Análisis de situaciones de aula en el contexto de la práctica de investigación: un punto de vista semiótico

Bruno D'Amore y Martha Isabel Fandiño Pinilla

Resumen: Un gran número de investigaciones en didáctica de la matemática presentan análisis de situaciones de aula que son resultado de prácticas de investigación o de experimentación generalmente ligadas a la negociación de significados (entre el docente que hace referencia al saber institucional y el estudiante). No siempre el objetivo de la investigación está relacionado con la semiótica directa o conscientemente; pero, aunque esto no sea así, siempre es posible proponer la semiótica como lente para interpretar los resultados, como medio para una lectura común. En este artículo quisimos recoger resultados de dos investigaciones experimentales, diversas entre sí (hechas con estudiantes de diferentes niveles escolares) e interpretarlas desde un punto de vista semiótico. Realizamos dichas investigaciones entre 1996 y el 1999; ya tienen tiempo y son muy diferentes entre ellas, pero aquí las reunimos porque nos interesa analizar sus resultados desde una perspectiva semiótica. Las investigaciones tienen como base los siguientes temas: dominio de los instrumentos algebraicos para calcular el volumen de una pirámide ideal *vs* el fracaso en el cálculo del volumen de una pirámide real (8° año de escolaridad); análisis del dominio de diversas representaciones semióticas del concepto de relación binaria en un ejemplo particular (diversos niveles de escolaridad). De cada una de estas investigaciones se da una breve descripción, y se remite al lector a la bibliografía que acompaña cada estudio, por si es el caso que desee conocer en profundidad la investigación a la cual se hace referencia.

Palabras clave: situaciones de aula, práctica investigativa, representaciones semióticas de los objetos matemáticos, dualidad significante /significado

Analysis of classroom's situations in the context of the research's practice: a semiotic point of view

Abstract: Much research in mathematics education presents analyses of classroom situations that are the result of research or experimental praxis generally linked to negotiation of meaning between the teacher, who refers to institutional knowledge, and the student. The focus of this research is not always related directly or consciously to semiotics, but even when this does not happen it is always possible to propose semiotics as a perspective for interpreting the research or as a means to achieving a common reading. Our intention is to take the results of two different experimental research projects, each one conducted with students from different school levels, and interpret them from a semiotic point of view. These researches were conducted between 1996 and 1999 and have very different characteristics, but they can be linked together by analyzing them from a semiotic point of view. They are based on the following topics: the domain of algebraic tools for calculating the volume of an ideal pyramid *vs.* the failure in calculating the volume of a real concrete pyramid (8th year of schooling); analysis of the domain of various semiotic representations of the concept of binary relation in a particular example (different levels of schooling). For each of these examples, we propose a brief description together with bibliographical references that will enable the reader who wishes to study in more depth the research in question.

Keywords: classroom situation, research practice, semiotic representations of mathematical objects, duality signifier/signified

Fecha de recepción: 23 de enero de 2012. Fecha de aceptación: 3 de diciembre de 2012

PREMISA

El objetivo de este texto es presentar investigaciones antiguas que ya fueron objeto de investigación, pero con ojos más modernos, con los instrumentos analíticos y críticos que la semiótica ofrece hoy en día. Por lo tanto, primero se presentan brevemente las investigaciones y sus resultados, y después se comentan bajo una visión semiótica, como dice el título. El foco común de los análisis son las relaciones entre significantes (registros de representación) y significados.

El volumen de una pirámide

Preliminares relativos a la investigación

En el trabajo de A. Cassani, C. Deleonardi, B. D'Amore y G. Girotti (D'Amore siendo titular del curso de Didáctica de la Matemática, y los otros tres autores estudiantes del curso) (Cassani *et al.*, 1996) se consideran como problemas rutinarios los ejercicios en los cuales se debe calcular el volumen de una pirámide recta de base cuadrada, cuando se dan las medidas del lado de la base y de la arista lateral. El estudiante aplica un procedimiento que conoce muy bien, usando dos veces el teorema de Pitágoras. Son ejercicios rutinarios para un curso de 3° de educación media en Italia (grado 8°, 13 años), que se resuelven, generalmente, al final del año escolar (en el mes de mayo, según el calendario italiano).[1] La difusión de este ejercicio en las escuelas es tal, que parece razonable hacer la hipótesis de que un alto porcentaje de estudiantes lo pueden resolver correctamente.

Los investigadores, entre los cuales estaba entonces uno de los autores del presente artículo se preguntaron:

1. ¿Cuál será la actitud del estudiante frente a una situación decididamente poco común, en la cual se proporciona una pirámide real, y no un simple dibujo, para medir el volumen de dicha pirámide (modelo concreto)?
2. ¿Se tendrá, por parte de los estudiantes, un comportamiento dirigido principalmente a usar el conocimiento formal (la fórmula que se usó en el desarrollo del ejercicio escrito) que requiere para resolver el problema, cuando frente a sí tiene el objeto concreto o, por el contrario, se hará evidente el contraste entre la aplicación de una fórmula en condiciones rutinarias y la aplicación de la misma en una situación del todo insólita?
3. ¿Qué diferencia se presenta en las respuestas, si el problema con la pirámide concreta se propone inmediatamente después de la resolución del problema formal, o si se propone sin ninguna referencia explícita a este tipo de problema formal?
4. ¿Qué diferencia se presenta en las respuestas si se da al estudiante solo la pirámide (modelo concreto) con la tarea de medir el volumen, o si se le proporciona dicha pirámide junto con un instrumento de medida como una regla? En este caso, ¿se dirige la atención del estudiante a la medición de algo si se da el instrumento?

Hipótesis de investigación

Las hipótesis de la investigación, que se presentan enseguida, fueron las siguientes.

[1] El sistema escolar italiano prevé: cinco años de escuela primaria (6-11 años), tres años de escuela media (11-14 años) y cinco años de escuela superior (14-19 años).

Hipótesis 1: Se tomó como hipótesis de base que los estudiantes de este nivel escolar sabían resolver el problema rutinario para este momento particular del año escolar, pero dicha hipótesis se debía verificar. Si se verificaba, serían interesantes las siguientes hipótesis.

Hipótesis 2: Se supone un fuerte descenso, en porcentaje, de los estudiantes que resuelven el problema concreto respecto a los que lo resuelven de forma rutinaria. Además, si el problema con la pirámide concreta se propone después de la resolución del problema formal, aumentará probablemente el porcentaje de estudiantes que tenderán a repetir la misma estrategia de solución.

Hipótesis 3: Parecería plausible considerar que el contacto con la pirámide real podría haber hecho pensar en sistemas de cálculo del volumen que no requiriesen el uso de las medidas de las aristas (por ejemplo, la inmersión en un cilindro graduado lleno de agua), mientras que proporcionar explícitamente una regla orientaría a reconducir el problema sobre la pirámide real, a lo formal y rutinario.

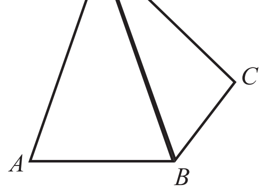
Metodología de la investigación

La metodología fue la que se expone enseguida.

Para llevar a cabo la investigación, se hicieron pruebas experimentales durante tres años (1992, 1993, 1994), en clases de 3º de educación media (8° grado) en Bologna (norte de Italia) y en localidades cercanas, con una población de más de 200 estudiantes. Trabajamos siempre con los alumnos en la última semana del año lectivo, momento en el cual, según varios docentes de la escuela media, el ejercicio propuesto por nosotros sería realmente (o debería ser) considerado rutinario.

Se eligió el siguiente ejercicio sugerido por los docentes y presente en los libros de texto:

> Se da una pirámide recta de base cuadrangular regular con vértice V y base ABCD.
> Calcula el volumen de esta pirámide.



$\overline{AB} = 10cm$
$\overline{AV} = 20cm$

El ejercicio se escribió en una hoja tamaño carta, se fotocopió y se entregó una copia a cada uno de los estudiantes elegidos para realizar el test de resolución escrita.

Año	*1992*	*1993*	*1994*
Nº alumnos	N=87	N=93	N=15
Instrumento *Características*	Test + unas entrevistas	68 solo test 10 test+entrevista(*) 15 solo entrevista(*)	Solo entrevista 5 pirámide maciza 5 esqueleto 5 las dos (**)
Hipótesis	1	Verificar los resultados de la hipótesis 1 del año anterior. Verificar la hipótesis 2	Verificar la hipótesis 3.

Experimento 1993. (*) 25 entrevistas eligiendo de forma aleatoria cinco alumnos de cada una de cinco clases diferentes: de manera aleatoria, a 15 se les dan la dos pirámides, diez solo pirámide maciza y luego se les muestra el esqueleto. A cada uno de los 25 se proporcionó una regla, con la tarea de medir el volumen de una de las dos pirámides, la que eligiesen (o de la pirámide maciza). Los estudiantes disponían, en todo momento, de hojas en blanco y de un bolígrafo. Los 15 entrevistados que no realizaron el test escrito, no conocían el contenido del mismo; los diez entrevistados, que sí lo habían realizado, fueron entrevistados apenas terminado el test escrito.

Experimento 1994. (**) Los 15 entrevistados pertenecían a tres clases distintas (cinco por clase) elegidos de forma aleatoria. No se proporcionaba nada más de forma explícita y la consigna era idéntica: "Encuentra el volumen de esta pirámide" (en el caso de una sola), o bien: "Encuentra el volumen de una de estas pirámides, la que tú elijas" (en el caso de disponer de las dos).

Resultados de la investigación

Los resultados se comentan a continuación.

Recordemos que en 1992 realizamos el test escrito solo para verificar si los estudiantes sabían resolver el problema rutinario.

Encontramos lo siguiente:

<table>
<tr><th></th><th>Prueba correcta</th><th>Prueba sustancialmente correcta (solo errores de cálculo o de aproximación)</th><th>Prueba no terminada o confusa; pero indica que el alumno sabe lo que tiene que hacer</th><th>Prueba non aceptable y con errores geométricos</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1992

(test escrito a n=87 estudiantes)</td><td>53</td><td>20</td><td>6</td><td rowspan="2">8</td></tr>
<tr><td colspan="3">91%</td></tr>
<tr><td>1993

(test escrito a n=78 estudiantes)</td><td colspan="3">77% (*)</td><td></td></tr>
</table>

(*) La explicación del resultado más bajo para nosotros fue la siguiente: la prueba del año 1992 se realizó en la ciudad de Bologna, mientras que la de 1993 se llevó a cabo, principalmente, en las escuelas de la periferia o en centros no urbanos. Está ampliamente demostrado que los resultados de la escolaridad obligatoria en los centros urbanos es superior a la de las zonas rurales, en todos los países.

Con referencia a la Hipótesis 2, veamos los resultados que se obtuvieron con los 25 estudiantes que se entrevistaron en 1993.

Estudiantes que miden la arista de la base y la altura de la pirámide maciza, apoyando la regla sobre la mesa en la cual estaba la pirámide y manteniéndola perpendicular, trazando una paralela imaginaria al plano de la base, desde el vértice de la pirámide a la regla: 2; [uno disponía de la pirámide maciza únicamente y el otro disponía de las dos pirámides; el primero había resuelto el problema de rutina con anterioridad y el otro no]	Estudiantes que miden la arista de la base y otro segmento: 23 (*)

(*) De estos 23:

Miden además la arista lateral	***Miden además la apotema aproximando la regla a una cara de la pirámide (independientemente de que se trate de la maciza o del esqueleto)***
6	17
De estos 6: *1: usa las medidas para reconducir su estrategia al caso del problema formal, como declara de forma explícita*	De estos 17: 9: proceden después correctamente, aplicando el teorema de Pitágoras una sola vez a las medidas de la mitad del lado de la base y a la apotema medida (por tanto, desarrollan un procedimiento de rutina conocido)

Miden además la arista lateral	*Miden además la apotema aproximando la regla a una cara de la pirámide (independientemente de que se trate de la maciza o del esqueleto)*
5: no completan el procedimiento	8: proceden como si la apotema encontrada fuese la altura y, por tanto, proponen la fórmula: área de la base por la altura (que en realidad es la apotema) dividido por 3 [de estos 8, solo 3 escriben su procedimiento sobre el papel]

El comportamiento de los estudiantes es variopinto y, por tanto, tendríamos que presentar de forma más detallada otros casos que observamos. Pero, por el fin de este trabajo, no entramos en detalles que el lector interesado puede ver en el texto original (Cassani *et al.*, 1996).

En lo que respecta a la Hipótesis 3, veamos los resultados que se obtuvieron con los estudiantes entrevistados en 1994.

De los 15 estudiantes, *ninguno* propuso estrategias para calcular el volumen de la pirámide que no implicasen la medida de alguna arista; en particular, ninguno pensó en sumergir la pirámide en un cilindro graduado lleno de agua o cosas similares, ni siquiera en el caso de la pirámide maciza.

Además, la posibilidad de usar la regla como instrumento para medir algo con lo cual poder evaluar el volumen aparece solo en cinco de los 15 casos; en nueve casos la regla es aceptada tras una propuesta explícita del entrevistador; en un solo caso el instrumento se considera inútil ("Pero esta, no sé, no sirve para nada"), incluso después de haberlo propuesto el entrevistador.

Resumamos las diferencias encontradas entre los 40 entrevistados (entre 1993 y 1994) bajo otro punto de vista que será interesante más adelante.

Diseño experimento entrevistados 1993 y 1994 (n= 25+15 =40)

	Realizando el test previamente	*Sin realizar el test previamente*
Con regla	10 Caso A	15 Caso B
Sin regla		15 Caso C

Discusión de los resultados de la investigación

Podemos ahora discutir los resultados de las investigaciones de los años 1993 y 1994.

Hipótesis 1. Con relación a la Hipótesis 1, los resultados la confirmaron plenamente; esto hace interesante la discusión de la Hipótesis 2.

Hipótesis 2. La Hipótesis 2 también se confirmó. De los diez estudiantes entrevistados que se sometieron al test escrito [caso A], solo uno replica el problema de rutina. La realización anterior del test no lleva a repetir la misma estrategia frente al problema concreto. Si se tiene en cuenta que la entrevista se realizó poco después de la prueba escrita, se corroboraba que, para muchos estudiantes, no hay relación alguna entre la prueba formal "de rutina" y la situación concreta "poco común".

Por otra parte, se confirmó el fuerte descenso en el porcentaje de estudiantes capaces de resolver el problema concreto; lo hicieron solo diez de los 25 estudiantes (40%), uno replicando el ejercicio escrito y nueve usando otra estrategia (la que usa la arista de la base y la apotema y, por tanto, una sola vez el teorema de Pitágoras). Estos nueve estudiantes pertenecen a los dos casos A y B, indistintamente.

Confirmamos que, porcentualmente, no aparece en absoluto relevante la opción de reutilizar el procedimiento del test escrito. Sin embargo, se debe decir que seis de los diez estudiantes usaron la hoja y el bolígrafo intentando, cuando menos, rehacer (inspirándose en la pirámide concreta) un dibujo como el del test escrito, aunque con gran dificultad.

Hacemos notar que la elección entre la pirámide maciza o vacía no modifica las respuestas de los estudiantes, al menos en lo concerniente a la Hipótesis 2.

Destacamos que de los 15 estudiantes a quienes se les dio la posibilidad de elegir entre la pirámide maciza o el esqueleto, 11 eligieron la maciza y cuatro la vacía; charlas informales con ellos nos inducen a pensar que la elección fue debida, sobre todo, a un hecho estético: la pirámide de madera está bien hecha, es elegante, mientras que la de metal tiene la punta ligeramente mocha. La elección de la maciza parece contrastar con un hecho observado marginalmente: de los 78 estudiantes sometidos al test escrito en el año 1993, 68 dibujaron las aristas no visibles en el dibujo que les propusimos.

Hipótesis 3. En cuanto a la Hipótesis 3, repetimos que de los 15 estudiantes sometidos a la prueba, ninguno propuso metodologías de evaluación del volumen distintas a la de la medida de las aristas. Por tanto nuestra Hipótesis 3 aparece totalmente desmentida.

En el curso de las entrevistas se presentaron casos particulares de interés; aquí omitimos la descripción de estos puntos, remitiendo a los interesados al texto integral de la investigación (Cassani *et al.*, 1996).

Respuestas a las preguntas planteadas

Es indudable que, salir de las situaciones de rutina para introducirse en situaciones "poco comunes", alejándose las cláusulas adquiridas por contrato didáctico, lleva al estudiante a una actitud de incertidumbre.

Por otra parte, un procedimiento rutinario parece desligado de la práctica, dado que son muy pocos los estudiantes capaces de conectar el problema concreto con el ejercicio rutinario, incluso si este último ha sido resuelto correctamente.

Parece no existir una diferencia significativa entre el hecho de que el problema concreto, en este caso con la pirámide, sea propuesto, o no, a continuación de un test escrito sobre el mismo tema.

La incertidumbre causada por el caso real es evidentemente la connotación más fuerte de toda la prueba.

La presentación de la pirámide concreta junto con un instrumento como la regla, da resultados diferentes al caso en el cual la pirámide se presenta sola, sin dicho instrumento. La presencia de la regla impulsa (no siempre de inmediato) a los estudiantes a medir alguna arista (muy difundida y casi espontánea la medida de la arista básica, como hemos visto). La ausencia de la regla deja sorprendidos a gran parte de los estudiantes; solo la sucesiva sugerencia por parte del entrevistador, de pedir cualquier cosa para actuar, los lleva a aceptar hacer uso de este instrumento, pero con dificultad. Algunos testimonios manifiestan que la pirámide real queda fuera de las costumbres didácticas (Giada declara: "La pirámide la hemos encontrado en el libro de geometría y luego hemos aprendido las fórmulas"). Otros testimonios muestran que algún estudiante se cree obligado a reconducir la situación a un caso formal, "de rutina" (Carmelo usa la hoja y el lápiz para dibujar una pirámide, después pide la regla y mide la altura de la pirámide dibujada; pero a continuación parece expresar la duda de que esa altura podría no ser la misma de la pirámide real propuesta por nosotros).

Hay muchos estudiantes que, incluso disponiendo de la regla y de la pirámide, no saben resolver el problema real (Mohamed establece la hipótesis de que "la regla no sirve para nada, ya que, según él, "los datos *se deben* dar al azar").

También es posible la aparición de artificios ("trucos") orientados a encontrar la solución: Enrico encastra la pirámide maciza dentro de la otra y declara que, conocido el volumen de una, se conocería el de la otra.

Emergen además, de forma dramática, errores de todo tipo. Federica, aun encontrándose frente a una pirámide maciza, habla de las "dos" bases de la pirámide; otros hacen referencia a fórmulas no adquiridas en la escuela que evocan solo vagamente la fórmula del volumen de la pirámide, situación esta última que no se presentó, en ningún caso, en el test escrito "de rutina", como vimos precedentemente.

¿Por qué esta notable dificultad para los estudiantes? En nuestra opinión, las causas son por lo menos las siguientes.

El problema no rutinario. Algunas cláusulas del contrato didáctico establecen que el trabajo en la escuela debe ser repetitivo; un elemento novedoso introducido en la rutina escolar desestabiliza la relación didáctica; el ajuste necesario no se puede hacer de un día para el otro, pues toma tiempo (Véanse las célebres observaciones de Wertheimer a este propósito en el clásico Wertheimer, 1959, y el parágrafo 13.3. de D'Amore, 1996/2011). Sería como introducir un elemento nuevo entre la ingeniería didáctica o en el *milieu* y esto cambia la conformación del triángulo de la didáctica en unos de sus elementos.

La quimera del cálculo exacto. El exceso de uso de cifras después de la coma en los ejercicios y la escasa presencia en la escuela de una sana actividad de aproximación induce la creencia, tal vez inducida explícitamente, de que en matemática se debe siempre operar "de forma exacta" (cualquiera que sea el significado de esta frase). Medir directamente la altura, sabiendo que esto producirá medidas no exactas sino aproximadas, incomoda a la mayor parte de los estudiantes (incluso si esta actitud no se muestra a menudo de forma consciente y explícita).

La falta de experiencia con material concreto. Consideramos útil, en general, salir de la rutina proponiendo problemas que se salgan de lo habitual y mejor aún si están ligados a la experiencia concreta. El caso del "volumen de la pirámide", examinado aquí, no es más que un ejemplo, pero ya que se ha trabajado sobre esto, nos parece útil recomendar no menospreciar los problemas concretos. Estamos de acuerdo con Fischbein (1993) y Fisher (1978) sobre el peligro que se corre al transformar toda la geometría en modelos concretos (véase también Mariotti, 1989, 1991, 1992a y b), pero de esto a hacer un menosprecio total, nos parece que hay una gran diferencia.

Un punto de vista semiótico

¿Qué es para el estudiante de 8° grado una pirámide? Existe una contradicción evidente y explícita. Si se habla de vida vivida, de historia, de viajes, entonces la pirámide es una forma arquitectónica que remite a Egipto, a Chichén Itzá, o al museo Louvre. Pero si se habla de matemáticas, en Italia la pirámide como objeto forma parte de la modelización matemática hasta 5° de primaria y después desaparece; reaparece en 8° con representaciones esquemáticas de diseños de pirámides vistas en perspectiva y en forma estereotipada estándar, aquella de los ejercicios que se encuentran en manuales o que el docente propone como tarea para verificar sustancialmente dos cosas:

- los conocimientos acerca de algunas nociones relativas al objeto matemático pirámide;
- el dominio de la aplicación del teorema de Pitágoras.

Existe un salto semiótico fuerte que nos lleva a pensar en la oposición entre realidad, modelo concreto, representación figural y objeto matemático que, si ya está construido, podría estar a la base; y, todo esto, como resultado que emerge de la práctica escolar.

En la situación de aula, en función del contrato didáctico y por el continuo uso de registros semióticos que, a veces, operan uno dentro del otro, paradójicamente, la propuesta de un modelo concreto (pirámide maciza de madera o pirámide "esqueletada" de metal), al contrario de dar tranquilidad por la posibilidad que lleva a la realidad, crea incertidumbre por la aparente contradicción respecto a lo habitual.

Nosotros consideramos que la representación semiótica figural de la pirámide en perspectiva debería ser la esquematización de la realidad, no ser *la* realidad; porque en tal caso, hay algo que no está bien. Tanto la pirámide (modelo concreto) como el diseño en perspectiva no son sino representaciones semióticas del objeto matemático "pirámide"; tanto el modelo de madera como el de metal deberían ser interpretados como la referencia concreta a la cual el dibujo que aparece en el texto escrito de la tarea inicial hace alusión. Si así no es, significa, según nuestra opinión, que en la cadena significativa o representativa algo falló.

Aprender a comparar las diferentes representaciones de una relación binaria

Preliminares a la investigación

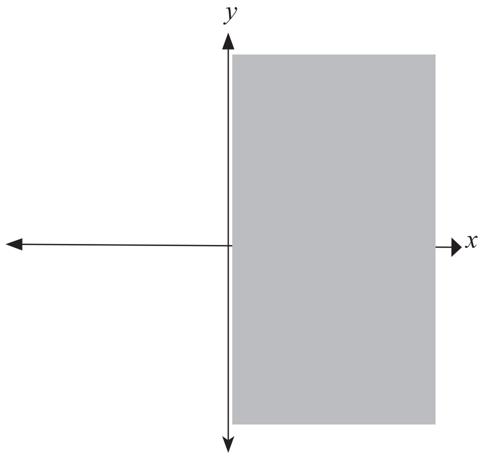
En D'Amore (1998) se afronta el tema del aprendizaje de diferentes representaciones de una misma relación binaria, para discutir cómo el sujeto establece relaciones entre diversas representaciones.

Pero esta investigación necesita de consideraciones preliminares.

En su trabajo clásico, Raymond Duval (1993) deja claro que, a menudo en matemática, se usan distintos significantes para referirse a un mismo significado.

Ejemplo 1.[2] Los tres significantes diferentes: 0,5; 1/2; 5×10^{-1} representan el mismo objeto. Son, pues, significantes distintos de un mismo significado, asumido como objeto y, por tanto, denominado *significado-objeto*.

Ejemplo 2. La desigualdad $x > 0$ en R×R y la figura:



son dos significantes distintos del mismo significado-objeto [el objeto en cuestión es el semiplano (abierto)[3] de las abscisas (x) positivas]. Por tanto, en el trabajo citado, el autor estudia el caso de distintos significantes S1, S2, ..., Sn de un mismo significado S, en el caso en el cual S es un determinado objeto matemático.

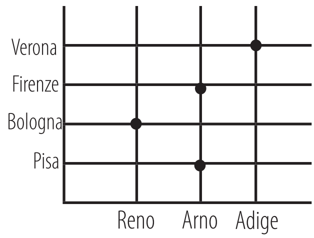
Siguiendo las ideas de Duval, se puede plantear el caso en el cual el objeto a estudiar sea una relación binaria entre conjuntos; esta relación se puede describir recurriendo a distintos registros de representación dando lugar a un caso análogo al precedente. Se trata, pues, de distintos significantes de un mismo significado, pero en el caso específico en el cual este último es la expresión de una relación binaria que se llamará, en lo que sigue, *objeto relacional*.

---

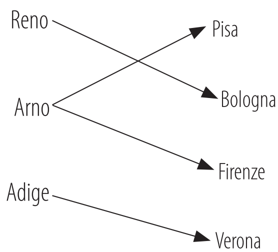
[2] Los dos ejemplos siguientes han sido extraídos de (Duval, 1993).

[3] En tal sentido, la figura es ambigua y por esto es necesario especificar.

Ejemplo 1.



1



2

	Reno	Arno	Adige
Verona			X
Firenze		X	
Bologna	X		
Pisa		X	

3

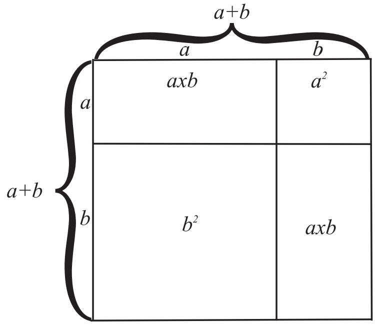
El Reno es el río de Bologna,
el Arno es el río de Firenze y de Pisa,
el Adige es el río de Verona.

El mismo objeto relacional se expresa mediante cuatro registros de representación distintos que usualmente se denominan: 1. Cartesiano, 2. de Euler-Venn, 3. de Carroll, 4. Proposicional.

Como se ve, no nos interesa que el *objeto en discusión* sea matemático [aquí el objeto en discusión podría remitir a la geografía: "ríos que pasan por ciudades"]; lo que es importante para nosotros es la relación entre entes: es el concepto mismo de relación el que tiene naturaleza matemática.

Ejemplo 2. Consideremos dos representaciones:

- la escritura algebraica: $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$
- el área de la siguiente figura:



pensada como la descripción gráfica de una relación entre el cuadrado cuyo lado mide *a+b* y las siguientes subdivisiones de su superficie: el cuadrado cuyo lado mide *a*, el cuadrado cuyo lado mide *b* y los dos rectángulos cuyos lados miden *a* y *b*.

Es evidente que se trata de dos registros de representación distintos, uno extraído del lenguaje algebraico, el otro del lenguaje figural (geométrico-sintético) de un mismo objeto relacional, esto es, de la relación existente entre el área del cuadrado de lado *a+b* y la de los cuadrados de lados *a* y *b*, además de la del rectángulo de lados *a* y *b*.[4]

Ejemplo 3. Consideremos la relación entre números reales que asocia a cada número su doble; el objeto relacional (significado) es dicha relación en R^2. Puede ser representada acudiendo a distintos registros de representación, por ejemplo, a los siguientes:

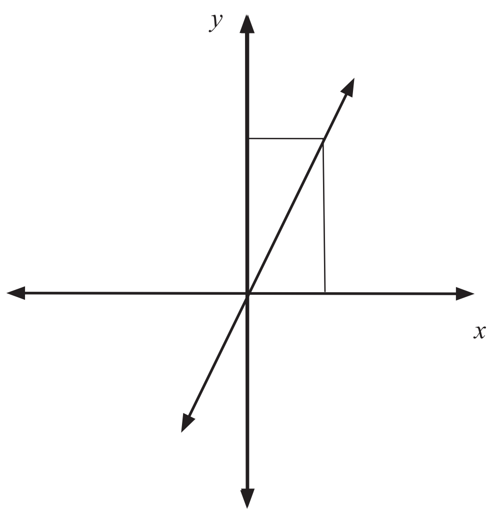
registro: lenguaje algebraico: y = 2x con x• R, y y• R pensado no como objeto-recta, sino como relación entre números reales

[4] Véase (Bagni, 1996) para ejemplos de este tipo.

x	2x
. . .	. . .
-2	-4
-1	-2
0	0
1/2	1
1	2
2	4
. . .	. . .

pensada a propósito como una tabla que evidencia la relación entre números; obviamente la representación es parcial y sirve sólo como indicación;

registro: cartesiano



pensado como una gráfica que ilustra la relación entre números, tales que uno es el doble del otro;
registro: proposicional: La relación en R entre *x* e *y* es tal que *y* es el doble de *x* (expresión proposicional).

Ejemplos de este tipo hay muchos (disponemos de una colección bastante consistente, resultado de la práctica escolar, en todos los niveles escolares, *y de los libros de texto).*

El problema de investigación

Es posible plantear varias preguntas sobre este tema.

¿Es posible considerar como *equisignificantes* los distintos significantes de un mismo significado, caso en el cual tal significado sea un objeto relacional? Es decir: ¿Es *neutra* la elección de registro representativo?

¿Cada uno de los significantes proporciona la misma cantidad y tipología de información?

¿Es "fácil" el paso de un registro a otro? Si llamamos a este paso "traducción" entre expresiones A y B, ¿es posible pensar que A y B son consideradas semánticamente equivalentes?

Las preguntas anteriores se pueden plantear en todos los niveles escolares, pero lo que nos interesa aquí es plantear la cuestión en términos de epistemología del aprendizaje y, precisamente, en el ámbito de la comunicación didáctica: ¿son equivalentes los instrumentos lingüísticos y representativos utilizados en la comunicación en el aula?

Transformamos pues las más que lícitas (y, a nuestro parecer, necesarias) preguntas precedentes en peculiares problemáticas de carácter didáctico.

¿Cuál registro representativo ve el alumno de forma inmediata? Por ejemplo, considerando solo dos categorías, la algebraica y la figural,[5] ¿cuál es privilegiada de *forma espontánea*? ¿La respuesta a esta pregunta depende del nivel escolar y, por tanto, de la edad?

¿Hasta qué punto el estudiante está dispuesto a admitir que se trata de registros representativos distintos (y por tanto de significantes distintos) de *un mismo* significado-objeto relacional? ¿"Ve" el estudiante tal *objeto* relacional como objeto o lo considera solo como relación entre conjuntos? ¿Logra *traducir* de un

[5] Kaldrimidou (1987) y Bagni (1996), sobre el tema de la visualización, muestran que el asunto es más bien complejo.

registro a otro? ¿Con qué facilidad? ¿En qué sentido es más fácil tal traducción? ¿Por qué? ¿Cuáles son las causas de eventuales dificultades?

En todo esto, ¿desempeñan algún papel las cláusulas del contrato didáctico? ¿Cuál? Por ejemplo, ¿es lícito decir algo en matemática "solo con palabras"?; es decir, ¿usar como registro representativo el proposicional?

¿Qué obstáculos intervienen sobre la capacidad de reconocer que varios significantes relacionales corresponden, sin embargo, al mismo significado-objeto relacional? Por ejemplo, ¿obstáculos externos (de naturaleza extra-relacional) u obstáculos internos (ligados, pues, a casos aislados)? Y ¿cómo se manifiestan? ¿Cómo se dan cuenta de esto los estudiantes?

¿No podría ser que la relación se viese más como instrumento que como objeto?[6]

Las preguntas podrían continuar; es obvio que el objeto de estudio diseñado precedentemente es muy amplio y complejo; supone la intervención de distintas competencias y exige, por tanto, muchas pruebas empíricas y análisis, no banales, de los resultados.

En este trabajo, nos limitamos a un simple ejemplo que describiremos en detalle.

Limitación del campo de investigación

Al elegir el *ejemplo* para realizar la investigación, nos vimos obligados a limitar el campo.

Preferimos evitar la presencia de variables relacionales, es decir símbolos como R en escrituras del tipo *xRy*. Somos conscientes que la presencia de este tipo de escritura modificaría completamente el sentido y los resultados de la experiencia.

Evitamos la presencia de variables individuales, es decir símbolos como x o y en la escritura precedente, fijando simplemente dos conjuntos de objetos a los cuales referirse explícitamente.

Estas decisiones redujeron el peso de la investigación, en la primera fase. En otras palabras, nos limitamos a un ejemplo particular que expresa una cierta relación muy concreta entre dos conjuntos dados; nada impide, a otros investigadores o a nosotros mismos, realizar otras pruebas en casos cada vez más generales. Consideramos que debíamos iniciar con el caso más elemental, de forma tal que nuestros estudiantes lo pudiesen entender.

[6] Una clara referencia a Douady (1984/86).

Consideramos un mismo significado que fuese un ejemplo clásico de objeto relacional para la escuela obligatoria, pero expresado en cuatro diferentes registros de representación [r.r.] (es decir, a través de cuatro significantes distintos):

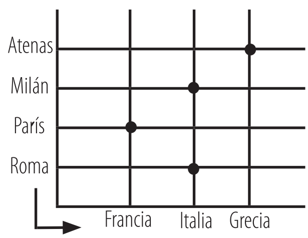
r.r.: de Carroll (a continuación lo llamaremos: 1)
r.r.: cartesiano (2)
r.r.: de Euler-Venn o de flechas o sagital (3)
r.r.: proposicional (4).

Está en

(1)

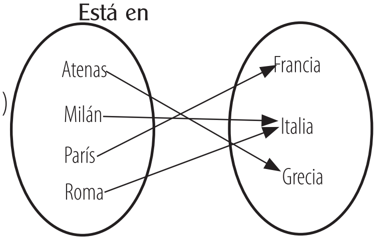
	Grecia	Italia	Francia
Atenas	X		
Milán		X	
París			X
Roma		X	

(2)



Está en

(3)



(4) | Atenas está en Grecia, Milán y Roma están en Italia y París está en Francia

Se tuvo presente que en los libros de texto usados en las clases de primaria (de 1° a 5°, 6-10 años) en las cuales se realizó la experiencia (en Italia), se citaban expresamente y se explicaban los r. r. 1, 2 y 3. En los libros de secundaria de primer grado (de 6° a 8°, 11-13 años) y de los primeros años de secundaria de segundo grado (9° y 10°, 14 – 16 años) se usaban solamente sin una explícita explicación los mismos r.r.; pero tales r.r. no se encontraban repartidos por igual en todo el texto: el r.r. 3 aparecía en diversos ejercicios, mientras los r.r. 1 y 2 aparecían en la parte teórica, no muy usada por los docentes. En los libros de texto de secundaria aparecía solo un ejemplo de r.r. 2, algunos del 3 y no se encontraron r. r. del tipo 1: pero todo esto en la parte teórica y nunca en la parte de ejercicios, la cual siempre es más extensa que la parte teórica (excepto en un ejercicio de lógica en el cual aparecía el r.r. 2; incluso en este caso, la parte de teoría fue descuidada por parte de los docentes, por admisión de ellos mismos.

Respuestas preliminares y metodología

Con el objetivo de iniciar a dar respuestas preliminares a algunas de las preguntas planteadas anteriormente, se propuso a 152 estudiantes de 4° de primaria (9-10 años), 161 de 2° de educación media (7°, 12-13 años) y 98 de educación media superior (9°-11°, 14-16 años) (en total 411 estudiantes), el análisis de los cuatro significantes (cada uno en un folio de formato A5), planteándoles una serie de preguntas (que explicitaremos a continuación).

Primera pregunta (un tanto vaga, formulada solo para verificar si el estudiante se da cuenta, sin sugerencias y por tanto espontáneamente, que se trata de un mismo significado-objeto relacional): "Observa estas cuatro hojas. ¿Qué piensas?". Si el estudiante dice, de forma aceptable y, sobre todo, consciente, que se trata de cuatro significantes distintos de un mismo significado, bien; en caso contrario, se le encaminó en esta dirección con la segunda pregunta: "¿Hay dos que dicen lo mismo?", con la idea de que primero vea dos y luego tres o todos.

Así las cosas, se le plantea la tercera pregunta: "¿Cuál consideras sea el mensaje más claro, significativo, legible, comprensible?".

Solo a los estudiantes de la escuela secundaria,[7] una vez establecido que se trata de cuatro mensajes equisignificantes, se les proponía la cuarta pregunta:

[7] Es decir de la escuela media (11-13 años) o de la escuela secundaria (14-16 años).

"Si tú fueras un maestro de tercero de primaria y quisieras que tus estudiantes entendieran, ¿cuál de las cuatro hojas elegirías?".

La idea clave es que el estudiante no siempre identifica el mensaje más claro para él, con el que piensa que sería el más claro para un niño pequeño (véanse las conclusiones de D'Amore y Sandri, 1996, al respecto). El estudiante revela, de esta forma, la que considera sería la elección más plausible para el estudiante más pequeño o la suya de ese entonces o, de forma oculta, la que él prefiere actualmente, elección que no siempre puede dejar ver directamente a causa de ciertas cláusulas del contrato didáctico que le impiden revelar sus preferencias reales.[8]

Todo este análisis se realizó mediante entrevistas directas (que se registraron y se transcribieron, escuchando y discutiendo en más de una ocasión cada una de las intervenciones). Se pensaba que no se podrían haber recogido opiniones relevantes a través de un simple test escrito, en cuanto que el entrevistador debe, en cierto modo, advertir (más allá de lo que se dice de forma explícita) lo que el estudiante intenta decir.

La prueba se realizó con ocho clases de 4° de primaria (9 años), a diez de 2° de educación media (12 años) y a seis de la media superior (14-6 años).

A continuación, analizamos los resultados de cada uno de los niveles escolares. Después presentaremos el análisis y los comentarios generales.

[8] Para un análisis de las cláusulas de este tipo, véase D'Amore y Sandri, 1996, donde se trata la cuestión de esta investigación detalladamente; y D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani y Sarrazy, 2010, donde la idea de contrato didáctico es analizada desde un punto de vista mucho más moderno.

	% Reconoce 4 significantes distintos espontánea-mente (con titubeos)	**Dos mensajes que digan la misma cosa (significantes reconocidos como iguales)**	**Registro más fácil de entender por uno mismo (%)**				**Registro más accesible para los niños de 3º de primaria (%)**			
4º Primaria N=152	59 (68)	1 y 2 (*)	1 (45)	2 (2)	3 (13)	4 (40)				
2º Media N=161	60 (69)	1 y 2	1 (20)	2 (0)	3 (12	4 (68)	1 (17)	2 (0)	3 (42)	4 (41)
Secundaria Superior (16-17 años) N=98	74	1 y2 (luego el 1,2 y3)	1 27	2 0	3 29	4 44	1 44	2 0	3 32	4 24

(*) Comentario muy general: "El 4 no tiene nada que ver con la matemática". Se vea 2.5.

Como era obvio, la capacidad de reconocimiento espontáneo de la equivalencia de significado entre 1, 2, 3 y 4 crece con el nivel escolástico pasando, con cierta constancia, de 59% de 4° primaria a 74% de la superior.

Por otra parte, no parece que exista una tendencia o una relación significativa entre la elección del registro más fácil y el nivel escolástico. Las únicas constantes son: los altos valores de elección del registro 4, la "fuerza semiótica" del 1, el gran "vaivén" del 3. La verdadera constante es, sin embargo, el rechazo del 2 (elegido, solamente y paradójicamente, por algún niño de 4° primaria, porque se trata de un ejemplo gráfico examinado hace poco en una clase de aquellas en las que se realizó la prueba). No obstante el registro 2 tenga una gran difusión entre los docentes, la poca fortuna de que ha gozado el diagrama debe hacer reflexionar si se debe usar tanto, sin verificaciones preventivas de una segura comprensión y, eventualmente, de una *didáctica explícita* sobre su uso.

Aquí omitimos la descripción de puntos específicos relacionados con los diferentes niveles escolares, remitiendo a los interesados al texto integral de la investigación (D'Amore, 1998).

Elección de los estudiantes y facilidad de comprensión

Ahora presentamos algunas consideraciones sobre la elección de los estudiantes en relación con el orden de facilidad de comprensión de los diversos registros.

Punto 1. El registro 3 no concita muchas simpatías. ¿Por qué? En un pasado reciente, muchos autores consideraban que era este el registro que proporciona mayor seguridad didáctica, el máximo posible en el campo de la intuición y de la legibilidad. Sobre esto, opinamos que es necesario investigar todavía. A la espera de nuevos resultados, es bueno que el docente sepa cómo están las cosas.

Punto 2. Cada estudiante debe hacer un esfuerzo mayor o menor para interpretar algunos gráficos y un menor esfuerzo para aceptar otros; no todas las posibilidades de elección son idénticas para cada estudiante. Opinamos que es bueno ser conscientes de esto. Parece una buena estrategia introducir, en condiciones de igualdad, todos los registros, invitando a los estudiantes a practicar la *traducción* de un registro al otro.

Punto 3. Es necesario no dar por descontada la idea de significantes diferentes de un mismo significado-objeto relacional. Los esquemas deben ser también objeto de estudio y no mero soporte adquirido, no se sabe cómo, *a priori*. Usar tales esquemas debe ser, por tanto, objeto de un objetivo didáctico específico y explícito.

Punto 4. Aparecen *informaciones parásitas* que la elección de un esquema, en lugar de otro, arrastra y, con frecuencia, el docente no es consciente de esto. Por ejemplo el orden en que aparecen las ciudades, en 1, no se considera casual y por tanto los estudiantes se empeñan en descifrar un mensaje que, sin embargo, no existe como tal en la mente del docente-diseñador de la prueba (alejando al estudiante del mensaje real). Por esto, es importante conocer estos aspectos ligados a la tipología de la representación elegida. En nuestro caso no se ha revelado, pero no se excluye que el orden de las ciudades podría causar, también en 2, *parásitos* análogos.

¿Cómo y con qué criterios los estudiantes más maduros eligen para los más jóvenes?

Consideraremos ahora los resultados de la elección, por parte de los estudiantes de la escuela media y de la escuela superior, del significante más fácil, no para ellos mismos, sino para hipotéticos niños más pequeños.[9]

No se observan analogías explícitas generales de comportamiento en el paso de la facilidad para uno mismo a la hipotética para niños más pequeños. Se pueden recoger solo algunas específicas.

Por ejemplo, la elección de 4 como registro representativo más fácil, para uno mismo, es la más alta, como habíamos ya notado, sea en la escuela media (68%), sea en la superior (41%). En ambos casos, tales porcentajes bajan notablemente, cuando se trata de elegir la facilidad para los niños (se transforman, respectivamente, en 41% y 24%). Hay dos motivos que justificarían todo esto y que, por orden de importancia creciente, serían:

- primero: para los niños pequeños leer un texto y comprenderlo es difícil, mientras que es más fácil para ellos interpretar una figura, un esquema, un dibujo;
- segundo: la 4 parece ser un registro especial, no oportuno, poco matemático, no usual... Justamente por el motivo opuesto, sin embargo, el registro 3 ve aumentar en ambos casos sus porcentajes de elección, en el paso de la facilidad para uno mismo a la de los niños: en la escuela

[9] No tenemos en cuenta los resultados obtenidos con los estudiantes de 16-17 años, por el bajo número de estudiantes entrevistados. Sin embargo, es interesante evidenciar cómo, en esas dos clases, no hay prácticamente diferencias entre la elección de la facilidad para uno mismo y la facilidad para los niños; quizás se deba a la gran diferencia de edad y, por tanto, a que los estudiantes más maduros podrían haber olvidado los problemas, las dificultades y las exigencias de los niños pequeños.

media pasa de 12 a 42%; en la superior de 29 a 32%. El aumento no es uniforme, pero esto podría depender del hecho que solo los niños de la media recuerdan todavía, bastante bien, qué actividades sobre significantes expresados en registros figúrales, como el 3, son muy frecuentes en la escuela primaria.

Hay, además, discrepancias, por ejemplo sobre el registro representativo 1; en la escuela media hay una pequeña disminución en el porcentaje al pasar de la facilidad para uno mismo a la de los estudiantes de la primaria (de 20 a 17%); mientras en la superior se da, incluso, un aumento (de 27 a 44%).

Todo esto podría significar que no hay una verdadera y propia relación definitiva, estable y general entre lo que se cree fácil para uno mismo y lo que se cree fácil para niños pequeños, lo que nos induce a pensar que se necesitarán pruebas posteriores para estudiar esta interesante relación.

Por otra parte, todo este análisis nos lleva a pensar que hay variables de comportamiento escondidas, cuando se pide elegir para otros en general y para los más pequeños en particular; a algunas de estas, de carácter comportamental y lingüístico, nos hemos referido ya en D'Amore y Sandri (1996).

Respuestas a algunas preguntas: un punto de vista semiótico

Los hechos absolutamente evidentes y que responden a algunas de las preguntas planteadas son:

- el registro representativo proposicional se considera *distinto* de los demás, no oportuno, no apto en matemática, y esto por varios motivos: porque no da lugar a hacer algo; porque no contiene números o figuras, elementos típicos de la matemática;
- algunos registros arrastran elementos de confusión (sea en su parte gráfica, sea en la escrita, que parece deba ser interpretada en cualquier caso), informaciones *parásitas* que no se pueden eliminar (si no es haciéndolas explícitas), por ejemplo, ligadas a un orden de escritura que para el adulto es casual, pero que no lo es para el niño;
- por tanto, los registros no son neutros o de igual valor informativo y semántico; no solo representan el objeto relacional deseado sino otra cosa; la traducción, pues, no es posible o, en cualquier caso, no es ni banal ni inmediata;

- la relación entre registros representativos distintos, es decir, entre significantes distintos de un mismo significado-objeto relacional se ve de forma espontánea solo por 59% de los estudiantes de escuela primaria, por 60% de los de media, por 74% de los de superior; los otros 41%, 40% y 26% (respectivamente), pues, no perciben esto; ya que se trata de una praxis habitual, en didáctica, pasar de un significante a otro en el mismo o en otro registro dando todo esto por descontado, es necesario tener en cuenta estos resultados en el plano didáctico, según los distintos niveles escolásticos.

Aparece evidente que no hay mucha diferencia entre trasformaciones de tratamiento o de conversión, lo cual, a distancia de años, nos llevó a estudiar el fenómeno de cambios de sentido que los estudiantes dan a representaciones del mismo objeto que son obtenidas la una de la otra por tratamiento.[10]

CONCLUSIONES

Nosotros usamos continuamente, en la práctica de enseñanza, varios sistemas semióticos que confundimos entre sí y no explicitamos; hoy sabemos que es parte de los aprendizajes deseados que nuestros estudiantes dominen estos sistemas; eso sí, sin caer en el error de modificar el objeto mismo de aprendizaje, el de la matemática (que se sirve de dichas representaciones) por las representaciones en sí mismas. Este fue un grave error de la llamada "matemática moderna", que sustituyó el contenido "matemática" por el contenido "lenguaje de la matemática, sus simbolizaciones, estudio de los símbolos, sus descripciones y su uso". Este es uno de los posibles errores graves de la enseñanza, cuando no hay una consciencia crítica, lo que hace inevitable la primera parte de la paradoja de Duval, llevando al estudiante a confundir el objeto matemático con sus representaciones, haciendo de estas últimas el objetivo del aprendizaje.

Espontáneamente, el estudiante tiende a esto, pero aún más grave será si somos nosotros mismos quienes lo impulsamos. Es algo similar al absurdo de querer reducir a un algoritmo la actividad de resolución de problemas, con la vaga esperanza que esto sea posible o de que con esto se pueda ayudar en el proceso de resolución del mismo (Brousseau y D'Amore, 2008). Si un problema es un problema y no un ejercicio (Fandiño Pinilla, 2010), durante la investiga-

[10] Véase: D'Amore (2006), D'Amore y Fandiño Pinilla (2007 a, b), Radford y D'Amore (2006).

ción estratégica que lleva de la formulación del texto problemático a la respuesta, existe por lo menos un momento de creación (que algunos felizmente llaman "Eureka") indefinible, ingobernable, no reducible a un algoritmo.

Las sugerencias ingenuas del docente van desde las banales e inútiles prácticas normativas (lee con cuidado, debes estar atento, reflexiona) hasta trucos del todo contraproducentes (subraya con rojo los datos numéricos, subraya con verde las palabras claves del texto, subraya con amarillo la pregunta...) que cambian la atención del problema por una serie de convenciones semióticas absurdas que la investigación didáctica denunció.

Agradecimientos

Agradecemos a los tres árbitros anónimos quienes hicieron no solo observaciones correctas, sino de gran interés a una versión precedente de este trabajo; observaciones precisas y que nos ayudaron a dar una mayor legibilidad al texto, así como una versión más concreta. Apreciamos la gran ayuda que nos dieron.

Datos de los autores

Bruno D'Amore
Mescud, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia.
bruno.damore@unibo.it
Martha Isabel Fandiño Pinilla
NRD, Departamento de Matemática, Universidad de Bologna, Italia.
bruno.damore@unibo.it

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bagni, G. (2007). *Visualizzazione e didattica della matematica nella scuola secondaria superiore. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 20B, 4, 309-335.

Brousseau, G. (2008). *Ingegneria didattica ed epistemologia della matematica.* Prefacio de Bruno D'Amore. Bologna. Pitagora.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. En *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 7, 2, 33-115.

Brousseau, G. y D'Amore, B. (2008). I tentativi di trasformare analisi di carattere meta in attività didattica. Dall'empirico al didattico. En: D'Amore, B. y Sbaragli,

F. (eds.) (2008). *Didattica della matematica e azioni d'aula.* Actas del XXII Congreso Nacional: Incontri con la matematica. Castel San Pietro Terme, 7-8-9 noviembre 2008. Bologna. Pitagora. 3-14.

Cassani, A., Deleonardi, C., D'Amore, B. y Girotti, G. (1996). Problemi di routine e situazioni "insolite". Il "caso" del volume della piramide. En *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 19B, 3, 249-260. [En idioma inglés: Gagatsis, A. y Rogers, L. (Editores) (1996). Didactics and History of Mathematics. En *Erasmus* ICP 95 G 2011/11. Thessaloniki. 73-82. En idioma español: Números. 38, 1999, 21-31].

D'Amore, B. (1993). Esporre la matematica appresa: un problema didattico e linguistico. En *La matematica e la sua didattica*. 3, 289-301. [En versión ampliada en idioma alemán, 1996: Schülerprache beim Lösen matematischer Probleme, En *Journal für Mathematik Didaktik*. 17, 2, 81-97; y en: Gagatsis, A. y Maier, H. (Editores) (1996). Texte zur Didaktik der Mathematik. Thessaloniki-Regensburg. Erasmus. 105-125].

D'Amore, B. (1996/2011). *Problemas. Pedagogía y Psicología de la Matemática en la actividad de resolución de problemas.* Madrid: Editorial Sintesis. [Hay también estudios más recientes: D'Amore, B. y Marazzani, I. (2011). Problemi e laboratori. Metodologie per l'apprendimento della matematica. Progetto. Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere. Vol. 4. Bologna. Pitagora].

D'Amore, B. (1998). Objetos relacionales y registros representativos distintos: dificultades cognitivas y obstáculos. En *Uno*. 15, 63-76. [En idioma italiano y en idioma inglés, 1998. *L'educazione matematica*. 1, 7-28].

D'Amore, B. (Editor) (1999). Continuità e scuola. Progetto per un percorso formativo unitario dalla scuola dell'infanzia alla secondaria superiore. Vol. 3: *La Matematica*. Quaderni di Documentazione dell'Istituto Pedagogico di Bolzano, n. 6. Milán-Bolzano: Junior.

D'Amore, B. (2006a). *Didáctica de la Matemática*. Prefacios de Colette Laborde, Guy Brousseau y Luis Rico. Bogotá. Editorial Magisterio. [En idioma italiano, 1996, Bologna. Pitagora; en idioma portugués, 2007, São Paulo. Livraria da Física, con ulterior prefacio de Ubiratan D'Ambrosio].

D'Amore, B. (2006b). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. En, Radford, L. y D'Amore, B. (Editores) (2006). *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking.* Número especial de la revista *Relime* (Cinvestav, México D. F., México). 177-196.

D'Amore, B. y Fandiño Pinilla, M. I. (2007a). Change of the meaning of mathematical objects due to the passage between their different representations. How other disciplines can be useful to the analysis of this phenomenon. Roma, *Symposium on the occasion of the 100th anniversary of ICMI*, marzo 2008. WG5: The evolution of theoretical framework in mathematics education, organizadores: Gilah Leder y Luis Radford. www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008.

D'Amore, B. y Fandiño Pinilla, M. I. (2007b). How the sense of mathematical objects changes when their semiotic representations undergo treatment and conversion. En *La matematica e la sua didattica* (Bologna, Italia). Vol. 21, n. 1, pagg. 87-92. Proceedings of: Joint Meeting of UMI-SIMAI/SMAI-SMF: Mathematics and its Applications. Panel on Didactics of Mathematics. Department of Mathematics, Universidad de Turín. Julio 6, 2006.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I. y Iori, M. (2013). *Primi elementi di semiotica. La sua presenza e la sua importanza nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica.* Bologna. Pitagora.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I. y Sarrazy, B. (2010). *Didattica della matematica. Alcuni effetti del "contratto".* Prefacio y postfacio de Guy Brousseau. Bologna. Archetipolibri.

D'Amore, B. y Sandri, P. (1996). Fa finta di essere... Indagine sull'uso della lingua comune in contesto matematico nella scuola media. En *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 19A, 3, 223-246. En español: Revista *EMA*, Investigación e innovación en educación matemática (Bogotá, Colombia). 4, 3, 1999, 207-231.

Douady, R. (1984-86). Jeux de cadres e dialectique outil-objet. Thèse d'Etat, París VII, 1984; publicada (1986) en *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 7, 2, 5-31.

Duval, R. (1993). Registres des Répresentations sémiotiques et Fonctionement cognitif de la Pensée. En *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. 5, 37-65.

Fandiño Pinilla, M. I. (2010). *Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática.* Prefacio de Giorgio Bolondi. Bogotá. Magisterio.

Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. En *Educational Studies in Mathematics*. 24, 2, 139-162.

Fischer, N. (1978). Visual influence of figure orientation on concept formation in geometry. En, Lesh, R. y Hierkiewicz, D. (Editores) (1978). *Recent Research Concerning the Development of Spatial and Geometrical Concepts*. Columbus (Ohio): Eric.

Kaldrimirou, M. (1987). Images mentales et réprésentations en mathématiques chez des mathématiciens et des étudiants en mathématiques. Thèse 3ème cycle, Universidad París VII.

Mariotti, M. A. (1989). Mental images: some problems related to the development of solids. En *Actes de la XIII Conference Int.* PME. París.

Mariotti, M. A. (1991). Age variant and invariant elements in the solution of unfolding problems. En, *Proceedings of the 15th PME Conference*. Asís.

Mariotti, M. A. (1992a). Geometrical reasoning as a dialectic between the figural and the conceptual aspects. Proceedings of the Int. Symposium. Spatial Representation and Spatial Skills. En, *Structural Topology*. 19-18.

Mariotti, M. A. (1992b). Immagini e concetti in geometria. En *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 15(9), 863-885.

Radford, L. y D'Amore, B. (Eds.) (2006). *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*. Número especial (en idioma inglés, francés y español) de la revista *Relime* (Cinvestav, México D. F., México). Índice: introducción de Luis Radford, conclusiones de Bruno D'Amore; artículos de: M. Otte; R. Duval; R. Cantoral, R-M. Farfán, J. Lezama, G. Martínez Sierra; L. Radford; Juan D. Godino, V. Font, M. R. Wilhelmi; A. Koukkoufis, J. Williams; B. D'Amore; A. Gagatsis, I. Elia, N. Mousoulides; A. Sáenz-Ludlow; GT. Bagni; F. Arzarello. http://laurentian.ca/educ/lradford/Relime_semiotic_06.pdf

Sbaragli, S. y Santi, G. (2012). Teacher's choices as the cause of misconceptions in the learning of the concept of angle. En *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*. Revista online: http://periodicos.uniban.br/index.php/JIEEM/article/view/194/196. San Paolo, Brasil: Uniban. 4 2, 117-157.

Wertheimer, H. (1959). *Productive thinking*. New York. Harper and Row.