

Aprendizagem compreensiva da medida de área de um retângulo no 3.º ano do ensino primário

Aprendizaje comprensivo de la medida del área de un rectángulo en el 3er. año de la educación primaria

Comprehensive learning of rectangle area in the 3rd year of primary education

Hugo Alexandre Lopes Menino,¹ Soraia Antunes Filipa Farinha²

Resumo: O conceito de medida de área é complexo para os alunos, em grande parte pela introdução precoce de fórmulas de cálculo, que não são compreendidas. Neste estudo apresenta-se a análise da implementação de uma tarefa matemática, num terceiro ano de escolaridade (8-9 anos de idade) construída com o intuito de proporcionar a aprendizagem significativa e compreensiva da fórmula de cálculo de área do retângulo. A tarefa foi implementada na sala de aula através de uma abordagem de ensino exploratório. Pretende-se analisar as estratégias utilizadas e as aprendizagens emergentes dos alunos. Os resultados evidenciam que, na realização da tarefa, os alunos descobriram indutivamente a fórmula, dando-lhe sentido. Em termos de aprendizagem foram determinantes as características da tarefa e o seu modo de concretização em aula. Destacam-se a importância do trabalho autónomo e colaborativo, que proporcionou uma discussão de ideias matemáticas e o confronto de estratégias pelos alunos; e as oportunidades pedagógicas da fase de discussão coletiva e

Fecha de recepción: 1 de mayo de 2024. **Fecha de aceptación:** 6 de febrero de 2025.

¹ Escola Superior de Educação e Ciências Sociais de Leiria, Ci&DEI, Instituto Politécnico de Leiria, Portugal, hugo.menino@ipleiria.pt, <https://orcid.org/0000-0002-0072-4274>.

² Escola Superior de Educação e Ciências Sociais de Leiria, Ci&DEI, Instituto Politécnico de Leiria, Portugal, soraia.farinha@ipleiria.pt, <https://orcid.org/0009-0005-7124-1842>.

síntese, que permitiu a institucionalização de ideias e procedimentos de forma compreensiva. Transversalmente, foi evidente o papel mediador da professora que, através de ações intencionais, auxiliou os alunos a progredirem e refinarem o seu raciocínio.

Palavras-chave: *aprendizagem compreensiva; medida de área; tarefa; ensino exploratório.*

Resumen: El concepto de medida de área es complejo para los alumnos, en gran parte debido a la introducción temprana de fórmulas de cálculo que no se comprenden. Este estudio presenta un análisis de la implementación de una tarea matemática en un tercer año de escolaridad (8-9 años de edad), diseñada con el objetivo de proporcionar un aprendizaje significativo y comprensivo de la fórmula para calcular el área del rectángulo. La tarea se implementó en el aula mediante un enfoque de enseñanza exploratoria. Se pretende analizar las estrategias utilizadas y los aprendizajes emergentes de los alumnos. Los resultados evidencian que, al realizar la tarea, los alumnos descubrieron inductivamente la fórmula, dándole sentido. En términos de aprendizaje, fueron determinantes las características de la tarea y su implementación en el aula. Se destaca la importancia del trabajo autónomo y colaborativo, que permitió la discusión de ideas matemáticas y el contraste de estrategias entre los alumnos; y las oportunidades pedagógicas de la fase de discusión colectiva y síntesis, que facilitaron la institucionalización de ideas y procedimientos de manera comprensiva. De forma transversal, fue evidente el papel mediador de la profesora, quien, a través de acciones intencionadas, ayudó a los alumnos a progresar y refinar su razonamiento.

Palabras clave: *aprendizaje comprensivo; medida de área; tarea; enseñanza exploratoria.*

Abstract: The concept of area measurement is challenging for students, often due to the early introduction of formulas without proper understanding. This study analyses the implementation of a mathematical task in a third-grade class (ages 8-9) designed to promote meaningful and comprehensive learning of the formula used to calculate the area of a rectangle. The task was implemented in the classroom using an inquiry-based learning approach. The aim is to analyze the strategies used and the emerging learning outcomes of the students. The results show that, through this task, students inductively

discovered the formula, giving it meaning. In terms of learning, the characteristics of the task and the way it was implemented in class were decisive. We highlight the importance of autonomous and collaborative work, which allowed students to discuss mathematical ideas and compare strategies; and the pedagogical opportunities of the collective discussion and synthesis phase, which provided a platform for institutionalizing ideas and procedures in a comprehensive manner. Transversely, the mediating role of the teacher was evident, with intentional actions that helped students advance and refine their reasoning.

Key-words: *comprehensive learning; area measurement; task; inquiry-based learning.*

INTRODUÇÃO

O ensino da Matemática deve desenvolver, desde cedo, capacidades matemáticas fundamentais para a vida. Isto passa, não só pela aprendizagem de conceitos, mas principalmente, pela sua compreensão (NCTM, 2008, 2017, 2020), numa assunção de acesso e equidade, para todos os alunos. Já Abrantes *et al.* (1999) defendiam a importância do acesso a uma educação matemática de qualidade, para todos, o que deve corresponder a que os alunos tenham oportunidades de aprender de modo realmente significativo, tornando-se cidadãos competentes, críticos e confiantes, com capacidade de usar a matemática para resolver problemas, para raciocinar e para comunicar. O atual currículo de matemática em Portugal corrobora estes princípios curriculares, preconizando uma abordagem em espiral, em que os alunos têm a oportunidade de amadurecer, consolidar e aprofundar progressivamente as aprendizagens matemáticas, de acordo com a sua maturidade intelectual (Canavarro *et al.*, 2021).

“A matemática está em todo o lado” é uma expressão que é bastante comum no quotidiano dos alunos. No entanto, muitas vezes, estes não compreendem a aplicabilidade daquilo que aprendem na escola. A medida é um tema em que isso não acontece. Os alunos rapidamente compreendem que é necessário medir objetos no dia a dia para os mais variados fins (Cherif *et al.*, 2017; Ahmad, 2021). Por isso, a medida é um dos temas que se destaca do currículo de Matemática ao longo de toda a escolaridade, desde o pré-escolar até ao ensino secundário, devido à aplicação prática e à abundância de situações que envolvem a medida

em vários aspetos da vida quotidiana (NCTM, 2008, 2020; Winarti *et al.*, 2012). Existem diversas grandezas de medida, que são fundamentais para a compreensão e descrição do mundo ao nosso redor. As principais grandezas são o comprimento, a área, o volume, a capacidade, a massa, o tempo e a temperatura.

O processo de medição passa por atribuir um valor numérico a um atributo mensurável de um objeto (NCTM, 2008). Consiste, então, numa comparação de uma certa quantidade de grandeza com outra quantidade da mesma grandeza estabelecida como unidade, ou seja, é a comparação de duas grandezas da mesma espécie (Breda *et al.*, 2011). Em síntese, medir implica a identificação de um atributo mensurável, a seleção da unidade que deve ser utilizada, a comparação do objeto com a unidade e a identificação de um valor que quantifique essa comparação (Rocha *et al.*, 2008).

A aprendizagem da medida deve ser iniciada com experiências concretas, envolvendo o contacto com materiais manipuláveis (Seah, 2015), permitindo que o aluno comece por distinguir atributos mensuráveis e não mensuráveis e depois possa manipular, observar e os comparar atributos mensuráveis de um objeto. Depois de experiências de comparação, os alunos devem realizar tarefas que impliquem a utilização de unidades de medida não padronizadas (Abrantes *et al.*, 1999; NCTM, 2008; Rocha *et al.*, 2008). A utilização de unidades de medida não padronizadas é uma etapa fundamental na aprendizagem do processo de medição (Cavanagh, 2007). As unidades utilizadas podem e devem ser encontradas pelos próprios alunos, usando objetos.

A etapa seguinte é a introdução dos instrumentos de medida padronizados e, conseqüentemente, das medidas padronizadas (Rocha *et al.*, 2008). Nesta fase, os alunos aprendem ainda que as medidas podem ser calculadas através de fórmulas e que nem sempre necessitam de recorrer à medição direta, com instrumentos de medida (NCTM, 2008). Estas fórmulas que são utilizadas para determinar uma medida devem ser descobertas indutivamente pelos alunos, a partir de experiências de observação e manipulação que os auxiliem a generalizar propriedades e relações (Rocha *et al.*, 2008; Cavanagh, 2007). Isto é particularmente importante porque muitos alunos revelam não compreender o significado das fórmulas, nem a sua origem, apesar de as usarem em procedimentos matemáticos, o que indicia uma fraca apropriação dos conceitos envolvidos (D'Amore y Fandiño, 2007; Caviedes *et al.*, 2020).

Neste trabalho importa definir o conceito de área e de medida de área e discutir detalhadamente aspetos centrais do seu ensino e aprendizagem nos primeiros anos. O conceito de área é central na aprendizagem da matemática,

até porque suporta a aprendizagem subsequente de outros conceitos como área de superfície e volume (Cavanagh, 2007). A área é a extensão de uma superfície que é medida em unidades próprias. O conceito de área não deve ser confundido com o conceito de medida da área, uma vez que estes conceitos não são equivalentes (Breda *et al.*, 2011). A medida da área é o número real que surge através da comparação da área de determinada figura com a unidade de medida que foi escolhida (Cavanagh, 2007; Breda *et al.*, 2011).

O conceito de área é introduzido no 1.º Ciclo do Ensino Básico, sendo aprofundado ao longo da escolaridade. É um conceito complexo que se desenvolve de forma lenta e gradual (NCTM, 2008, 2020; Rocha, *et al.*, 2008). Tal como para outros conceitos no âmbito da medida, para a compreensão da área é necessário proporcionar aos alunos situações de aprendizagem em que estes tenham a oportunidade de manipular materiais diversos, estruturados e não estruturados (Irshad, 2024; King *et al.*, 2022) e resolver situações problemáticas reais, cujos contextos envolvam os alunos na experimentação do processo de medição (Cavanagh, 2007; Urbano-Urbano *et al.*, 2021; Irshad, 2024), por exemplo medir a área da superfície da sua mesa de trabalho, usando como unidade de área uma folha de papel ou medir a área da palma da mão usando como unidade de área um quadrado de papel. A aprendizagem da medição da área deve ser iniciada pela utilização de unidades não padronizadas (quadrados, triângulos de papel ou espuma, folhas de diferentes tamanhos, peças de tangram, etc.), discutindo as mais adequadas em cada situação e o seu grau de precisão.

No 1.º ciclo, as tarefas com unidades não padronizadas, recorrendo a materiais, são fundamentais e devem estar presentes em toda a prática curricular (Rocha *et al.*, 2008; Canavarró *et al.*, 2021). Os alunos devem realizar tarefas onde usam a unidade para cobrir regiões, desenhando quadrados unitários e observando as regularidades que ocorrem (Outhred y Mitchelmore, 2000; Agacdiken y Yilmaz, 2023). Estas experiências reforçam a apropriação do conceito de área e auxiliam os alunos a identificar as relações espaciais envolvidas na sua medição (Kordaki y Portari, 2002). Neste processo de identificação de relações, os alunos recorrem à visualização em detrimento de processos puramente aritméticos de contagem (Marmolejo y Vega, 2012; Marmolejo y González, 2013; King *et al.*, 2022). Em suma, espera-se que os alunos, no cálculo da área de um retângulo, progridam do uso de estratégias de contagem, assentes na reprodução da unidade no interior do polígono para o reconhecimento de regularidades quando essa contagem é feita por linhas e colunas, relacionando o

que observam com as medidas lineares (comprimento e largura) do polígono, verificando, posteriormente, a utilidade do uso de estratégias multiplicativas.

As dificuldades na compreensão do conceito de área resultam, em grande medida, de um ensino precoce das unidades padronizadas para o cálculo de áreas e a introdução precoce de fórmulas de cálculo, que não são compreendidas pelos alunos (NCTM, 2008; Walton y Tandolph, 2017; Abadi y Amir, 2022). Para suportar essa compreensão é necessário que os alunos tenham experiências de pavimentação e contagem de unidades quadradas que os levem a estabelecer relações multiplicativas envolvendo o comprimento e largura de um retângulo (Battista, 2003; Clements *et al.*, 2018). Como refere Cavanagh (2007) experiências em que os alunos têm de decompor retângulos, usando as dimensões da unidade, para formar grelhas, ajuda-os a estabelecer essa relação multiplicativa de modo compreensivo. No estudo realizado por Kurniawati e Amir (2022) foi possível identificar como dificuldades dos alunos a reduzida compreensão das fórmulas para o cálculo de áreas e perímetros, sendo que o recurso a materiais e tarefas diversificadas e poderosas, num contexto de ensino exploratório, facilitaram a compreensão dos conceitos e favoreceram o desenvolvimento de capacidades matemáticas, em particular a resolução de problemas. Outra das dificuldades mais comuns apresentadas pelos alunos é a distinção entre área e perímetro. Muitos alunos pensam que, se duas figuras são equivalentes, são também equiperimétricas e vice-versa (Cayo y Contreras, 2020). Pensam também que quanto maior é a área, maior é o perímetro (Cavanagh, 2007; Clements *et al.*, 2018).

Em síntese, estratégias eficazes para a aprendizagem do conceito de área e de medida de área incluem o uso de materiais manipulativos, representações visuais e cenários contextualizados, que são essenciais para desenvolver uma compreensão dos conceitos. Envolver os alunos em atividades que enfatizam a quantidade física de área e as unidades de medida promove uma compreensão mais profunda (King *et al.*, 2022). Adicionalmente, para uma experiência de aprendizagem significativa é essencial que o professor crie um ambiente de apoio, assente no questionamento sistemático e intencional e implemente o reforço positivo para aumentar a confiança dos alunos. Com a aplicação dessas estratégias, o professor cultiva um ambiente de aprendizagem participativo, eficaz e envolvente, promovendo o raciocínio, a comunicação e a compreensão dos conceitos pelos alunos (Irshad, 2024).

No contexto da prática profissional de uma professora, foi construída uma sequência de tarefas para o ensino e aprendizagem do conceito de área, no 3.º

ano de escolaridade, através do *educational design research*, que é uma abordagem emergente para o estudo da aprendizagem, em contexto, através do estudo sistemático das estratégias e ferramentas de ensino (Bernardo, 2021). Esta metodologia envolve o desenho e desenvolvimento de uma intervenção que se apresenta como uma solução para um problema educativo complexo, em contexto real (Plomp, 2013). A figura 1 ilustra esquematicamente o *educational design research*.

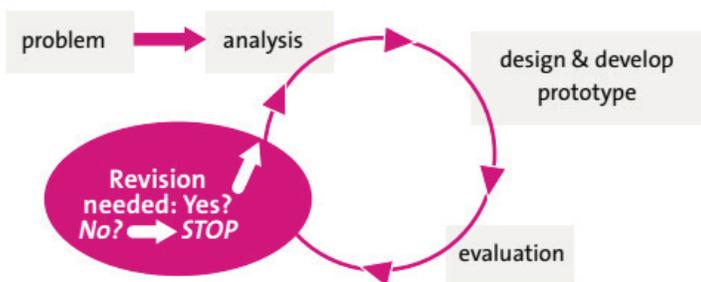


Figura 1. Etapas do *educational design research* (Plomp, 2013).

A primeira fase baseia-se numa análise preliminar do problema em que é feita uma recolha de informação através de pesquisa em bibliografia relevante, seguindo-se a construção e o desenvolvimento de um protótipo e, por fim, a avaliação e reflexão da utilização do protótipo construído e utilizado (Plomp, 2013; Bernardo, 2021).

Neste artigo analisar-se-á uma das tarefas da trajetória de aprendizagem, especificamente focada na aprendizagem significativa e compreensiva da fórmula de cálculo de área de um retângulo. Pretende-se perceber se os alunos conseguem, a partir da tarefa proposta descobrir de forma compreensiva a fórmula de cálculo de área de um retângulo, discutindo as estratégias usadas no ensino e as aprendizagens emergentes dos alunos. Espera-se que os resultados deste estudo sejam úteis para desenvolver o conhecimento científico em educação matemática, acerca da aprendizagem significativa e compreensiva de conceitos de medida, em particular a medida de área de um retângulo.

METODOLOGIA

A investigação é qualitativa e interpretativa, na forma de estudo de caso (Yin, 2018), sendo o caso a implementação de uma tarefa para a descoberta da fórmula de cálculo da área de um retângulo, no 3.º ano de escolaridade. Num contexto do *educational design research* a tarefa foi concebida em função de uma análise dos aspetos curriculares e didáticos para o estudo da medida e em função das características dos alunos e dos modos de trabalho pretendidos para a sala de aula, pretendendo ser um contributo para a docência e aprendizagem deste conteúdo. A tarefa apresentava seis retângulos de dimensões distintas (figura 2). Alguns tinham desenhados todos os quadrados no seu interior e outros apareciam incompletos, sendo solicitado aos alunos que descobrissem a área dos retângulos apresentados. Como material de auxílio, os alunos tinham acesso a folhas quadriculadas e folhas de registo, onde deviam apresentar as suas estratégias. O enunciado da tarefa indicava que a unidade era o quadrado e solicitava aos alunos que calculassem a medida de área de cada retângulo e discutissem em grupo como poderiam proceder para calcular a medida de área de qualquer retângulo.

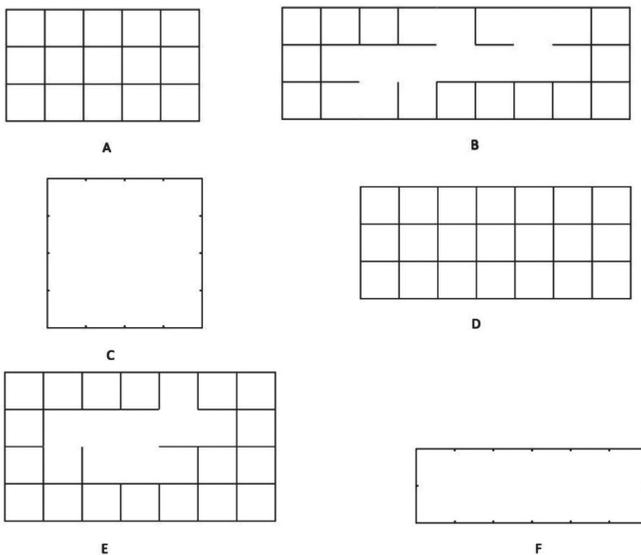


Figura 2. Retângulos utilizados na tarefa (elaboração própria).

A tarefa foi realizada segundo as fases de ensino exploratório (Canavarro *et al.*, 2014; Oliveira *et al.*, 2013), iniciando-se o trabalho com a apresentação da tarefa por parte da professora, segunda autora deste artigo, que assumiu o duplo papel de professora e investigadora. Procurou-se assegurar que todos os alunos esclarecessem as suas dúvidas antes do início da fase seguinte. A segunda fase trata-se do trabalho autónomo e colaborativa dos alunos, na qual resolveram a tarefa propriamente dita, em pequenos grupos de trabalho (dois grupos de dois elementos e um grupo de três elementos). Nesta fase, a professora controlou as suas intervenções de forma a não indicar um caminho imediato que levasse à solução da tarefa. Tentou-se sobretudo questionar os alunos e lançar pistas que os mantivessem envolvidos e focados na tarefa (Serrazina, 2021). Por fim, decorreu a fase de discussão e síntese da tarefa, em que os alunos foram convidados a partilhar o seu raciocínio, sendo sintetizadas, de seguida, as aprendizagens da aula (Guerreiro *et al.*, 2015; Ponte y Quaresma, 2016; Serrazina, 2021).

Os participantes foram os 7 alunos de uma turma do 3.º ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico, e a professora. Relativamente às questões éticas foi garantido o consentimento informado das crianças e dos respetivos encarregados de educação.

Nesta investigação utilizou-se como técnica de recolha de dados a observação direta e participante (Dias, 2009). Como instrumentos de recolha de dados foram usados, nesta investigação, o registo fotográfico e audiovisual, as produções escritas dos alunos na resolução da tarefa e os registos em notas de campo, de modo a obter dados diversificados, o que permitiu a sua triangulação (Bans-Akutey y Tiimub, 2021). Estas técnicas e instrumentos de dados são amplamente utilizados na investigação de natureza qualitativa, uma vez que permitem a obtenção de dados que possibilitam uma análise situada e profunda do objeto de estudo (Dias, 2009; Yin, 2018). O tratamento dos dados recolhidos foi feito através do método de análise de conteúdo (Gläser-Zikuda *et al.*, 2020; Shava *et al.*, 2021).

RESULTADOS E SUA DISCUSSÃO

ESTRATÉGIAS DOS ALUNOS NA FASE DE TRABALHO AUTÓNOMO

Após a receção do enunciado e de uma breve leitura da tarefa, os alunos confrontam-se com o facto de haver retângulos onde não se observa a unidade de área delimitada, sendo opção de dois grupos completar esses mesmos espaços, prolongando as linhas de forma a desenhar os quadrados unitários. Os grupos

Leticia/Ricardo/Margarida e Catarina/Afonso recorrem depois à contagem de todos os quadrados das figuras (Outhred y Mitchelmore, 2000). O grupo Leticia/Ricardo/Margarida considerou importante verificar as áreas dos retângulos, reproduzindo todas as figuras no papel quadriculado e contando todas as quadriculas no seu interior. Apenas o grupo Sofia/Diana decidiu não desenhar, utilizando outras estratégias de contagem, baseadas na visualização e composição e decomposição de figuras (Kordaki y Portari, 2002; Marmolejo y Vega, 2012), como é possível verificar no seguinte diálogo:

- Sofia: Eu acho que este [B] tem 30! Porque é o dobro deste [A].
Prof: Como assim?
Sofia: Eu acho que é igual ao primeiro retângulo mais outro igual.
Prof: Achas que tens dois retângulos iguais ao primeiro juntos para fazer este?
Sofia: Sim.
Prof: E qual era a área desse [A]?
Sofia: Era 15. (...)
Diana: 1, 2, 3, 4,... Não é! Porque aqui tem 5 em baixo, olha: 1, 2, 3, 4, 5. E no outro...
Alunas: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Diana: Não tem 10... Tinha de ter 10, porque 5 mais 5 é 10.
Sofia: Ah pois...
Diana: Porque aqui tem 5, e aqui tem 5 mais 4. Por isso não dá.
Sofia: Então...
A Sofia começa a contar todos os quadrados que cabem dentro do segundo retângulo.
Sofia: 27!
Diana: Podemos fazer de outra forma! Se no primeiro temos 15, contamos só o que sobra. Até aqui (5.^a coluna) temos 15, depois 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27. Dá o mesmo resultado. É só tirar uma coluna, é 5 mais 4. Ou seja, é um destes [A] mais um destes [A] e menos uma coluna.

Através da sua observação, a Sofia acredita que o retângulo B pode ser obtido pela junção de dois retângulos A, sendo, desta forma, a medida de área do retângulo B de 30 quadrados. No entanto, a Diana, através da contagem dos quadrados no comprimento do retângulo, justifica que não é possível, uma vez que tem apenas 9 quadrados, e não 10 (que é o dobro de 5). Concluem assim que a medida de área do retângulo B é de 27 quadrados.

Intuitivamente, no grupo Sofia/Diana, quando as alunas analisam o terceiro retângulo emerge uma estratégia multiplicativa como síntese do reconhecimento de uma regularidade do número de quadrados de cada linha/coluna (Battista,

2003; Clements *et al.*, 2018). A substituição das adições sucessivas pela multiplicação surge no cálculo da medida de área da figura C, no qual surgiu o seguinte diálogo:

- Sofia: (...) Vamos para a C. Também é para contar os quadrados.
Diana: Ih! É mais difícil.
Sofia: 1, 2, 3...
Diana: Espera, podemos ver assim. 1, 2, 3, 4. Por isso é 4, 4, 4, 4. São 4 filas de 4.
Sofia: É $4 \times 4!$
Diana: Sim! São 4 filas de 4! Sim $4 \times 4!$
Diana: São 16. (...)
As alunas confirmam o resultado contando os quadrados que preenchem a figura C.
Diana: Exatamente, é 16. É 4×4 .

Nos restantes grupos, apesar da estratégia ter sido a representação e contagem de quadrados unitários em todos os retângulos, foi importante a intervenção da professora, ao fazer um questionamento intencional (Canavarro, 2011; Oliveira *et al.*, 2013), que levou os alunos a procurar outras estratégias. Em resposta a estas provocações, os alunos conseguem também utilizar, com sentido, o raciocínio multiplicativo, no cálculo da área do retângulo. Vejamos o seguinte exemplo:

- Prof: Então já descobriram as áreas todas. Mas eu agora quero que vocês tentem descobrir uma maneira de saber as áreas dos retângulos sem contar os quadradinhos todos. Será que conseguem?
Ricardo: Sem contar os quadrados?
Prof: Sim. É um desafio para vocês. Sem contarem, será que conseguem chegar aos números que já descobriram?
Margarida: Não.
Prof: Ainda nem pensaram nisso... tentem lá.
Ricardo: Não estou a entender...
Prof: Vocês para descobrirem a área dos retângulos pegaram no primeiro e começaram a contar 1, 2, 3, 4, ...
Margarida: Isso é contar, mas temos aqui o número porque escrevemos.
Prof: Mas estes retângulos são pequenos. Imagina que tinham a folha toda! Tinham de contar muitos, não era?
Margarida: Sim...
Prof: Será que existe uma maneira de vocês encontrarem, por exemplo no primeiro, o 15 sem contar os quadrados todos?

- (...)
- Ricardo: Hum... Sim! Já sei uma maneira! Eu percebi tudo. Nós só podemos contar aqui um e como tem aqui 3 temos de multiplicar, como na tabuada. 1, 2, 3, 4, 5, 5, 10, 15! Vamos ver no próximo. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. $9 + 9$ é 18, mais 18 é 27. Fácil. Já descobrimos.
- Prof: Explica-me lá, Ricardo. O que descobriram?
- Ricardo: Se nós contarmos uma linha que aqui tem 5, duplicamos e fica 10. E mais 5 é 15. No seguinte, a primeira fileira tem 9, duplicamos e é 18, mais 9 dá 27. Também pode ser ao contrário. Contar pelas colunas. Também podemos usar a tabuada. (...)

O papel do professor, em particular o seu questionamento sistemático parece ser determinante para que os alunos consigam clarificar e refinar as suas ideias matemáticas, sendo levados a usar argumentos e a justificar as suas respostas (Guerreiro *et al.*, 2015; Serrazina, 2021). Vejamos o seguinte excerto onde estas dimensões são particularmente evidentes:

- Prof: Digam-me lá o que mais descobertas fizeram. Para a primeira figura, por exemplo.
- Ricardo: Descobrimos que cada fila tem 5 quadrados e se nós multiplicarmos por 3 vai dar 15.
- Prof: Espera. Mas porque multiplicas por 3?
- Ricardo: Porque, na tabuada, 5×3 é 15.
- Prof: Mas se vocês não soubessem ainda o resultado, porque é que multiplicavam por 3?
- Ricardo: Porque contamos os quadradinhos de uma das filas. Depois mais 5 dá 10, e mais 5 dá 15.
- Prof: Multiplicaram quantas vezes?
- Alunos: 3.
- Prof: Porquê 3?
- Ricardo: Porque há 3 espaços.
- Prof: 3 linhas, não é?
- Ricardo: Sim.
- Prof: Então e no seguinte, multiplicam o quê?
- Ricardo: O 9 pelo 3 porque são 3 linhas com 9 quadrados cada uma, ou 9 colunas.
- Prof: Então o que descobriram nessa?
- Ricardo: Que uma fila temos de multiplicar por 3, porque tem 3 colunas.

Numa fase da aula, em que os alunos pareciam ter-se apropriado de diferentes estratégias para calcular as medidas de área dos retângulos, dando sentido à medida de área como um produto (Kordaki y Portari, 2002; Battista, 2003; Clements *et al.*, 2018), a professora, em cada grupo, lança um desafio adicional,

com o intuito de perceber se essa estratégia seria usada numa situação nova. Esta opção constituiu uma alteração à tarefa inicialmente planeada, mas foi sentida pela professora como pertinente. A professora desenha no papel quadriculado, junto de cada grupo, um retângulo de dimensões 30 por 19 e desafia-os a determinar a área. Vejamos a diálogo que se estabelece num dos grupos:

- Prof: Então imaginem. Este agora é o meu retângulo.
Afonso: É tão grande!
Prof: Pois é...! E agora vamos contar os quadrados todos?
Afonso: Não. Vamos contar os quadrados deste lado [aponta para o comprimento]. São 30.
Prof: E vais continuar a contá-los todos?
Afonso: Não! Aqui são 30, mais 30 é 60, mais 30 dá ...
Catarina: 90.
Afonso: É de 30 em 30.
Prof: E quantas vezes é que tinhas de repetir o 30?
O Afonso conta os quadrados do outro lado.
Catarina: Só precisamos de saber quantos quadrados tem cada lado.
Afonso: É 30×19 .
Prof: E isso vai dar a área?
Afonso: Sim!

O diálogo parece evidenciar uma clara apropriação da justificação da utilização de uma relação multiplicativa para calcular a medida de área. Os outros dois grupos conseguem também responder adequadamente usando esta estratégia. Em suma, a tarefa e a abordagem utilizada em sala de aula parecem ter proporcionado as condições para a identificação e exploração de relações entre a medida de área e o número de linhas e colunas de um retângulo (Cavanagh 2007; Clements *et al.*, 2018). Há evidências de uma aprendizagem compreensiva que suportará a descoberta da fórmula de cálculo, como veremos na secção seguinte.

APRENDIZAGENS EMERGENTES NA FASE DE DISCUSSÃO COLETIVA E SÍNTESE

Na fase de discussão coletiva a professora começa por solicitar aos diferentes grupos que apresentem o trabalho desenvolvido, em particular as estratégias utilizadas, as respostas dadas e as conclusões retiradas. Vai colocando em confronto as respostas dos alunos, pedindo clarificações, justificações e aprofundamentos (Serrazina, 2021). Nesta lógica de aprofundamento, é um dos grupos que refere a utilidade de usar uma estratégia multiplicativa. Vejamos o diálogo estabelecido:

- Ricardo: (...) Também dá para contar com a tabuada.
Prof: Dá para contar com a tabuada? Explica lá isso melhor...
Ricardo: Temos as filas e temos as colunas. Se uma fila tiver 3 quadrados e se a coluna tiver 5, então é 5×3 .
Diana: Ou 3×5 .
Prof: Letícia, porque é que o Ricardo diz que é assim?
Letícia: Porque nós contamos 3 filas com 5 quadrados.
Prof: (...) Então expliquem lá, Diana e Sofia, como é que descobriram as áreas dos retângulos.
Diana: Nós fizemos com a multiplicação e não precisamos de pôr os tracinhos para construir os quadrados.
Prof: Então vocês não contaram como o Afonso e a Catarina?
Sofia e Diana: Não.
Prof: Então como é que vocês fizeram?
Diana: Nós vimos que, por exemplo, no E, tem 4 quadrados. E no outro lado tem 7 quadrados.
Prof: Então vocês contaram os quadrados das linhas e das colunas.
Sofia: Sim.
Diana: E depois a linha multiplicamos com a coluna.
Prof: Vem cá à frente explicar como é que fizeram, Diana.
A aluna mostra como pensou o grupo, utilizando o retângulo desenhado no quadro.
(...)
Diana: E é mais fácil, porque se temos uma área muito grande é difícil contar todos os quadrados. Com a tabuada é mais fácil.

Neste diálogo há uma troca de ideias matemáticas entre alunos de grupos diferentes, dimensão característica de um momento de discussão coletiva, na sala de aula (Canavaro *et al.*, 2014). Os alunos revelam não só uma boa apropriação da linguagem matemática que mobilizam, mas também compreender que existe uma relação entre a medida de área e o número de quadrados em linha e em coluna (Kordaki y Portari, 2002; Cavanagh 2007; Clements *et al.*, 2018). Adicionalmente, parecem reconhecer a vantagem do cálculo do produto em detrimento da utilização de estratégias de contagem que são morosas e propiciam o erro.

A discussão progride no sentido de que os alunos formalizem indutivamente a fórmula matemática, estabelecendo uma conexão entre as linhas e as colunas com as medidas lineares do retângulo (comprimento e largura). Nesta fase, a professora estimula os alunos a fazerem essa concetualização, conseguindo que os alunos enunciem a fórmula de cálculo de área de um retângulo. Vejamos alguns excertos do diálogo estabelecido:

[A professora representa no quadro um retângulo que descreveu.]

Diana: Esse era 5×10 . (...)

Letícia: Que dá 50.

Prof: Concordas, Catarina?

Catarina: Sim.

Prof: Então o que é que são este 10 e este 5?

Ricardo: O perímetro?

Prof: Com o 10 e com o 5 conseguíamos descobrir o perímetro?

Alunos: Sim!

Sofia: $10 + 10$ é 20. $5 + 5$ é 10. $20 + 10$ é 30!

Prof: Então o perímetro é 30. O que é o perímetro?

Alunos: É a parte de fora.

Prof: E isto é o que [aponta para o lado menor]?

Diana: É o lado.

Prof: E quanto mede este lado?

Diana: 5.

Prof: E aquele [aponta para o lado maior]?

Sofia: 10.

Prof: E como é que vocês descobrem a área?

Diana: 10×5 .

Prof: Ok. Então agora imaginem que queríamos a área do quadro. Como é que fazíamos? [O diálogo continua com muitas intervenções] (...)

Diana: Fizemos 10×5 !

Prof: E o 10 era o quê?

Afonso: O comprimento!

Prof: E depois temos a ...

Alunos: Largura!

Prof: Então para descobrir a área o que fazemos?

Diana: Multiplicamos o comprimento e a largura!

Prof: E vai dar o perímetro!

Alunos: [Risos] Não! A área!

Prof: Então assim vamos conseguir descobrir a área de todos os retângulos, desde que tenhamos o comprimento e a largura!

Afonso: Eu sei fazer isso em letras!

Prof: Como é que fica em letras?

Afonso: $c \times l = A$. Que é o comprimento vezes largura é igual à área!

Prof: Muito bem.

Os alunos, auxiliados pela professora e no contexto do exemplo concreto utilizado, parecem ter conseguido relacionar o uso anterior que tinham feito de linhas e

colunas com as dimensões lineares de um retângulo, generalizando, indutivamente que a medida de área de um retângulo se pode obter multiplicando a medida de comprimento pela medida da largura. No contexto do modelo de ensino exploratório, esta fase final da aula corresponde à síntese das aprendizagens realizadas pelos alunos na tarefa. Esta síntese é feita pelos próprios alunos a partir do questionamento da professora. Adicionalmente, este excerto evidencia que, apesar do equívoco inicial do Ricardo relativamente ao conceito de perímetro, outros alunos conseguiram mobilizar adequadamente o conceito de perímetro e de medida de perímetro no âmbito do retângulo que estava a ser analisado.

CONCLUSÕES

A tarefa levou os alunos a calcular áreas de retângulos, tendo estes utilizado várias estratégias, iniciando pelas mais intuitivas, como a contagem de quadriculas, verificando-se uma progressão neste cálculo, transitando para a adição sucessiva de filas de quadriculas, que rapidamente deu lugar ao raciocínio multiplicativo. Os alunos conseguiram descobrir a fórmula de cálculo da área do retângulo, de forma indutiva, dando-lhe sentido (Battista, 2003; Cavanagh, 2007; Clements *et al.*, 2018). Em termos de aprendizagem, há algumas características da tarefa que foram importantes, nomeadamente o facto de incluir vários retângulos de diferentes dimensões e apresentados de forma diferente quanto ao grau de explicitação da sua decomposição em quadrados unitários, o que conduziu a que os alunos usassem, com sentido, o conceito da unidade que se repete em cada retângulo, observando regularidades (Outhred y Mitchelmore, 2000). Nas experiências que fizeram, os alunos identificaram relações espaciais envolvidas na medição, reconhecendo a repetição de linhas e colunas (Kordaki y Portari, 2002). A natureza aberta da tarefa permitiu ainda que a professora sugerisse a exploração de um retângulo de maior dimensão não desenhado na folha de trabalho inicial, o que ajudou os alunos a generalizar indutivamente a relação descoberta.

Além das características da tarefa, o modo da sua concretização em sala de aula, assente nas fases do ensino exploratório da matemática (Canavarro *et al.*, 2014; Oliveira *et al.*, 2013) parecem ter sido determinantes para a qualidade e natureza do trabalho matemático dos alunos. Na fase de trabalho autónomo e colaborativo, os alunos tiveram oportunidade de discutir ideias matemáticas entre si, colocando em confronto diferentes estratégias e avaliando a sua adequação no contexto

da tarefa. A professora monitorizou o trabalho que foi sendo realizado por cada grupo, colocando questões, dando pistas, lançando desafios, pedindo justificações e clarificações, o que promoveu o raciocínio e a comunicação dos alunos (Serrazina, 2021). Na discussão coletiva e síntese, a professora criou condições propícias a um bom ambiente de discussão, envolvendo os alunos dos diferentes grupos, pedindo que partilhassem o seu trabalho de forma clara e justificassem as suas ideias, promovendo análise, confronto e comparação entre estratégias utilizadas (Guerreiro *et al.*, 2015; Ponte y Quaresma, 2016; Serrazina, 2021). Adicionalmente, partindo das ideias dos alunos, auxiliou-os a institucionalizar ideias e procedimentos relativos ao cálculo da medida de área de um retângulo.

Evidencia-se o papel da professora quando, através das suas ações intencionais, incentiva os alunos a partilhar ideias matemáticas e as estratégias utilizadas na resolução da tarefa (Ponte y Quaresma, 2016). Adicionalmente, a professora raramente dá respostas. A sua estratégia assenta sobretudo no questionamento guiado, procurando que os alunos progridam e refinem o seu raciocínio (Guerreiro *et al.*, 2015; Ponte y Quaresma, 2016). No âmbito desta tarefa é evidente o uso de estratégias de raciocínio indutivo pelos alunos (Serrazina, 2021) já que, pela análise de exemplos concretos, conseguiram generalizar, indutivamente, a fórmula de cálculo da medida de área de um retângulo.

Uma das limitações deste estudo é o facto de ter sido realizado com um número reduzido de alunos. Assim, os resultados deste estudo não podem ser generalizados a outros contextos. Apesar das limitações identificadas, este trabalho permite-nos refletir sobre a natureza do trabalho em matemática nos anos iniciais e constitui-se como um contributo para a compreensão de aspetos didáticos que podem potenciar a aprendizagem compreensiva do conceito de área de um retângulo, destacando-se, por um lado, a importância da natureza da tarefa proposta e, por outro, o tipo de ações estratégias e intencionais da professora no âmbito da metodologia de ensino utilizada, o ensino exploratório.

No futuro, seria interessante dar continuidade e profundidade a este estudo, alargando a experiência de sala de aula a um maior número de participantes e analisando os resultados em diferentes turmas. Adicionalmente, é importante compreender a potencialidade de outras tarefas matemáticas para o aprofundamento do domínio destes conceitos e para o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas envolvendo os conceitos de área e perímetro.

REFERÊNCIAS

- Abadi, M., y Amir, M. (2022). Analysis of the Elementary School Students Difficulties of in Solving Perimeter and Area Problems. *Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*, 10(2), 396-408.
- Abrantes, P., Serrazina, L., y Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Ministério da Educação.
- Agacdiken, F., y Yilmaz, R. (2023). Concept Formation Processes of Area and its Formula with GeoGebra: Case of Rectangle. *The International Journal for Technology in Mathematics Education*, 30(3), 191-201.
- Ahmad, S. (2021). Geometry learning with Indonesian realistic mathematics education approach. *Elementary School Journal*, 11(4), 393-405.
- Bans-Akutey, A., y Tiimub, B. (2021). Triangulation in Research. *Academia Letters*, 3392. <https://doi.org/10.20935/AL3392>
- Battista, M. T. (2003). Understanding students' thinking about area and volume measurement. In D. H. Clements y G. Bright (Eds), *Learning and Teaching Measurement* (pp. 122-142). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Bernardo, I. (2021). Educational Design Research. In A. Moreira, P. Sá, y A. P. Costa (coords.), *Reflexões em torno de Metodologias de Investigação: métodos* (Vol. 1) (pp. 65-81). UA Editora.
- Breda, A., Serrazina, L., Menezes, L., Sousa, H., y Oliveira, P. (2011). *Geometria e medida no Ensino Básico*. Ministério da Educação; Direcção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.
- Canavaro, A. P., Oliveira, H. y Menezes, L. (2014). Práticas de ensino exploratório da Matemática: Ações e intenções de uma professora. In J. P. Ponte (Org.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 217-233). Instituto de Educação.
- Canavaro, A., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveira, M., Correia, P., Marques, P., y Espadeiro, R. (2021). *Aprendizagens essenciais de Matemática*. Ministério da Educação, República Portuguesa.
- Cavanagh, M. (2007). Year 7 students' understanding of area measurement. In K. Milton, H. Reeves, y T. Spencer (Eds.), *Proceedings of the 21st Biennial Conference of the Australian Association of Mathematics Teachers Inc* (pp. 136-143). Australian Association of Mathematics Teachers.
- Caviedes, S., Gamboa, G. D., y Badillo, E. (2020). Procedimientos utilizados por estudiantes de 13-14 años en la resolución de tareas que involucran el área de figuras planas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 34, 1015-1035.

- Cayo, H., y Contreras, L. (2020). Algunos elementos claves del conocimiento especializado del profesor de matemáticas para la gestión de las relaciones área-perímetro. *Educación matemática*, 32(2), 39-68.
- Cherif, A. H., Gialamas, S., y Stamati, A. (2017). Developing mathematical knowledge and skills through the awareness approach of teaching and learning. *Journal of Education and Practice*, 8(13), 108-132.
- Clements, D., Sarama, J., Van Dine, D., Barrett, J., Cullen, C., Hudyma, A., Dolgin, R., Cullen, A., y Eames, C. (2018). Evaluation of three interventions teaching area measurement as spatial structuring to young children. *Journal of Mathematical Behavior*, 50, 23-41.
- D'Amore, B.; y Fandiño, M. (2007). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 10(1), 39-68.
- Dias, C. M. (2009). Olhar com Olhos de Ver. *Revista Portuguesa de Pedagogia*, 43(1), 175-188.
- Gläser-Zikuda, M., Hagenauer, G., y Stephan, M. (2020). The Potential of Qualitative Content Analysis for Empirical Educational Research. *Forum Qualitative Sozialforschung Forum: Qualitative Social Research*, 21(1). <https://doi.org/10.17169/fqs-21.1.3443>
- Guerreiro, A., Tomás Ferreira, R., Menezes, L., y Martinho, M. H. (2015). Comunicação na sala de aula: A perspetiva do ensino exploratório da matemática. *Zetetiké*, 23(4), 279-295.
- Irshad, M. (2024). Enhancing Mathematical Literacy in School Students: Strategies for Effective Instruction in Basic Math Concepts. *Scholars journal of physics, mathematics and statistics*, 11(1), 296-305.
- King, S., Rojo, M., y Bryant, D. P. (2023). Demystifying Area and Perimeter: A Practitioner's Guide to Strategies That Work. *Intervention in School and Clinic*, 58(4), 241-248.
- Kordaki, M. y Potari, D. (2002). The effect of area measurement tools on student strategies: The role of a computer microworld. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, 65-100.
- Kurniawati, L., y Amir, M. (2022). Development of learning trajectory of perimeter and area of squares and rectangles through various tasks. *Premiere Educandum: Jurnal Pendidikan Dasar dan Pembelajaran*, 12(1), 54-68.
- Marmolejo, G. y González, M. (2013). Visualización en el área de regiones poligonales. Una metodología de análisis de textos escolares. *Educación Matemática*, 25(3), 61-102.
- Marmolejo, G. y Vega, M. (2012). La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje. *Educación Matemática*, 24(3), 9-34.
- NCTM (2008). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Associação de Professores de Matemática.
- NCTM (2017). *Princípios para a ação – assegurar a todos o sucesso em matemática*. Associação de Professores de Matemática.

- NCTM (2020). *Standards for Mathematics Teacher Preparation*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Oliveira, H., Menezes, L., y Canavarró, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante*, 12(2), 29- 53.
- Outhred, L. y Mitchelmore, M. (2000). Young children's intuitive understanding of rectangular area measurement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(2), 144-167.
- Plomp, T. (2013). Educational Design Research: An Introduction. In T. Plomp, y N. Nieveen (Eds.), *Educational Design Research - Part A: An introduction* (pp. 11-51). Netherlands Institute for Curriculum Development.
- Ponte, J. P.; y Quaresma, M. (2016). Teachers' professional practice conducting mathematical discussions. *Educational Studies in Mathematics*, 93 (1), 51-66.
- Rocha, M., Leão, C., Pinto, F., Pinto, H., Menino, H., Pimparel, M., Gonçalves, M., Pires, M., y Rodrigues, M. (2008). *Geometria e medida: percursos de aprendizagem*. Escola Superior de Educação – Instituto Politécnico de Leiria.
- Seah, R. (2015). Reasoning with geometric shapes visualisation as a tool for geometric reasoning. *The Australian Mathematics Teacher*, 71(2), 4-11.
- Serrazina, L. (2021). Aprender Matemática com compreensão: raciocínio matemático e ensino exploratório. *EM TEIA-Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 12(3), 1-19.
- Shava, G., Hleza, S., Tlou, F., Shonhiwa, S., y Mathonsi, E. (2021). Qualitative content analysis, utility, usability and processes in educational research. *International Journal of Research and Innovation in Social Science*, 5(7), 553-558.
- Urbano-Urbano, I. F., Gaviria-Garcés, N. F., y Prada-Núñez, R. (2021). Dificultades en el aprendizaje del concepto de área y resolución de problemas. *Mundo FESC*, 11(S6), 138-155.
- Walton, C., y Randolph, T. (2017). Alternative methods for understanding area formulas. *Illinois Mathematics Teacher*, 64(1), 40-45.
- Winarti, D., Amin, S., Lukito, A., y Van Gallen, F. (2012). Learning the concept of area and perimeter by exploring their relation. *Journal on Mathematics Education*, 3(1), 41-54.
- Yin, R. (2018). *Case Study Research and Applications: Design and Methods*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Autor de correspondencia

SORAIA ANTUNES FILIPA FARINHA

Dirección: Escola Superior de Educação e Ciências Sociais de Leiria,
Ci&DEI, Instituto Politécnico de Leiria, Portugal
Rua Dr. João Soares, Apartado 4045, 2411-901 Leiria – Portugal
soraia.farinha@ipleiria.pt