redondo, 2008).

Procedimientos. Estudio de irracionales por aproximación. Algoritmo de Euclides.

Propiedades. Propiedades de las fracciones continuas. Propiedades de la familia de los números metálicos. Propiedades de la familia de los números mórficos (Redondo, 2008).

Argumentos. Deductivos.

Configuración epistémica aritmética de los números irracionales

Esta configuración, que puede ser relacionada con la crisis de los fundamentos del cálculo, cuestiona lo que hasta ese momento se consideraba como transparente; a saber, la definición de número irracional como resultado de la medición de una magnitud mediante otra homogénea. Puede ser descrita según los siguientes elementos de significado:

Lenguaje

- *Verbal*: Conjuntista. Algebraico.
- *Gráfico*: Construcciones gráficas realizadas por Cantor para emparejar biunívocamente a los números enteros con los racionales.
- *Simbólico*: Notación para las cortaduras de Dedekind. Diferentes notaciones para algunos conjuntos numéricos propuestos por Dedekind.

Situaciones. Problema de fundamentación aritmética de números irracionales por distintos métodos. Problema de fundamentación de la completitud de la recta geométrica. Problema de diferenciación entre conjuntos infinitos. Problema planteado por el infinito actual.

Conceptos. Relación de equivalencia. Números racionales. Números irracionales (fundamentación geométrica). Límite de sucesiones. Infinito potencial. Principio de continuidad de la recta. Cortaduras. Números irracionales (fundamentación aritmética). No numerabilidad del continuo. Infinito actual. Conjuntos infinitos completos. Principio de correspondencia entre conjuntos infinitos. Cardinal de un conjunto infinito. Densidad del conjunto de los irracionales. Números transfinitos.

Procedimientos. Cortaduras de Dedekind. Límite de sucesiones fundamentales. Encaje de intervalos cerrados racionales. Búsqueda de funciones biyectivas entre conjuntos infinitos para establecer la coordinabilidad entre ellos.

Propiedades. Propiedades de orden. Axioma del Supremo. Propiedades de la continuidad. Conjunto perfecto (Velazco, 2005). Conjunto conexo.

Argumentos. Deductivos formales.

Configuración epistémica de la existencia y clasificación de números irracionales

Esta configuración asociada a un estado evolucionado de la noción de número irracional, donde la distinción entre números algebraicos y trascendentes es ya posible, puede ser descrita según los siguientes elementos de significado:

Lenguaje

- *Verbal*: Conjuntista. Algebraico.
- *Gráfico*: Construcciones geométricas de los números construibles.
- *Simbólico*: Conjuntista. Algebraico.

Situaciones. Problema de diferenciación entre números irracionales. Problema de construcción de números irracionales. Problema de representación en la recta numérica de números irracionales.

Conceptos. Relación de equivalencia. Números racionales. Números irracionales (fundamentación geométrica). Límite de sucesiones. Infinito potencial.

Números algebraicos y trascendentes. No numerabilidad de los números trascendentes. Números construibles. Cuerpos.

Procedimientos. Clasificación de irracionales y de irracionales cuadráticos (familia de los números metálicos) por fracción continua. Construcción geométrica de números irracionales (números construibles). Representación de irracionales en la recta numérica. Enumeración del conjunto de los números algebraicos. Método axiomático formal (segunda formulación).

Propiedades. Propiedades de los números construibles.

Argumentos. Deductivos formales.

La determinación de las configuraciones epistémicas relacionadas con una noción matemática permite un análisis fino de la presencia y alcance de dicha noción en los libros de texto escolares. Contreras, Ordoñez y Wilhelmi (2010) han mostrado este extremo con relación a integral definida. En la sección siguiente, proponemos un análisis de textos escolares argentinos que incluyen el número irracional para su enseñanza con alumnos de 2° de educación secundaria (14-15 años).

ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO DE SECUNDARIA

La muestra que analizamos es intencional, no habiendo un muestreo aleatorio. El criterio de selección es único: editoriales de mayor difusión en Argentina para 2° (14 años) o 3° (15 años), según la jurisdicción de la Educación Secundaria Básica.[2] Este criterio asegura una alta representatividad con relación al significado institucional de referencia, máxime cuando: por un lado, el Ministerio de Educación propuso unos núcleos de aprendizaje prioritarios (MECT, 2006) para el conjunto de las distintas jurisdicciones, hecho que ha homogeneizado las directrices generales de los libros de texto; por otro lado, el número de textos utilizados en toda la República con un número de colegios no marginal es aproximadamente de quince, considerándose tres textos los de más amplia difusión. Serán estos lo que se utilizarán en el presente estudio.

Los libros seleccionados son:

- Álvarez C., Álvarez F., Garrido L., Martinez S., Ruiz A. (2004). *Matemáticas 9*. Buenos Aires. Cúspide (Vicens Vives).

[2] El número irracional se ha encontrado inmerso en un proceso de desincretización (Chevallard, 1991) por lo que en el currículum de matemáticas de secundaria esta noción se hace presente en 2° (14 años) y en 3° (15 años) de Educación Secundaria.

- Piñeiro G., Rigetti G., Serrano G., Pérez M.(2008). *Matemática III.* Buenos Aires. Santillana.
- Stinsin L., Ziger, D. (2010). *Matemática 9 Activa.* San Isidro. Puerto de Palos.

Para hacer más ágil la escritura, codificaremos las configuraciones epistémicas de la siguiente manera:

- *CE-implícita*: Configuración epistémica implícita de los números irracionales.
- *CE-explícita*: Configuración epistémica explícita para los números irracionales.
- *CE-aprox*: Configuración epistémica de la aproximación racional de números irracionales.
- *CE-aritmética*: Configuración epistémica aritmética de los números irracionales.
- *CE-existencia*: Configuración epistémica de la existencia y clasificación de números irracionales.

En las siguientes secciones se muestra un análisis exhaustivo de cada uno de los libros de texto.

Cúspide (Álvarez *et al.*, 2004)

- *Situaciones*. Se incluyen situaciones de aproximación propias de la *CE-aprox*. Asimismo se introduce un método geométrico para la representación de números irracionales en la recta numérica real propio de la *CE-existencia*, pero este método no se aplica o se pone a prueba en la resolución de problemas.
- *Lenguaje*. Todos los tipos de lenguaje de las configuraciones son utilizados de alguna manera: geométrico, aritmético, simbólico, algebraico y conjuntista. A pesar de esta exhaustividad, el conjunto de los números irracionales no es denotado ni se establece de manera explícita la partición de R en números racionales e irracionales ($R = Q \cup (R \backslash Q)$).
- *Conceptos-regla*. La determinación de valores aproximados por tanteo (ensayo-error), así como cálculos aproximados, redondeo y encuadramiento implican la definición según la *CE-aprox*. La definición según

la CE-*aritmética* no se aborda, pero la necesidad de "otros números distintos de los racionales", relacionada con la densidad y el continuo de la recta real son sugeridos según el tipo de expresión decimal de un número (figura 1).

5. ¿Existen otros números aparte de los racionales?

Existen números con infinitas cifras decimales no periódicas. Uno de ellos es el conocido número π

$$\pi=3.141592653...$$

Estos números pueden ponerse en forma de fracción, y se llaman *irracionales*. En el siguiente punto veremos que al extraer una raíz aparece casi siempre irracional.

Figura 1. Definición de número irracional (Álvarez *et al.*, 2004, 30).

La *CE-existencia* se concreta en la observación de que raíces cuadradas y cúbicas de la mayoría de números son números irracionales, como sugiere el texto de la figura 1 (*al extraer una raíz aparece casi siempre un irracional*).

- *Propiedades*. No se consideran propiedades de todas las configuraciones epistémicas, salvo un análisis de la propiedad de densidad de Q en R.
- *Procedimientos*. En su mayoría se refieren a la *CE-aprox*, como una forma de garantizar la manipulación y el cálculo. Además, se muestra un procedimiento de representación y construcción de raíces de números cuadrados y no cuadrados (según el procedimiento geométrico atribuido a Teodoro de Cirene).
- *Argumentos*. Únicamente tres cuestiones precisan de una respuesta argumentada, sin necesidad de que esta sea formal. Así, por ejemplo, se solicita: "Justifica que la suma de un racional más un irracional es siempre irracional. Razona igualmente para el producto de un racional por un irracional" (Álvarez *et al.*, 2004: 39). Asimismo, se solicita justificar que "la diagonal de un cuadrado de lado l es $d=l\sqrt{2}$" y que "la altura de un triángulo equilátero de lado 2a es $h=a\sqrt{3}$" (Álvarez *et al.*, 2004: 163). El resto de ejercicios y problemas suponen una mera aplicación o uso de números irracionales sin el análisis de su naturaleza o su necesidad.

Santillana (Piñeiro *et al.*, 2008)

- *Situaciones*. Se presentan situaciones de todas las CE, excepto de la *CE-existencia*. En particular, se solicita la construcción geométrica de irracionales y su representación en la recta real.
- *Lenguaje*. Se utilizan lenguajes de todas las CE.
- *Conceptos-regla*. Se identifica a la *CE-aprox* en el método de redondeo y truncamiento. La CE-*aritmética* se hace presente en las caracterizaciones de número irracional (figura 4), pero estas no son confrontadas ni analizadas.

Se intenta dar significado a la introducción de las definiciones a través de la *medida irracional* de la raíz cuadrada de dos, para inmediatamente introducir las definiciones y los ejemplos (figura 4).

- *Propiedades*. La CE-*aritmética* es movilizada para el análisis de la densidad de Q y $(R\backslash Q)$ en R, así como para la observación de que los conjuntos N y Z son discretos. Asimismo, la *CE-existencia* es considerada por cuanto se menciona la continuidad de la recta numérica y se analiza con cierta formalidad la sucesión de Fibonacci y sus propiedades y el número áureo con ayuda de la calculadora.

> Un número se llama irracional si no es posible escribirlo como una fracción. La expresión decimal de un número irracional es infinita y no es periódica.
> Un ejemplo irracional es $\sqrt{2}$, observá sus primeras cifras 1,4142135623730950488...
> Hay muchas raíces cuadradas de números naturales que son irracionales. ¿Cómo te podés dar cuenta?
> Si la raíz cuadrada de un número natural no es un natural, entonces se puede asegurar que es un número irracional.
> Por ejemplo, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{49} = 7$, etc., son naturales; en cambio, $\sqrt{7}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{39}$, etc., son irracionales.

Figura 4. Definición de número irracional y ejemplos (Piñeiro *et al.*, 2008, 46).

- *Procedimientos*. Se explicitan los métodos propios de las CE-*explícita* y *CE-aprox*. Asimismo, la *CE-existencia* aporta métodos específicos para la representación y construcción de algunas raíces de números no cuadrados.

- *Argumentos*. Los procesos de argumentación y validación están prácticamente ausentes, puesto que solo se solicita la argumentación de la actividad en dos ejercicios, en ambos formalmente según la CE-*aritmética*.

Puerto de Palos (Stinsin y Ziger, 2010)

- *Situaciones*. Si bien se presentan situaciones de todas las *CE*, la *CE-existencia* se presenta de manera marginal únicamente en alguna situación que implica *reglas de formación* de conjuntos de números irracionales.
- *Lenguaje*. Se presentan todos los tipos de lenguaje de las distintas *CE*: geométrico, aritmético, simbólico, algebraico y conjuntista. Si bien se define el conjunto R como unión de los conjuntos de los números racionales e irracionales, al igual que en la editorial Cúspide, el conjunto de los números irracionales no es denotado ni se establece de manera explícita la partición de R en números racionales e irracionales ($R = Q \cup (R \backslash Q)$).
- *Conceptos-regla*. La introducción de las definiciones no se basa en un principio de necesidad. No se define al conjunto de los números irracionales, pero sí es simbolizado. La definición según la *CE-aprox* se identifica con los métodos de redondeo y truncamiento. Las caracterizaciones del número irracional se dan de una manera "fusionada" (figura 7). La *CE-existencia* es utilizada en la definición de la raíz enésima de un número, pero no se extiende a raíces cúbicas u otras que también pueden ser números irracionales.

Teóricamente

Hasta ahora se trabajó con números racionales, que son aquellos que pueden ser expresados, como el cociente entre dos números enteros. Existen expresiones decimales con infinitas cifras decimales no periódicas, que no pueden ser expresadas como el cociente entre dos enteros. Se conoce a este tipo de números como números **irracionales**

Algunos ejemplos de números irracionales son:

$\pi = 3.141592654\ldots$ $\sqrt{2} = 1.414213562\ldots$ $\sqrt[3]{4} = 1.587401052\ldots$

o bien todo número de infinitas cifras decimales con alguna regla de formación, por ejemplo:

1.1223334444... -2.0102030405... -0.1133557799...

Figura 7. Definición de número irracional y ejemplos (Stinsin y Ziger, 2010: 25).

- *Propiedades*. La introducción de la CE-*aritmética* evita las propiedades de continuidad de la recta numérica y la de completitud del conjunto de los reales (por ampliación del campo numérico mediante $R \setminus Q$). Las propiedades de las CE-aprox y la CE-*existencia* son asimismo omitidas.
- *Procedimientos*. La *CE-aprox* se extraen los métodos de redondeo y truncamiento y la *CE-existenci*a la representación de números irracionales en la recta real, pero este último método no es analizado según su campo de validez. Así, por ejemplo, no se explicita que existen números irracionales como π o $\sqrt[3]{4}$, usados como ejemplos (figura 7), para los cuales no es posible su construcción en la recta real mediante regla y compás.
- *Argumentos*. Los procesos de argumentación y validación están prácticamente ausentes.

Breve descripción general de los libros de texto

Los textos escolares muestran, evidentemente, concordancias y discrepancias en la forma en que los distintos objetos del significado asociados al número irracional son introducidos y desarrollados. Estos libros comparten algunos elementos de las entidades primarias.

- *Situaciones*. Todos los textos introducen situaciones de aproximación racional de irracionales. La mayoría presenta construcciones numéricas por alguna regla de formación. También son mayoritarias las situaciones de clasificación entre racionales e irracionales. Asimismo se presentan cuestiones o problemas relacionados con números “famosos” (π, número áureo) con un claro objetivo motivacional.
- *Lenguaje*. Todos los tipos de lenguaje de las configuraciones son utilizados por las editoriales, siendo los lenguajes aritmético y geométrico los más abundantes. Este uso permite, por un lado, ampliar el universo numérico y dotar de sentido a los números irracionales; por otro lado, restringe su uso en contextos algebraicos (como paso hacia la simbolización y la generalización) y en contextos analíticos (como procesos de paso al límite). Asimismo, el conjunto de los números irracionales en algunos libros de texto no es denotado, ni se establece de manera explícita la partición de R en números racionales e irracionales ($R = Q \cup (R \setminus Q)$).

- *Conceptos-regla*. Se introducen métodos para aproximar números irracionales. El número irracional es usualmente definido en un contexto geométrico (donde la medida es la noción clave), o como solución de ecuaciones polinómicas sin solución en Q. Se definen raíz cuadrada, cúbica y enésima de un número entero positivo. Sin embargo, la continuidad de la recta numérica o la completitud de los reales no son, en general, abordadas, y la definición de número irracional no se introduce como respuesta a un problema intramatemático, sino de manera ostensiva.
- *Propiedades*. Las propiedades de densidad y orden de (R/Q) en R son implícitamente consideradas como consecuencia de la aproximación por exceso y por defecto de irracionales por racionales. En general, dado que las prácticas operativas están en el centro de interés de los libros de texto, las propiedades de las distintas configuraciones epistémicas, más propias de las prácticas discursivas, quedan relegadas a un segundo plano.
- *Procedimientos*. Es mayoritaria la introducción de procedimientos para representar geométrica y numéricamente los irracionales. Sin embargo, no se discute el hecho de que existan números irracionales no construibles con regla y compás.
- *Argumentos*. Los procesos de argumentación y validación están prácticamente ausentes.

Es posible, asimismo, resaltar algunos aspectos generales del desarrollo de las configuraciones en los libros de texto. Así, en la introducción de los números irracionales, se privilegian *situaciones* de aproximación mediante decimales. La práctica matemática que se propone está fundamentada básicamente en el desarrollo de la CE-aprox. Esta opción se justifica, no siempre de forma explícita, por el hecho de que en otras ciencias, como la Física, las aproximaciones racionales son "suficientes" (Scaglia, 2000) y por la irrupción de la calculadora en las aulas como un medio común. La aproximación, además, está vinculada al *concepto-regla* privilegiado; a saber: "número que no admite expresión decimal periódica".

Esta decisión, el paso a la aproximación, implica asimismo la renuncia implícita a la introducción de *propiedades* fundamentales de los números irracionales. Esto es así, por cuanto se presume que "las operaciones con decimales son de sobra conocidas" y, por lo tanto, operar con las aproximaciones de los irracionales los hace "transparentes". Este hecho no impide la presentación de *procedimientos* para representar y construir geométricamente algunos números irracionales, como una forma de desvincular dichos números de sus aproximaciones, pero sin llegar a justificaciones o *argumentaciones* formales basadas en situaciones que, forzosamente, tendrían que ser intramatemáticas.

El “abandono” de la aproximación como única vía para introducir los irracionales se realiza por medio de la discusión de la naturaleza de los “radicales” y de la forma en que se opera con estos.

Por último, es importante señalar que todos los tipos de *lenguaje* de las configuraciones (geométrico, aritmético, simbólico, algebraico y conjuntista) están presentes en los libros de texto. Cierto que de forma no homogénea, siendo privilegiadas las representaciones *geométricas* (notablemente en la introducción), *algebraicas* (en la manipulación simbólica de expresiones y en la resolución de ecuaciones de segundo grado) y *aritméticas* (en situaciones de aproximación).

SÍNTESIS, CONCLUSIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

Vinculados al número irracional, se pueden introducir conceptos, propiedades y procedimientos que permiten la resolución de una gran variedad de situaciones, mediante distintos registros de lenguaje y formas de argumentación específicas. Así, el análisis realizado sobre el origen histórico de la noción “número irracional” permite la determinación de distintas configuraciones que dan respuesta a problemas intramatemáticos que no tienen solución en el conjunto de los números racionales. La integración de todas estas configuraciones constituye el *holosignificado* de la noción, es decir, permiten dar una respuesta a las preguntas:

- *¿Cuál es el significado del número irracional?* El conjunto de todos los objetos involucrados en las distintas configuraciones epistémicas y las relaciones que pueden establecerse entre ellas.
- *¿Qué significa conocer el número irracional?* La comprensión de una noción matemática puede tener distintos grados o niveles, que indican la adquisición de ciertos objetos de las configuraciones epistémicas y su relación entre ellos. De esta forma, la respuesta a la pregunta no es absoluta, sino relativa a un proyecto educativo concreto. El holosignificado no es, pues, un objetivo de enseñanza, sino una referencia para valorar los proyectos de estudio con relación a la noción.

Aquí, el holosignificado basado en el estudio histórico de la noción, sirve de referencia para el análisis de los textos escolares de las editoriales de mayor difusión e impacto en el sistema educativo.

A pesar de que la diferenciación entre racional e irracional es una preocupación común a los libros de texto analizados, las discrepancias y concordancias halladas dan cuenta de la heterogeneidad de las propuestas. Además, la introducción del número irracional no siempre se basa en un principio de necesidad, lo que podría redundar en una pérdida de sentido, por parte del alumno, en el aprendizaje de la noción de número irracional.

Se observa en la muestra de textos una introducción *reduccionista* basada en la aproximación y cuya justificación, explícita o no, se sigue de cuatro presupuestos:

- *Práctico*. Las aproximaciones mediante racionales son suficientes en la técnica, puesto que esta está sujeta a los instrumentos de medida, y para la resolución de situaciones "de la vida real".
- *Escolar*. Las calculadoras son un instrumento naturalizado en la escuela que permiten la manipulación numérica de aproximaciones de irracionales, pero no en general el trabajo con expresiones simbólico-literales (tal es el caso de paquetes informáticos especializados como *Mathematica* o *Maple*).
- *De enseñanza*. Los métodos de enseñanza basados en la aproximación de irracionales mediante decimales garantizan la introducción y desarrollo de aquellos mediante una actividad matemática (operativa y discursiva) naturalizada en la institución "secundaria", hecho que facilita su eficacia y minimiza su coste.
- *Cognitivo*. Los estudiantes de secundaria, en general, no tienen la capacidad de asimilar los conocimientos fundantes relacionados con el número irracional (conmensurabilidad, densidad de Q en R, continuidad de R, etcétera).

La utilización sistemática de aproximaciones por estas razones *prácticas* (resolución de situaciones extramatemáticas), *escolares* (uso de calculadora), *de enseñanza* (referencia a la actividad naturalizada con decimales) y *cognitivas* (dificultades de aprendizaje) hacen que los irracionales tengan un estatus "accesorio y prescindible" en la actividad matemática; es decir, no se motiva su pertinencia y necesidad ni en relación con el coste, ni la eficiencia ni la viabilidad (Contreras, Ordoñez y Wilhelmi, 2010: 378).

De esta forma, si bien estos presupuestos deben ser tenidos en cuenta en el diseño y puesta en marcha de proyectos de enseñanza y aprendizaje de la noción, es necesario, asimismo, observar que los números irracionales permiten progresar en el estudio de procesos de paso al límite, claves en el desarrollo de las nociones propias del Análisis Matemático (Artigue, 1998). Además, la representación en la recta real de números irracionales acarrea la problemática del infinito actual (Scaglia, 2000).

El paso al límite y el infinito actual son imprescindibles para la comprensión de cuestiones típicamente escolares tales como: expresión como fracción de decimales periódicos puros y mixtos, resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita, progresiones aritméticas y geométricas (en particular, sumas infinitas de razón positiva menor que la unidad), límites sucesionales o el estudio de ecuaciones polinómicas de grado superior a 2 (en particular de grados 3 y 4) sin solución racional (y que, por lo tanto, no son resolubles por el método Ruffini de factorización de polinomios).

Fundamentada la pertinencia de los números irracionales, queda todavía un largo camino para transformar las configuraciones epistémicas descritas en material de enseñanza. Las configuraciones no constituyen una ingeniería didáctica, sino la referencia obligada para su construcción. La construcción de tal ingeniería tendrá que implicar, asimismo, la determinación de pautas para la valoración de su idoneidad didáctica (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007), tanto *a priori* (previa a la puesta en marcha del proceso instruccional) como *a posteriori* (análisis de la experimentación en contraste con las expectativas).

Esta ingeniería tendría que integrar el paso a la aproximación como un procedimiento previo a un proceso infinito, donde las propiedades fundamentales de los números irracionales serían entonces necesarias. Este hecho supondría superar la máxima errónea siguiente: "puesto que las operaciones con decimales son de sobra conocidas, operar con las aproximaciones hace *transparentes* los números irracionales", que justifica de manera general la intervención actual en la secundaria.

Así, se deberían proponer situaciones de aproximación por defecto y por exceso no solo que involucrasen decimales, sino también fracciones (figura 14), que tendrían que ser acompañadas por técnicas de control del error cometido.

$$1 < \sqrt{3} < 2, \text{ ya que } 1^2 = 1 < 3 < 4 = 2^2$$

$$\frac{3}{2} < \sqrt{3} < \frac{4}{2}, \text{ ya que } \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} < \frac{12}{4} < \frac{16}{4} = \left(\frac{4}{2}\right)^2. \text{ Mejor aproximación: } \frac{3}{2} \text{ (por defecto)}$$

$$\frac{5}{3} < \sqrt{3} < \frac{6}{3}, \text{ ya que } \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} < \frac{27}{9} < \frac{36}{9} = \left(\frac{6}{3}\right)^2. \text{ Mejor aproximación: } \frac{5}{3} \text{ (por defecto)}$$

$$\frac{6}{4} < \sqrt{3} < \frac{7}{4}, \text{ ya que } \left(\frac{6}{4}\right)^2 = \frac{36}{16} < \frac{48}{16} < \frac{49}{16} = \left(\frac{7}{4}\right)^2. \text{ Mejor aproximación: } \frac{7}{4} \text{ (por exceso)}$$

Figura 14. Aproximación de $\sqrt{3}$ por fracciones.

Los procesos infinitos podrían incluir situaciones que impliquen el estudio de la "periodicidad", pura o mixta, de fracciones continuas. En la figura 15 se muestra una aproximación a un irracional mediante una fracción continua "truncada" y la notación del desarrollo infinito (Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo, 1969).

$1+\sqrt{3} \approx 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}}$	$\sqrt{3} \approx 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}}}}}}$
$1+\sqrt{3} = \left[\overline{21}\right]$	$\sqrt{3} = \left[1,\overline{12}\right]$

Figura 15. Aproximación y periodicidad pura y mixta en irracionales cuadráticos.

Serían asimismo necesarias actividades específicas que cuantificaran la pérdida de información que se tiene al aproximar un irracional por racionales. Por ejemplo, suponiendo que la tierra es una esfera cuyo radio mide 6 378 km, si se toman 3.14 o 3.1415926535 como aproximaciones de π, ¿es representativa la diferencia de la longitud del ecuador en cada caso?

Por último, es necesario abordar un estudio teórico que describa las diversas configuraciones epistémicas como un todo coherente y articulado (holosignificado), identificando aspectos que promuevan un pensamiento matemático flexible entre los objetos (situaciones, acciones, lenguaje, conceptos, propiedades y argumentos) que las constituyen.

Reconocimientos

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación EDU2010-14947, Ministerio de Ciencia e Innovación (MICINN) y fondos de FEDER.

Datos de los autores

Luis Reina, I.E.S. Del Atuel, Mendoza, Argentina.
luisd.reina@gmail.com
Miguel R. Wilhelmi, Universidad Pública de Navarra, España.
miguelr.wilhelmi@unavarra.es
Aitzol Lasa, Universidad Pública de Navarra, España.
aitzol.lasa@unavarra.es

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Álvarez C., Álvarez F., Garrido L., Martínez S., Ruiz A. (2004). *Matemáticas 9*. Buenos Aires. Cúspide (Vicens Vives).

Arrigo G., D'Amore B. (1999). 'Lo veo, pero no lo creo'. Obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de un teorema de Georg Cantor que involucra al infinito actual. En *Educación Matemática*, 11(1), 5–24.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? En, *RELIME*, 1(1), 40–55.

Bergé A. (2010). Students' perceptions of the Completeness Property of the Set of Real Numbers. En *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(2), 217–227.

Bergé A., Sessa C. (2003). Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. En *RELIME*, 6 (3), 163–197.

Chevallard Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. (2da ed.) Buenos Aires. Aique.

Crisóstomo E., Ordoñez L., Contreras A., Godino J. D. (2005). Reconstrucción del significado global de la integral definida desde la perspectiva de la didáctica de la matemática. En A. Contreras, L. Ordoñez y C. Batanero (Eds.), *Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas*. (pp. 125–166) Jaen, ESP. Universidad de Jaén.

Collette J. P. (1985). *Historia de las Matemáticas I.* Madrid. Siglo XXI.

Condesse V., Minnaard C. (2007). La familia de los números metálicos y su hijo pródigo: el número de oro. En *Revista Iberoamericana de Educación*. 42 (2), 10 marzo. Disponible en: http://www.rieoei.org/deloslectores/1522Minnaard.pdf

Contreras A., Ordóñez L., Wilhelmi, M. R. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la Universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. En *Enseñanza de las ciencias*, 28(3), 367–384.

Corry L. (1994). La Teoría de las Proporciones de Eudoxio vista por Dedekind. En *Mathesis* 10, 35–68.

Courant R., Robbins H. (1962). *¿Qué es la matemática? Una exposición elemental de sus ideas y métodos*. Madrid. Aguilar.

Dantzig T. (1954). Number: *The Language of Science. A critical Survey Written for the Cultured non-Mathematician* (Fourth Edition). New York: Garden City.

D'Amore B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. En *Uno* 35, 90–106.

D'Amore B., Arrigo G., Bonilla M., Fandiño M. I., Piatti A., Rodríguez J., Rojas P. J., Romero J. H., Sbaragli S. (2006). El sentido del infinito. En *Epsilon* 22 (2), n° 65, 187–216.

Dedekind, R. (1901). *Essays theory of numbers. I. Continuity and irrational numbers. II. The nature and meaning of numbers*. Chicago. The Open Court Publishing Company.

Font, V., Godino J. D., D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. En *For the Learning of Mathematics*, 27(2), 2–7. [Versión española disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/enfoque_ontosemiotico_representaciones.pdf]

Fowler D., Robson E. (1998). Square Root Approximations in Old Babylonian Mathematics: YBC 7289. En *Context. Historia Mathematica*, 25, 366–378.

Garbín S. (2005). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. En *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8 (2), 169–193.

Godino J. D., Batanero C., Font V. (2009). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. En *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127–135. [Versión española disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf]

Godino J. Bencomo D., Font V., Wilhelmi M. R. (2007). Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. [Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm.]

Godino J. D., Font V., Konic P., Wilhelmi M. (2009). El sentido numérico como articulación flexible de los significados parciales de los números. En J. M. Cardeñoso y M. Peñas (2009), *Investigación en el aula de Matemáticas. Sentido Numérico*. (pp. 117- 184) Granada: SAEM Thales y Dpto. de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. [Disponible en : http://thales.cica.es/granada/]

Godino J. D., Font V., Wilhelmi M. R., Lurduy O. (2010). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. En *Educational Studies in Mathematics*, in press. DOI: 10.1007/s10649-010-9278-x.

Godino J. , Font V. , Wilhelmi M. R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. En *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9 (Especial), 133–156. [Disponible en: http://www.clame.org.mx/relime.htm]

Hardy G. H., Wright E. M. (1975). *An introduction to the theory of numbers* (Fourth edition). Oxford. Clarendon Press.

Heath T. L. (1897). *The Works of Archimedes*. Cambridge. University Press.

Heath T. L. (1921). *A history of greek mathematics*, Vol. II. Oxford. University Press.

Hilbert D. (1993). *Fundamentos de la Matemática.* Traducción Luis Felipe Segura. Primera edición en español. Mexico. Mathema. pp. 17-22.

Høyrup J. (1990). On Parts of Parts and Ascending Continued Fractions. An Investigation of the Origins and Spread of a Peculiar System. En *Centaurus*, 33, 293–324.

Iaffei B. (2008). Los números irracionales como objeto de saber. Curso para profesores. *XXXI Reunión de Educación Matemática*. (pp. 1–33) Cuyo, ARG. Unión Matemática Argentina y Universidad Nacional de Cuyo.

Mamolo A., Zazkis R. (2008). Paradoxes as a window to infinity. En *Research in Mathematics Education*, 10 (2), 167–182.

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología (MECT) (2006). *Núcleos de aprendizaje prioritarios. EGB/ Nivel medio*. Buenos Aires. Autor. Disponible en (1 noviembre 2012): [Disponible en: http://www.me.gov.ar/curriform/nap.html].

O'Connor J., Robertson E. F. (2001). Pythagoras's theorem in Babylonian mathematics (1 noviembre 2012). [Disponible en: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/PrintHT/Greek_sources_2.html]

Piñeiro G., Rigetti G., Serrano G., Pérez M. (2008). *Matemática III.* Buenos Aires. Santillana.

Ramos A., Font V. (2006). Contesto e contestualizzazione nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica. Una prospettiva ontosemiotica. En *La Matematica e la sua didattica*, 20 (4), 535–556.

Redondo A. (2008). Los números mórficos en secundaria. En *Suma*, 57, 55-64.

Reina L. (2008). El aprendizaje matemático en un contexto histórico desde un entorno informático: los números irracionales y las espirales. En D. Prieto (Ed.). *Investigación Pedagógica en la Universidad. Diez años de docencia universitaria.* (pp. 123–138) Cuyo, ARG. Facultad de Filosofía y Letras de la Universidad Nacional de Cuyo.

Reina L. (2010). La fracción continua y el número irracional. Puntos de encuentro y algunos aportes didácticos. *Encuentro Latinoamericano de Profesores y Estudiantes de Matemática y Ciencias Naturales*. San Rafael, Mendoza, ARG. IES "Del Atuel".

Rey Pastor J., Babini J. (2000a). *Historia de la Matemática Vol. 1.* Buenos Aires. Gedisa.

Rey Pastor J., Babini J. (2000b). *Historia de la Matemática Vol. 2.* Buenos Aires. Gedisa.

Rey Pastor J., Pi Calleja P., Trejo C. (1969). *Análisis matemático, Vol. 1.* Octava edición. Buenos Aires. Kapeluz.

Scaglia S. (2000). *Dos conflictos al representar números reales en la recta.* Tesis doctoral no publicada. Granada. Dpto. de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Shinno Y. (2007). On the teaching situation of conceptual change: epistemological considerations of irrational numbers. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, and D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 4. (pp. 185–192) Seoul: PME.

Sirotic N., Zazkis R. (2007). Irrational numbers on a number line –Where are they? En *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38(4), 477–488. [Disponible en: http://www.peterliljedahl.com/wp-content/uploads/CS-Sirotic-IJMEST-2007.pdf]

Spinadel V. De (1995). La familia de los números metálicos y el diseño. Centro MAyDI de la Fac. de Arquitectura, Diseño y Urbanismo. Universidad de Buenos Aires. [Disponible en: http://cumincades.scix.net/data/works/att/4856.content.pdf].

Spinadel V. De (2003). La familia de números metálicos Cuadernos del CIMBAGE N°6 *Centro de Matemática y Diseño MAyDI*. Facultad de Arquitectura, Diseño y Urbanismo. Universidad de Buenos Aires. pp.17-44

Stewart I. (1996). Cuentos de un número desdeñado. En *Investigación y Ciencia*, 239 (Agosto).

Stinsin L., Ziger D. (2010). *Matemática 9 Activa*. San Isidro, ARG. Puerto de Palos.

Velasco A. (2005). El problema del continuo antes de Cohen (1873-1963). Aportaciones Matemáticas. En *Memorias*, 35, 61–69.

Wilhelmi M. R. (2003). Análisis epistemológico y didáctico de nociones, procesos y significados de objetos analíticos. Sección 2: Tesis doctorales, nº23. Pamplona. Universidad Pública de Navarra.

Wilhelmi M. R., Godino J. D., Lacasta E. (2007). Didactic effectiveness of mathematical definitions. The case of the absolute value. En *International Electronic Journal of Mathematics Education* 2(2). 72–90. [Disponible en: http://www.iejme.com/022007/d2.pdf].

Wilhelmi M. R., Godino, J. D., Lacasta E. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. En *Reserches en Didactique des Mathématiques*, 27 (1), 77–120. [Versión inglesa (2011): 'Epistemic configurations associated to the notion of equality in real numbers'. QRDM 21, 53–82. Disponible en: http://math.unipa.it/~grim/Wilhelmi_Q21.pdf]

Zazkis R., Sirotic N. (2004). Making sense of irrational numbers: Focusing on representation. En M. Johnsen Høines and A. Berit Fuglestad (Eds.), *Proceedings of 28th International Conference for Psychology of Mathematics Education (PME)*, Vol. 4. (pp. 497–505) Bergen, Norway: PME.

Zazkis R., Sirotic N. (2010). Representing and Defining Irrational Numbers: Exposing the Missing Link. En *Research in Collegiate Mathematics Education* 7, 1–27.