 https://doi.org/10.24844/EM3702.03

# Estrategias que usan estudiantes de tercer año de Educación Primaria cuando resuelven una tarea de pensamiento funcional

## Strategies used by third-year primary school students when solving a functional thinking task

**Rodolfo Morales,[1] Ángela Agurto,[2] Isidora Mendoza,[3] Catalina Olave,[4] Lissett Valenzuela,[5] Danilo Díaz-Levicoy[6]**

**Resumen:** Esta investigación busca caracterizar las estrategias que manifiestan estudiantes de tercero de Educación Primaria en una tarea que implica pensamiento funcional. Para ello, se elaboró una entrevista semiestructurada que se aplicó de manera individual a cuatro estudiantes de tercero de primaria (8-9 años de edad). La entrevista llevó asociada una tarea de pensamiento funcional cuya función involucrada fue $f(x) = x+1$, en un contexto cercano a los estudiantes. Se realizó un análisis de contenido de las producciones de cada uno de los estudiantes a las siete preguntas que involucró la tarea. Entre los resultados se destaca que los estudiantes fueron capaces de utilizar estrategias centradas en las relaciones funcionales de correspondencia y covariación. Además, fueron

**Fecha de recepción:** 6 de agosto de 2024. **Fecha de aceptación:** 20 de marzo de 2025.

[1] Universidad Católica del Maule, Talca, Chile, rmoralesm@ucm.cl, https://orcid.org/0000-0002-1892-1671

[2] Universidad Católica del Maule, Talca, Chile, angela.agurto@alu.ucm.cl, https://orcid.org/0009-0000-6827-4866

[3] Universidad Católica del Maule, Talca, Chile, isidora.mendoza@alu.ucm.cl, https://orcid.org/0009-0004-2631-9455

[4] Universidad Católica del Maule, Talca, Chile, catalina.olave@alu.ucm.cl, https://orcid.org/0000-0001-8365-2490

[5] Universidad Católica del Maule, Talca, Chile, lissett.valenzuela@alu.ucm.cl, https://orcid.org/0009-0003-1019-1867

[6] Universidad Católica del Maule, Talca, Chile, ddiazl@ucm.cl, https://orcid.org/0000-0001-8371-7899

capaces de responder a una pregunta general desde la particularización y la generalización de una relación funcional. Los resultados sugieren que los estudiantes de estas edades educativas son capaces de involucrarse adecuadamente con tareas que llevan asociadas el concepto de función.

**Palabras clave:** *Pensamiento funcional, Pensamiento algebraico, Álgebra temprana, Generalización, Educación Primaria.*

**Abstract:** This study aims to characterize the strategies employed by third-grade elementary school students in a task involving functional thinking. To achieve this, a semi-structured interview was designed and individually administered to four third-grade students (ages 8–9). The interview was linked to a functional thinking task involving the function f(x) = x+1, presented in a familiar context for the students. A content analysis was conducted on each student's responses to the seven questions included in the task. The findings indicate that students were able to employ strategies focused on functional relationships of correspondence and covariation. Additionally, they successfully responded to a general question by particularizing and generalizing a functional relationship. These results suggest that students at this educational stage can effectively engage with tasks involving the concept of function.

**Keywords:** *Functional thinking, Algebraic thinking, Early algebra, Generalization, Primary Education.*

## INTRODUCCIÓN

La enseñanza tradicional del álgebra escolar basada en la manipulación del simbolismo algebraico y procesos mecánicos junto, con el enfoque curricular, donde la enseñanza de la aritmética que antecede a la enseñanza del álgebra, ha provocado durante años dificultades en los aprendizajes algebraicos de los estudiantes (Lins y Kaput, 2004; Molina, 2009; Kieran, 2007). Como una forma de abordar esta brecha surge la propuesta curricular e*arly algebra* (álgebra temprana) que pretende subsanar aquellas dificultades que los estudiantes enfrentan cuando abordan nociones algebraicas por primera vez. Particularmente, el lineamiento central del *early algebra* busca la promoción de modos de pensamiento algebraico desde de los primeros niveles educativos. Se pretende otorgar un carácter algebraico a la aritmética presente en el currículum de matemática, de esta manera se invita a los estudiantes a resolver tareas que involucren: la identificación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas, fomentar hábitos de pensamiento centrados en la observación de la estructura que subyace a la matemática y realizar procesos de generalización de estructuras y relaciones matemáticas (Blanton y Kaput, 2005).

El pensamiento funcional es considerado un tipo de pensamiento algebraico y un enfoque para introducir ideas algebraicas a partir de los primeros niveles educativos (Cañadas *et al.*, 2018). Se centra en las relaciones entre cantidades que covarían y la generalización de las mismas y tiene a la función como contenido protagonista (Blanton, 2008; Smith, 2008). En este trabajo, siguiendo a Shliemann *et al.* (2011), asumimos que las operaciones aritméticas pueden ser consideradas como funciones. Dichos autores consideran que la aritmética se ocupa de esa parte del álgebra en la que números y medidas particulares, son tratados como instancias de ejemplos más generales, fomentando así procesos de representación y generalización, habilidades propias del pensamiento algebraico. Por ejemplo, la multiplicación por dos (la tabla del dos) puede ser concebida como una función de proporcionalidad (Morales *et al.*, 2023).

Las ventajas asociadas a este pensamiento en Educación Primaria son diversas, entre ellas se destacan: a) promueve de manera intuitiva el concepto de función a través de las relaciones entre las cantidades, la representación y la generalización; b) ayuda a desarrollar habilidades para distinguir la relación entre cantidades e identificar la regularidad de la situación dada; c) es un medio para promover la resolución de problema y, d) es considerada como una meta disciplinar (Kaput, 2008; Blanton, 2008; Rico 2006; Torres *et al.*, 2022). Dadas estas ventajas, no es de extrañar que varios países hayan incorporado elementos del pensamiento funcional en sus currículos (Merino *et al.*, 2013; Morales y Parra, 2022). Por ejemplo, el currículo chileno sugiere que los estudiantes deben ser capaces de identificar relaciones entre cantidades de tal manera que exploren cómo el cambio de una cantidad afecta a la otra (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2012).

Desde un punto de vista investigador, el pensamiento funcional ha sido motivo de interés en los últimos años, se han realizado esfuerzos considerables para caracterizarlo en estudiantes de edades escolar tempranas. Por ejemplo, hay estudios que sugieren que estudiantes de primero y segundo de Educación Primaria son capaces de abordar tareas de relaciones funcionales usando estrategias basadas en la relación de correspondencia, evidenciando la estructura de la relación funcional y usando la representación verbal para generalizar dicha relación y estructura (p. ej., Morales *et al.*, 2018; Torres *et al.*, 2021). A pesar de estos esfuerzos, aún quedan líneas abiertas por explorar respecto a cómo estudiantes de niveles educativos iniciales son capaces de transitar desde la aritmética al álgebra a través del proceso de generalización, en un contexto funcional del álgebra escolar (Torres *et al.*, 2023).

Este estudio pretende, de acuerdo con las consideraciones anteriores, dar respuesta al siguiente objetivo de investigación: caracterizar las estrategias que manifiestan estudiantes de tercero de Educación Primaria en una tarea que implica pensamiento funcional. Al abordar este objetivo se busca aportar más evidencia al cuerpo de conocimiento existente sobre el pensamiento funcional de estudiantes de las primeras edades educativas. Además, intenta dar orientaciones novedosas para abordar la generalización de una relación funcional en el aula.

## MARCO CONCEPTUAL Y ANTECEDENTES

### *Early algebra*

El *early algebra* es una propuesta curricular que surge en los Estados Unidos como forma de potenciar el aprendizaje del álgebra a partir de los primeros niveles educativos, como consecuencia de las dificultades y los errores que han manifestado los estudiantes desde el enfoque tradicional y mecanicista del álgebra escolar (Kaput, 2000; Molina, 2009). En los últimos años, investigaciones en torno al *early algebra* han evidenciado que los estudiantes tienen capacidades para abordar de manera exitosa tareas con nociones algebraicas adecuadas a sus edades, en contraste con lo que se pensaba hace algunas décadas (Brizuela *et al.*, 2015). Por consiguiente, esta propuesta busca potenciar el currículum tradicional, de tal modo que le otorga a la aritmética un carácter fuertemente algebraico. Se pretende que los estudiantes puedan promover aprendizaje algebraico a través de distintas prácticas centradas en la justificación, representación, razonamientos y la generalización, esta última sobre las relaciones matemáticas a través de representaciones cada vez más sofisticadas. El *early algebra* posee un amplio abanico de posibilidades con las que se pretende la introducción de los elementos algebraicos, se tienen distintos enfoques como: el pensamiento relacional, el estudio de la aritmética generalizada y el pensamiento funcional (Cañadas y Molina, 2016). Este trabajo se centra en el enfoque del pensamiento funcional y sus elementos, dado que es uno de los recomendados para abordar nociones algebraicas a partir de los primeros niveles educativos.

## Pensamiento funcional

El pensamiento funcional se considera un tipo de pensamiento algebraico basado en la construcción, descripción y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que la constituyen (Cañadas y Molina, 2016). Tiene como objeto establecer relaciones de dependencia entre dos o más conjuntos de datos inmersos en situaciones cotidianas (Cañadas y Fuentes, año). Asimismo, el pensamiento funcional, se evidencia cuando un estudiante explicita la relación entre las cantidades variables y de esa manera puede abstraer el razonamiento hacia una regla general, que puede descubrirse mediante un proceso inductivo (Cañadas y Molina, 2016). Además, es cuando este mismo estudiante, una vez que ha centrado su atención en la relación entre las cantidades variables, es capaz de generalizar y justificar esas relaciones, usando representaciones que pueden abarcar el lenguaje natural u, otros centrados en lo pictórico, tabular, gráfico, simbólico o algebraico (Blanton *et al.*, 2015; Smith, 2008). En este sentido, la justificación es un elemento clave en el pensamiento funcional, dado que favorece su desarrollo y permite evidenciar cuando un estudiante resuelve tareas asociadas a este pensamiento (Pinto *et al.*, 2023; Thanheiser y Sugimoto, 2022). Además, de acuerdo con Blanton *et al.* (2011), la justificación busca la formulación de argumentos para validar conjeturas o afirmaciones.

## Relaciones funcionales como estrategias de resolución

Las estrategias son secuencias de procedimientos que se realizan sobre conceptos y relaciones matemáticas (Rico, 1997). En este contexto, se considera como estrategia a la actuación que realiza un resolutor frente a una tarea matemática. En la enseñanza y estudio del álgebra escolar las formas de establecer relaciones funcionales (Kaput, 1998), suelen ser consideradas como estrategias de resolución de un problema que implica el concepto de función. Por ejemplo, en Morales y Parra (2022) se observa que futuros profesores emplean estrategias centradas en las relaciones entre cantidades que covarían. Diversos autores (p. ej., Amit y Neria, 2008; Merino *et al.*, 2013) destacan la necesidad de indagar sobre las estrategias que emplean estudiantes de primeros niveles educativos en la resolución de problemas en el contexto funcional. En este sentido, las estrategias podrían implicar tres tipos de relaciones, estas son: recurrencia, correspondencia y covariación (Confrey y Smith, 1991). La primera de ellas, es la más elemental de todas e implica la localización de una relación entre las cantidades de la secuencia de una de las variables involucradas en la tarea (Blanton, 2008). Un ejemplo de este tipo de patrón se observa en la figura 1, la solución se logra enfocando la atención en la columna de la variable dependiente, usando el patrón de sumar uno a la cantidad anterior. La complejidad que tiene este patrón es que, para hallar una cantidad distante de una anterior, requiere el conocimiento de todas las cantidades anteriores de la secuencia de la variable.

| Variable independiente ($x$) | Variable dependiente ($y$) |
|---|---|
| 1 | 6 |
| 2 | 7 |
| 3 | 8 |
| 4 | 9 |

+ 1
+ 1
+ 1

**Figura 1.** Relación de recurrencia

Por su parte, la correspondencia se refiere a la relación entre pares correspondientes de las cantidades de las variables involucradas (dependiente e independiente) (Confrey y Smith, 1991; Smith, 2008). Identificar la correspondencia implica encontrar una regla que permita determinar un valor de la variable dependiente dado un valor de la variable independiente (Blanton *et al.*, 2011). Por ejemplo, en la figura 2, se indica con la flecha horizontal la relación de correspondencia, está determinada por la regla de sumar cinco a cada una de las cantidades de variable independiente con el fin de hallar el valor de la variable dependiente correspondiente.

| Variable independiente ($x$) | Variable dependiente ($y$) |
|---|---|
| 1 | 6 |
| 2 | 7 |
| 3 | 8 |
| 4 | 9 |

+1 +1
+1 +1
+1 +1

+ 5

**Figura 2.** Relación funcional de covariación y correspondencia

La relación de covariación se asocia al cambio simultáneo y coordinado entre las cantidades de ambas variables. Es decir, determinar cómo las cantidades de las variables varían al mismo tiempo. Implica centrarse en cómo los cambios de las cantidades de la variable independiente influyen en las de la variable dependiente (Blanton *et al.*, 2011). Un ejemplo de este tipo de relación se observa en las flechas curvas de la tabla de la figura 2, a través de la variación entre las cantidades de la variable independiente se halla una cantidad de la variable dependiente. Es decir, se suma uno entre dos cantidades consecutivas de la variable independiente, por tanto, se suma uno entre dos cantidades consecutivas de la variable dependiente.

Para Smith (2008), un trabajo centrado en las relaciones funcionales de correspondencia y covariación, permite avanzar en la construcción de elementos clave de la noción de función y, evidenciar el pensamiento funcional de quienes las utilizan. Lo anterior se debe a que estas relaciones funcionales requieren enfocarse en las formas de variación entre las cantidades de las variables (Morales *et al.*, 2018).

En los últimos años diversos investigadores se han centrado en las relaciones funcionales de estudiantes de los primeros niveles educativos como una forma de evidenciar su pensamiento funcional. Por ejemplo, Stephens *et al.* (2012) evidenciaron que estudiantes entre 8 a 10 años, fueron capaces de transitar desde la recurrencia y covariación hasta la correspondencia, en un contexto de experimento de enseñanza. Resultados similares fueron encontrados por Tanışlı (2011) con estudiantes de entre 9 a 10 años, pero en una tarea de tablas de funciones. Pinto *et al.* (2019) establecieron que la relación funcional identificada con mayor frecuencia por estudiantes de 9 años es la correspondencia. Warren y Cooper (2006) encontraron que estudiantes de 9-10 años identificaron la recurrencia y correspondencia en una tarea de pensamiento funcional y alcanzaron la generalización de esta última relación. Incluso hay estudios con estudiantes de menos edades (6 años) que demuestran ser capaces de evidenciar relaciones funcionales de correspondencia y covariación en una tarea de pensamiento funcional (Morales *et al.*, 2018). Según los antecedentes consultados, todos los investigadores coinciden en que es necesario seguir ahondando en las relaciones funcionales de estudiantes de los primeros niveles educativos, como una forma de caracterizar el pensamiento funcional y generar un cuerpo de conocimiento consistente que permita su contribución en la enseñanza del álgebra escolar.

## Representaciones

Las representaciones externas se entienden como "notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos, así como sus características y propiedades más relevantes" (Castro y Castro, 1997, p. 96). Estas representaciones, por un lado, llevan a los estudiantes al descubrimiento de objetos matemáticos abstractos (Molina, 2014), y, por otro lado, son valiosas para la investigación, dado que evidencian en las producciones el pensamiento que manifiestan los estudiantes cuando resuelven tareas matemáticas (Merino *et al.*, 2013).

Desde el pensamiento funcional, las representaciones verbales, pictóricas, tabulares, gráficas y simbólicas adquieren relevancia, porque facilitan a los estudiantes entender el comportamiento de la función y a su vez demuestran la presencia de tales pensamientos (Blanton *et al.*, 2011; Cañadas *et al.*, 2016; Cañadas y Molina, 2016). Por ejemplo, la representación verbal, que refiere al lenguaje natural, oral o escrito, permite expresar los conceptos matemáticos, y, por ende, las relaciones funcionales y su generalización (Cañadas y Figueiras, 2011; Morales *et al.*, 2023). En cambio, la representación pictórica alude a recursos visuales como los dibujos, es primordial por ser propia y original de los estudiantes que resuelven tareas matemáticas (Blanton *et al.*, 2011; Cañadas y Figueiras, 2011). Por otro lado, la representación simbólica, aborda lo alfanumérico y su sintaxis, es descrita mediante una serie de reglas y procedimientos (Rico, 2009). Este sistema involucra símbolos y signos propios de la matemática, y requiere de un nivel de sofisticación mayor, dado que expresa de manera exacta y precisa las relaciones entre las cantidades variables en una tarea de pensamiento funcional (Azcárate y Deulofeu, 1990; Blanton, 2008).

Los estudios que hay en tareas de pensamiento funcional sugieren que estudiantes de edades entre 9 a 10 son capaces de usar representaciones simbólicas y verbales como formas de expresar la generalización de la relación funcional (Ureña *et al.*, 2019). Por su parte, Pinto *et al.* (2023), con estudiantes de las mismas edades que el estudio anterior, identificaron que al principio recurrían a una representación numérica y única, pero a medida que fueron avanzando en la tarea, los estudiantes lograron abordar una relación funcional expresando sus argumentos de manera cada vez más sofisticada, por ejemplo, como una representación simbólica. Medrano *et al.* (2022) sugieren que estudiantes de entre 8-9 años son capaces de producir representaciones más sofisticadas, es decir, usan letras para solucionar tareas en un contexto funcional del álgebra escolar.

## Generalización

Los estudiantes cuando ingresan a la escolaridad poseen capacidades naturales para realizar y expresar procesos de generalización de estructuras matemáticas (Mason, 1999; Socas, 2011). Desde esta perspectiva, se considera que el desarrollo del pensamiento algebraico consiste, en gran medida, en aprovechar y potenciar esas capacidades naturales de los estudiantes. Generar instancias de generalización en los estudiantes implica ofrecerles oportunidades para que busquen, identifiquen y expresen regularidades, con la finalidad de desarrollar su pensamiento crítico y capacidades para resolver problemas de manera más eficiente (Molina, 2009). En el contexto del pensamiento funcional, Kaput (2000) indica que la generalización es:

> (...) extender deliberadamente el rango de razonamiento o comunicación más allá del caso o casos considerados, identificando explícitamente y exponiendo similitud entre casos, o aumentando el razonamiento o comunicación a un nivel donde el foco no son los casos o situación en sí mismos, sino los patrones, procedimientos, estructuras, y las relaciones a lo largo y entre ellos (p. 6).

En este sentido se considera que la generalización se logra, entre otros procesos, por medio de casos particulares, lo que implica un razonamiento inductivo. Esto es, a través del trabajo organizado de casos particulares se busca la identificación del patrón que se establece entre las cantidades que covarían y su relación con la regla general (Cañadas y Castro, 2007). Sin embargo, Mason (1996) menciona que también es posible llegar a la generalización a través de un ejemplo genérico, esto quiere decir que es posible generalizar por medio de un único ejemplo o caso particular con características determinadas.

Los estudios sobre generalización en pensamiento funcional dan cuenta de que los estudiantes de los primeros niveles educativos son capaces de generalizar, pero lo hacen de distintas formas. Por ejemplo, Morales *et al.* (2016) en un estudio con 30 estudiantes de 6 a 7 años, mostraron que algunos de ellos respondieron por medio de un caso particular (particularizaron), mientras que otros generalizaron verbalmente la relación funcional de correspondencia. Pinto y Cañadas (2018) evidenciaron que estudiantes de 9 años de edad fueron capaces de generalizar la relación de correspondencia y lo hicieron desde la espontaneidad (sin necesidad de preguntar de manera general) y desde una pregunta inducida para tal proceso. Por su parte, Morales *et al.* (2018), también encontraron que estudiantes de 6 a 7 años expresaron la generalización de la relación de correspondencia de manera verbal. Torres *et al.* (2021) dieron cuenta que estudiantes de entre 7 a 8 años de edad son capaces de generalizar la estructura subyacente a una relación funcional que viene dada en la tarea propuesta. En un estudio posterior, los mismos autores (Torres *et al.*, 2023) evidenciaron que un estudiante de 7 años en una tarea cuya función fue $f(x) = x + 3$, generalizó verbalmente a partir de casos particulares, pasando de una generalización aritmética a una generalización algebraica. Esto quiere decir que el estudiante transitó desde la acción "sumar tres" a la acción "siempre más tres", evidenciando así una transición del pensamiento aritmético al algebraico.

## METODOLOGÍA

### Tipo de investigación

Esta investigación es de tipo cualitativa, dado que busca comprender opiniones, experiencias y significados que los participantes atribuyen a una tarea determinada (Monje, 2011). Por su parte, Hernández *et al.* (2014) indican que este tipo de investigación, con frecuencia, se basa en métodos de recolección de datos sin medición numérica, los cuales, además, no son estandarizados ni predeterminados completamente. Además, esta investigación se enmarcó en un estudio de casos, dado que buscamos indagar en profundidad el trabajo de estudiantes de tercero de Educación Primaria cuando resuelven tareas que implican relaciones funcionales (Stake, 1999).

### Sujetos de investigación

Cuatro estudiantes de tercero de educación primaria (8 - 9 años) de un establecimiento municipal de la ciudad de Talca, Chile. Su selección fue de manera intencionada. Para obtener respuestas que caracterizaran al curso y evitar sesgos en las respuestas a la tarea se consideraron estudiantes que estaban en la media de rendimiento académico. De acuerdo con la información otorgada por la profesora del curso y de acuerdo con el programa curricular, estos estudiantes no contaban con experiencias previas en tareas relativas al pensamiento funcional. Sin embargo, contaban con experiencias en trabajos con tareas de patrones numéricos, cálculo de adición y sustracción tanto escrito como mental, y además presentaban facilidad para verbalizar sus respuestas a las tareas. Esto último fue un elemento clave, porque la principal fuente de información fue la representación verbal.

### Entrevista semiestructurada y tarea de investigación

Se diseñó una tarea que promueve el pensamiento funcional en estudiantes de educación primaria y estuvo dada por la función $f(x)=x+1$. Se ha considerado esta función como una forma de corroborar las estrategias que emplean los estudiantes cuando resuelven dichas tareas. Se planteó esta tarea de manera individual a cada uno de los cuatro estudiantes, en el contexto de una entrevista semiestructurada, en una sala de clase de su establecimiento. La entrevista no tuvo límite de tiempo, su duración fue de entre 20 y 30 minutos. La tarea se refiere a un contexto cercano a ellos, el crecimiento de los círculos del cuerpo de una oruga (variable dependiente) y la cantidad de días que transcurrían (variable independiente): *esta es la historia de una oruga que cuando pasa un día su cuerpo crece, de modo que cuando pasa un día la oruga tiene dos círculos en su cuerpo y cuando pasan dos días la oruga tiene tres círculos en su cuerpo.*

En la entrevista, luego de plantear el enunciado, se propusieron siete preguntas elaboradas siguiendo las orientaciones del razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007). Esto es que, a partir de preguntas sobre casos particulares pequeños, grandes y un caso general, se pretendía que los estudiantes llegaran a la generalización de la relación funcional. En la tabla 1 se detalla el tipo de caso y su descripción, preguntas planteadas y las estrategias y la representación esperada por parte del estudiante.

**Tabla 1.** Descripción de las preguntas de la tarea

| Tipo de caso | Descripción | Pregunta planteada | Estrategia y representación esperada |
|---|---|---|---|
| Caso pequeño consecutivo | Son aquellas preguntas en que se pide encontrar la cantidad de la variable dependiente en los primeros casos de la relación funcional. Se relacionan a un ámbito numérico pequeño de la relación funcional y a su vez consecutivos. | 1. Ahora cuando pasan tres días ¿Cuántos círculos tendrá en su cuerpo?<br>2. Cuando pasan cuatro días ¿Cuántos círculos tendrá la oruga en su cuerpo?<br>3. Cuando pasan cinco días ¿Cuántos círculos tendrá la oruga en su cuerpo? | Se espera que los estudiantes manifiesten estrategias de covariación y correspondencia, usando una representación verbal, concreta, pictórica y/o simbólica. |
| Caso pequeño no consecutivo | Son aquellas preguntas en que se pide encontrar la cantidad de la variable dependiente en los primeros casos de la relación funcional. Se relacionan a un ámbito numérico pequeño de la relación funcional y no son consecutivos. | 4. Ahora daremos un saltito. Cuando pasan diez días ¿Cuántos círculos tendrá la oruga en su cuerpo? | Se espera que los estudiantes manifiesten estrategias de correspondencia, usando una representación verbal, pictórica y/o simbólica. |
| Caso grande no consecutivo | Son aquellas preguntas en que se pide encontrar casos grandes y aislados en la relación funcional, los cuales requieren la identificación de un patrón (relación funcional). | 5. Cuando pasan 50 días ¿Cuántos círculos tendrá la oruga en su cuerpo?<br>6. Cuando pasan 100 días ¿Cuántos círculos tendrá la oruga en su cuerpo? | Se espera que los estudiantes manifiesten estrategias de correspondencia, usando una representación verbal o simbólicas. |
| Pregunta general | Es aquella pregunta que busca la generalidad de la relación funcional. | 7. Si no conocemos la cantidad de días que ha pasado ¿Cómo podemos saber cuántos círculos tendrá el cuerpo de la oruga? | Se espera que los estudiantes manifiesten la generalización de la relación funcional de correspondencia, usando una representación verbal o simbólica. |

Además, cada estudiante contó con material concreto que representaba a los círculos del cuerpo de la oruga, que, en caso de requerirlo, fueron utilizados al momento de responder las preguntas de la tarea. Es decir, cuando el estudiante requería representar los datos del problema, podía hacer uso del material concreto (figura 3).

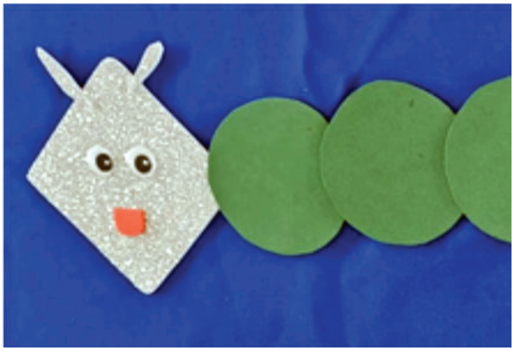

**Figura 3.** Material concreto usado en la tarea: círculos que representan el cuerpo de la oruga.

### Técnica de análisis y categorización

Para el análisis de la información empleamos la técnica del análisis de contenido (Fernández, 2002). Se hizo la transcripción de cada una de las entrevistas. Posteriormente, cada integrante del grupo de investigación analizó las transcripciones y fotografías de las producciones de los estudiantes, para determinar evidencia, o no, de pensamiento funcional en las respuestas a cada pregunta de la tarea. A continuación, el grupo consensuó el análisis individual realizado para establecer las categorías definitivas. Las categorías se establecieron a partir de: el marco conceptual de esta investigación (Blanton *et al.*, 2015; Cañadas y Molina, 2016; Morales *et al.*, 2023; Smith, 2008); los antecedentes que sugieren indagar sobre las relaciones funcionales y representaciones de estudiantes de primeras edades educativas como una forma de caracterizar el pensamiento funcional (Blanton *et al.*, 2011; Morales *et al.*, 2023; Pinto *et al.*, 2023; Smith, 2008); un análisis a priori de las respuestas de los estudiantes permitió consolidar las categorías de análisis en estrategias funcionales y no funcionales. Las categorías de análisis se muestran en la tabla 2.

**Tabla 2.** Descripción de categorías de análisis

| Categorías | Sub - categoría | Descripción |
|---|---|---|
| Estrategias | No funcionales | Sin evidencia de relación funcional: aplicación de operatoria sin relación entre cantidades.<br>Respuesta directa: responde de manera adecuada, pero sin justificar.<br>Patrón recursivo: sumar de uno en uno las cantidades de la variable dependiente, pero sin relación entre cantidades. |
| | Funcionales | Covariación: relación entre cómo la variación de la cantidad de la variable independiente afecta a la cantidad de la variable dependiente.<br>Correspondencia directa: sumar uno a la cantidad de la variable independiente.<br>Correspondencia inversa: Restar uno a la cantidad de la variable dependiente. |
| Generalización | Particulariza | Responde con un caso particular, por ejemplo: cuando pasan veinte días son veintiuno círculos en el cuerpo de la oruga, cuando pasan cincuenta días son cincuenta y un círculos en el cuerpo de la oruga. También se incluyen respuestas como: "porque los días aumentan en uno los círculos del cuerpo aumentan en uno también". |
| | Generaliza | Generalización de la correspondencia: cuando responde "siempre hay que sumar uno a la cantidad de días para obtener la cantidad de círculos" o indicios de esta respuesta.<br>Generalización de la covariación: cuando responde: "porque cambia la cantidad de días también cambia la cantidad de círculos en el cuerpo". |

## RESULTADOS

En primer lugar, se muestran resultados de los cuatro estudiantes a cada una de las siete preguntas de la tarea (tabla 3). Se asignó a cada estudiante un número para respetar su anonimato y distinguirlo de otros. Finalmente, se muestra una comparación del trabajo realizado por cada uno de los estudiantes de acuerdo a las trayectorias de estrategias usadas en las preguntas de tarea.

**Tabla 3.** Respuesta de los estudiantes por preguntas

| Estudiante (A) | Número de pregunta | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| A1 | Cv | Cv* | Cv | Pr/Cv | Cv | Crd | Cri* |
| A2 | Cv | Cv | Cv | Crd | Crd | Crd | Crd** |
| A3 | Cv | Rd | Cv* | Cv | Crd | Crd | Cv* |
| A4 | Pr | Cv | Cv | Crd | Crd | Crd | Crd** |

Nota: Cv = Relación covariación; Pr = Patrón recursivo; Rd = Respuesta directa; Crd = Correspondencia directa; Cri = Correspondencia inversa; * = generaliza; ** = particulariza

## *Pregunta 1*

En la tabla 3 se observa, que en la pregunta 1, tres estudiantes (A1, A2 y A3) utilizaron la estrategia de covariación. Estos estudiantes se centraron en la variación existente entre las cantidades de la variable independiente (cantidad de días) y su incidencia en las cantidades de la variable dependiente (cantidad de círculos de la oruga). Un ejemplo característico de esta estrategia fue la respuesta de A1, cuando se le preguntó por la cantidad de círculos que tendrá la oruga cuando han pasado tres días, respondió: "Cuatro [...], cada día se le agrega una pelotita". A partir de esta respuesta se observa una relación entre la cantidad de días con la cantidad de círculos (variable dependiente), es decir, por cada día que pasa se deberá agregar un círculo (pelotita).

En esta pregunta, A4 fue el único que utilizó la estrategia de patrón recursivo, respondió "Cuatro [...] iba como uno en uno (referenciando a las cantidades de la variable dependiente)". Este estudiante solo se enfocó en la relación existente entre las cantidades relativas a la variable dependiente que, en este caso, es sumar uno para hallar la cantidad siguiente.

### *Pregunta 2*

En cuanto a la pregunta 2, tres estudiantes (A1, A2 y A4) utilizaron la estrategia de relación funcional de covariación. Una respuesta representativa de esta estrategia fue la manifestada por A1, como se muestra en el siguiente fragmento de entrevista.

1. Entrevistadora (E): ¿Y por qué crees que son 5 círculos?
2. A1: Porque se le agrega uno y pasa otro día (anteriormente, se había preguntado por la cantidad de círculos de la oruga cuando pasan cuatro días).
3. E: ¿Quieres decir que si pasa otro día se le agrega uno?
4. A1: Sí.

Cómo se observa, A1 solo se enfocó en la relación existente entre las cantidades relativas a la variable independiente, esto es, aumenta la cantidad de días en uno y la cantidad de círculos del cuerpo también lo hace en uno (ver línea 2). Este estudiante mostró consistencia en su respuesta ya que en la pregunta anterior también había usado esta estrategia. Además, se confirma esta estrategia en la representación verbal y pictórica realizada en la guía, como se observa en la figura 4.

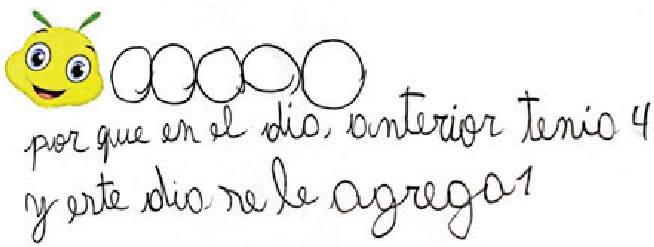


**Figura 4.** Representación pictórica y verbal estrategia covariación

Además, en la justificación de la respuesta de A1 se observa una generalización de la relación de covariación, cuando se le preguntó sobre la forma de hallar la cantidad de círculos de la oruga, respondió “Que crece una bolita cada día [...] va creciendo uno en uno al pasar los días”. A1 entiende que la cantidad de círculos dependerá de la variable independiente y, en este caso, si los días aumentan en uno, la cantidad de círculos también lo hace.

Finalmente, en esta pregunta se observa que solo uno de los cuatro estudiantes (A3) utilizó la estrategia de respuesta directa, respondió "cinco [...] tendrá cinco pelotitas", sin justificar su respuesta.

### *Pregunta 3*

Respecto a la pregunta 3, se observa que todos los estudiantes utilizaron la estrategia de covariación. Se destaca la respuesta de A3 porque generalizó esta relación funcional, cuando la entrevistadora le preguntó sobre cómo lo hizo, respondió: "ahora tiene 6 pelotitas porque cada día le agrego uno", dejando en evidencia que cuando las cantidades de la variable independiente aumentan en uno, las cantidades de la variable dependiente también lo hacen en uno.

### *Pregunta 4*

En esta pregunta se observan distintas estrategias manifestadas por los 4 estudiantes. Por ejemplo, se destacan las respuestas de A1 y A3 que emplearon la estrategia de covariación. Sin embargo, A1 empleó dos estrategias en esta pregunta, inicialmente, respondió con el patrón recursivo: "le agrego una pelota" (refiriéndose a la cantidad de la variable dependiente). Posteriormente, la entrevistadora le recordó que hay un salto de cinco a diez días y le repite la pregunta sobre la cantidad de círculos que tendrá la oruga, pasados diez días, A1 respondió nuevamente "del día cinco al llegar al diez [...] serían once". En esta respuesta se observa una estrategia de covariación, a partir de la variación de las cantidades de la variable independiente (diferencia entre cinco y diez), obtuvo la cantidad de la variable dependiente, en este caso once (sumó cinco a seis, que estuvo dado por la pregunta anterior).

Por su parte, A2 y A4 utilizaron la estrategia de correspondencia directa, siendo la primera vez que emergió esta estrategia. Un ejemplo característico de esta estrategia es el de A4, cuando justificó su respuesta de la siguiente manera: "le agregué uno entonces ahora que son diez días para mí son once [haciendo mención de los círculos de la oruga]". En la respuesta anterior se observa que A4 halló la cantidad de la variable dependiente con tan solo sumar uno a la cantidad de la variable independiente. Esta estrategia es relevante porque permite hallar todas las cantidades de la variable dependiente dadas las de la variable independiente.

***Pregunta 5***

En esta pregunta relativa a un caso particular grande no consecutivo, A1 fue el único que utilizó la estrategia de covariación, esto demuestra consistencia entre sus respuestas, ya que en las preguntas anteriores también la utilizó. A continuación, se muestra un fragmento de entrevista que evidencia la relación de covariación empleada.

5. E: Entonces ¿Cuántas esferas tendría en el día 50?
6. A1: 51 bolitas.
7. E: Ahora explícame cómo sabes que son 51 bolitas.
8. A1: porque cada día va creciendo una bolita más.

Mientras que, A2, A3 y A4 utilizaron la estrategia de correspondencia directa. Un ejemplo característico de esta estrategia fue la respuesta de A2, cuando la entrevistadora le preguntó por la cantidad de círculos que tendrá la oruga cuando hayan pasado cincuenta días, él respondió "tiene 1 círculo más [...] cincuenta y va a tener 1 más". Como se observa, para hallar la cantidad de círculos solicitados en la pregunta, le bastó solo con sumar uno a la cantidad de la variable independiente. Se destaca la consistencia en la respuesta de este estudiante pues en la pregunta anterior también respondió haciendo uso de esta estrategia. Así mismo se observa en la representación verbal y simbólica realizada en su ficha de trabajo (figura 5).

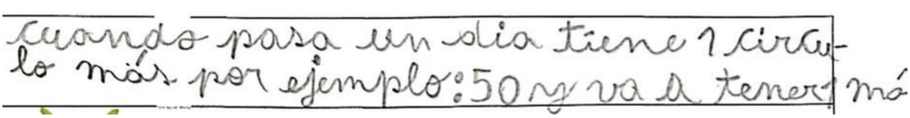


**Figura 5.** Estrategia de correspondencia directa usando la representación verbal y simbólica.

### *Pregunta 6*

En esta pregunta relativa a un caso particular grande no consecutivo, se observó que los cuatro estudiantes utilizaron la estrategia de correspondencia directa, esto quiere decir que cuando se les preguntó por la cantidad de círculos pasados cien días, respondieron que la cantidad de círculos es cien más uno, es decir, ciento uno. Por ejemplo, A4 respondió lo siguiente:

9. E: Ahora A1 la oruga llegó al día cien. ¿Cuántos círculos tendrá en su cuerpo si han pasado 100 días?
10. A4: Ciento uno.
11. E: Explica cómo lo sabes.
12. A4: Porque le agrego uno.

### *Pregunta 7*

En la pregunta que buscaba la generalización se observó que dos estudiantes (A1 y A3) generalizaron una relación funcional. A1 lo hizo a través de la estrategia de correspondencia inversa, tal como se observa en el siguiente fragmento de entrevista.

13. E: (...) Si no conocemos la cantidad de días que han pasado, ¿cómo podemos saber cuántos círculos tendrá el cuerpo de la oruga?
14. A1: Quitando la cantidad de círculos.
15. E: Pero, si no sabemos cuántos días son.
16. A1: Le quitamos una pelotita a la oruga y obtenemos el resultado.
17. E: ¿Y por qué ahora quitarías pelotitas si siempre agregas?
18. A1: Para saber el resultado de días que han pasado.

Como se observa en el fragmento anterior, A1 en lugar de justificar cómo se encuentra la cantidad de círculos cuando no se sabe la cantidad de días, lo hizo explicando la forma en que se halla la cantidad de días dada una cantidad indeterminada de círculos, tal como se observa en las líneas 16 y 18. Este estudiante entiende que para hallar la cantidad de días basta solo con quitar uno a la cantidad de círculos de la oruga.

Por su parte, A3 generalizó como se muestra en el siguiente fragmento de entrevista.

19. E: Si no sabemos cuántos días han pasado eso va a seguir, se le sigue agregando uno.
20. A3: Entonces pasa un día y se le agrega uno.
21. E: Ya ¿Se le agrega uno a qué entonces?
22. A3: A la oruga.
23. E: Pero, ¿con relación a qué?
24. A3: A los días.

En el fragmento anterior se observa que, frente a la pregunta general de la entrevistadora, A3 responde a través de la variación entre las cantidades variables. Esto es que cuando las cantidades de la variable independiente cambian en uno, las cantidades de la variable dependiente también lo hacen, tal como se observa en la línea 22. A3 entiende que un cambio en las cantidades de la variable independiente tiene una incidencia en las cantidades de la variable dependiente.

Por último, A2 y A4 solo particularizaron en la pregunta general. Ellos justificaron sus respuestas a través de un caso particular. Por ejemplo, cuando la entrevistadora les preguntó ¿cómo podemos saber cuántos círculos tendrá el cuerpo de la oruga? A2 mencionó “por ejemplo, si tenemos 100 días que pasaron tendremos 101 círculos [...] contando los círculos y si tiene 50 días va a tener 51 círculos”. Esta misma respuesta se muestra en la representación verbal que A2 escribió en la ficha (figura 6).

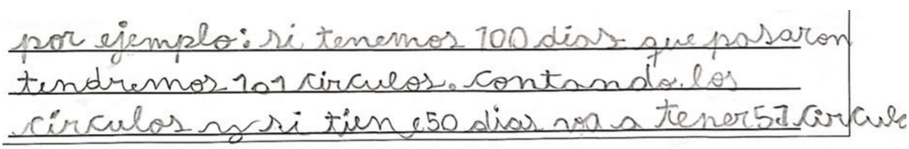


**Figura 6.** Respuesta usando la particularización.

Por su parte, A4, ante la misma pregunta, respondió "sumándole un círculo", pero no explicó a qué cantidad se le suma dicho círculo, la entrevistadora, para ahondar en su respuesta, le propuso diversos casos particulares, como se muestra en el siguiente fragmento de entrevista.

25. E: Por ejemplo, si yo tuviera 500, ¿cuántos círculos tendría la oruga?
26. A4: 501.
27. E: Y, ¿60?
28. A4: 61.

Se observa que, si bien A4 entendió que para hallar la cantidad de círculos del cuerpo de la oruga se suma uno a la cantidad de la variable independiente, requirió de casos particulares para dar cuenta de este proceso.

### Trayectoria de estrategias utilizadas por los estudiantes

A partir de la tabla 3 se diseñó la tabla 4 que aborda las trayectorias de estrategias empleadas por cada uno de los cuatro estudiantes en las preguntas de la tarea.

**Tabla 4.** Trayectoria de estrategias utilizadas

| Tipo de Trayectoria | Estudiante (estrategias) |
|---|---|
| 1 cambio estrategia | A2 (Cv - Crd) |
| 2 cambios estrategias | A4 (Pr - Cv - Crd) |
| 3 o más cambios estrategias | A1 (Cv - Pr/Cv - Crd - Cri)<br>A3 (Cv - Rd - Cv - Crd - Cv) |

Nota: Cv = Relación covariación; Pr = Patrón recursivo; Rd = Respuesta directa; Crd = Correspondencia directa; Cri = Correspondencia inversa.

A nivel grupal se observa la flexibilidad que manifiestan los estudiantes al resolver la tarea propuesta en este estudio, dejando en evidencia que no hay una única forma de abordarla, dado que los estudiantes usaron distintos enfoques para su resolución.

A nivel individual, se observa que A2 fue el que realizó solo un cambio de estrategia, dado que pasó de la relación de covariación a la de correspondencia directa. Por su parte, A4 empleó dos cambios de estrategias, inicialmente evidenció un patrón recursivo, pasando a una covariación y finalizando con una relación de correspondencia directa. Finalmente, se observó que dos estudiantes, A1 y A3, realizaron cuatro cambios de estrategia. A1 inició con una covariación, siguió con un patrón recursivo y una covariación, ambas en la misma pregunta (tabla 3), posteriormente, cambió a la estrategia de correspondencia directa, finalizando con una correspondencia inversa. Por su parte, A3 comenzó con la estrategia de covariación, a continuación, manifestó una respuesta directa (sin evidenciar relación funcional), seguidamente volvió a utilizar la covariación, posteriormente utilizó la estrategia de correspondencia directa y finalizó con una covariación.

## DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

A la luz de los resultados obtenidos, se pone de manifiesto que estudiantes de tercero de Educación Primaria (8 a 9 años) evidencian estrategias relacionadas con el pensamiento funcional, tales como la covariación y la correspondencia. Este hallazgo es destacable porque implica que estudiantes de estas edades son capaces de involucrarse en tareas asociadas al concepto de función, contenido crítico en la enseñanza del álgebra escolar (Brizuela *et al.*, 2015; Cañadas y Molina, 2016). Se observa que todos los estudiantes manifestaron ambas estrategias funcionales centradas en la covariación y la correspondencia directa. Lo anterior confirma los hallazgos sobre el pensamiento funcional en estudiantes de Educación Primaria de investigaciones previas, en contextos internacionales y en el contexto chileno (p. ej., Pinto *et al.*, 2023),. Lo que pone de relieve la capacidad de estudiantes de edades tempranas para responder satisfactoriamente a una tarea de funciones (p. ej., Cañadas *et al.*, 2016; Morales *et al.*., 2018; Pinto y Cañadas, 2018; Torres *et al.*, 2021).

Con respecto a la trayectoria de estrategias utilizadas por los cuatro estudiantes durante la tarea, se observó que todos ellos hicieron cambios en sus estrategias iniciales (tabla 4). Se destaca que A4 a pesar que comenzó la tarea con una estrategia no funcional (patrón recursivo), posteriormente logró emplear estrategias centradas en la relación funcional de covariación y correspondencia. A su vez, los estudiantes A2, A3 y A4 iniciaron la tarea con la estrategia funcional de covariación e hicieron el cambio a una estrategia de correspondencia directa. Esta situación se podría explicar porque, en las primeras preguntas, al estar compuestas por casos consecutivos, pudieron incidir las expresiones "los días aumentan en uno por tanto los círculos aumentan en uno también" (covariación) o "sumar uno" (patrón recursivo). En las preguntas de casos particulares no consecutivos y grandes (de la pregunta 5 en adelante) los cuatro estudiantes cambiaron a la estrategia de correspondencia directa. El resultado anterior es relevante porque, por un lado, la forma en que se presentaron las preguntas de la tarea supone en los estudiantes un cambio de estrategia importante para abordarla. Por otro lado, una tarea de pensamiento funcional puede ser abordada desde diferentes estrategias funcionales como la covariación y correspondencia. Resultados similares a los anteriores se encuentran en Morales *et al.* (2018), cuando estudiantes de Educación Primaria abordan una tarea de pensamiento funcional desde la correspondencia y la covariación. En cuanto a la generalización, se observó que los estudiantes lo hicieron a través de las estrategias funcionales de covariación y correspondencia inversa. Este resultado resulta interesante porque los antecedentes de investigación sugieren que en una tarea de pensamiento funcional la estrategia más factible a ser generalizada es la correspondencia en lugar de la covariación (Morales *et al.*, 2018; Pinto y Cañada, 2018). Por su parte, hubo estudiantes (A2 y A3, tabla 3) que generalizaron la relación de covariación de manera espontánea, misma modalidad que se observa en el trabajo de Pinto y Cañada (2018), pero con la relación de correspondencia. Esto sugiere que puede haber estudiantes de estas edades que pueden llegar a la generalización de una relación funcional sin la necesidad de inducir dicho proceso. Si bien, hubo estudiantes (A2 y A4) que particularizaron en lugar de generalizar la relación funcional implicada en la tarea, creemos que ellos podrían hacerlo con un poco más de orientación por parte de la entrevistadora, dado que descubrieron la regularidad de sumar uno a la cantidad de la variable independiente, aunque solo en casos particulares. Lo anterior, sugiere que la generalización tal cual se propone no es una tarea fácil para algunos estudiantes y que requiere trabajo importante desde la instrucción.

Una línea de continuidad que permitiría describir el proceso de generalización de estudiantes de estas edades, sería profundizar en la forma en que logran pasar de la generalización aritmética a la generalización algebraica. En términos de Torres *et al.* (2023), lo anterior ocurre porque la forma de generalizar algebraica dio cuenta de la generalización aritmética realizada. Sería interesante generar instancias para que los estudiantes pasen de expresar "sumando uno" a la expresión "siempre se debe sumar uno".

Los resultados de este trabajo coinciden con los planteamientos de Blanton y Kaput (2005) quienes defienden que la evidencia de la capacidad de los estudiantes respecto al pensamiento funcional, puede responder a las preguntas sobre ¿cómo el pensamiento funcional podría incorporarse en el programa de estudio de matemática? y ¿cuáles serían las estrategias más adecuadas para tal fin en los primeros niveles educativos? Sin embargo, estas interrogantes suponen un desafío importante tanto para la continuación de la investigación en pensamiento funcional, como para la enseñanza del álgebra escolar.

De acuerdo con los resultados de esta investigación, se considera que actividades que promueven el pensamiento algebraico en edades tempranas, pueden ser un recurso que guíe a los profesores de Educación Primaria para favorecer este tipo de pensamiento en sus estudiantes. Por ejemplo, el profesor podría abordar situaciones centradas en las relaciones entre cantidades usando el razonamiento inductivo (Cañadas y Castro, 2007), como una forma de lograr la generalización a partir de casos particulares. Al considerar tareas de este tipo, se podrían ampliar aquellos enfoques con los cuales se acostumbra a promover el pensamiento algebraico en Educación Primaria, dado que, por lo general a nivel curricular, la enseñanza del álgebra está centrada solo en el estudio de patrones, ecuaciones e inecuaciones, relegando el trabajo sobre la generalización de relaciones funcionales a niveles educativos más avanzados (Morales y Parra, 2022).

Esta investigación busca contribuir a la caracterización del pensamiento funcional en edades tempranas a partir de la categorización de las estrategias que se evidenciaron en las producciones de los estudiantes. De esta manera, se aporta al cuerpo de conocimiento existente sobre el pensamiento funcional con el interés de que en un futuro próximo tenga una implicación curricular y sea un contenido protagonista en la promoción del álgebra escolar.

Finalmente, si bien se realizó un análisis detallado de las producciones de cuatro estudiantes, en futuras investigaciones se podría ampliar la cantidad de estudiantes para confirmar y profundizar en los resultados de este trabajo, considerando estudios cuantitativos y muestras probabilísticas. También, se podría abordar la tarea aquí presentada en una situación real de clases para indagar sobre las producciones de los estudiantes en contextos educativos habituales y el papel del profesor al orientar el proceso de generalización. Por otro lado, sería provechoso abordar estudios sobre el conocimiento didáctico-matemático en pensamiento funcional de profesores de Educación Primaria en formación y en activo, como una forma de detectar competencias para la promoción del álgebra escolar en niveles escolares tempranos.

## REFERENCIAS

Azcárate, C., y Deulofeu, J. (1990). *Funciones y gráficas*. Síntesis.
Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Heinemann.
Blanton, M.L., Brizuela, B.M., Gardiner, A., Sawrey, K., y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-years-olds´thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(5), 511-558. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.5.0511
Blanton, M., y Kaput, J. (2005). *Helping elementary teachers build mathematical generality into curriculum and instruction. ZDM, 37*(1), 34-42.
Blanton, M., Levi, L., Crites, T., y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. National Council of Teachers of Mathematics.
Brizuela, B.M., Blanton, M., Sawrey, K., Newman-Owens, A.M., y Gardiner, A. (2015). Children´s use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas. *Mathematical Thinking and Learning, 17*, 1-30. https://doi.org/10.1080/10986065.2015.981939
Cañadas, M.C., y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: Un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). SEIEM.
Cañadas, M.C., y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J.L. Lupiáñez, J.F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), La noción de estructura en early algebra 139 *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares.
Cañadas, M. C., Brizuela, B., y Blanton, M (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematics Behavior, 41*, 87-103.
Cañadas, M.C., Molina, M., y del Río, A. (2018). Meanings given to algebraic symbolism in problem posing. *Educational Studies in Mathematics, 98*, 19-37.
Cañadas, M.C., y Figueiras, L. (2011). Uso de representaciones y generalización de la regla del producto. *Infancia y Aprendizaje, 34*(4), 409-425.
Cañadas, M.C., y Castro, E. (2007). A proposal of categorization for analyzing inductive reasoning, *PNA, 1*(2), 67-78.
Castro, E., y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización [Representations and modeling]. En L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95-124). Horsori.

Confrey, J., y Smith, E. (1991). A framework for functions: Prototypes, multiple representations, and transformations, En R.G. Underhill (Ed.), *Proceedings of the 13th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 57-63). Conference Committee.

Fernández, S.P. (2002). Investigación cuantitativa y cualitativa. *Cuadernos de atención primaria, 9*(2), 76-78.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación.* McGraw-Hill.

Kaput, J.J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J.J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J.J. Kaput, D.W. Carraher y M.L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). Routledge.

Kaput, J.J. (1998). *Teaching and learning a new algebra with understanding.* National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-62). Information Age Publishing.

Lins, R., y Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI study conference: The future of the teaching and learning of algebra* (pp. 47-70). Kluwer.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Kluwer. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_5

Mason, J. (1999). La incitación al estudiante para que use su capacidad natural de expresar generalidad: las secuencias de Tunja. *Revista EMA, 4*(3), 232-246.

Medrano, A., Xolocotzin, U., y Flores-Macías, R. (2022). Un análisis de la producción de representaciones al solucionar problemas de álgebra temprana en estudiantes de primaria. *Educación Matemática, 34*(3), 10-41.

Merino, E., Cañadas, M.C., y Molina, M. (2013). Estrategias utilizadas por alumnos de primaria en una tarea de generalización basada en un ejemplo genérico. En A. Berciano, A. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 383-392). SEIEM.

MINEDUC (2012). *Bases curriculares de matemática educación básica*. Unidad de Currículum y Evaluación.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA, 3*(3), 135-156.

Molina, M. (2014). Traducción del simbolismo algebraico al lenguaje verbal: indagando en la comprensión de estudiantes de diferentes niveles educativos. *Gaceta de la RSME, 17*(3), 559-579.

Monje, C.A. (2011). *Metodología de la investigación cuantitativa y cualitativa: Guía didáctica*. Universidad Surcolombiana, Facultad de Ciencias Sociales y Humanas.

Morales, R., y Parra, J. (2022). Strategies employing prospective Primary Education teachers in a functional relationship task. *Acta Scientiae, 24*(3), 32-62. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6959

Morales, R., Cañadas, M.C., Brizuela, B.M., y Gómez, P. (2016). Relaciones funcionales identificadas por estudiantes de primero de educación primaria y estrategias de resolución de problemas que involucran funciones lineales. En J.A. Macías, A. Jiménez, J.L. González, M.T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F.J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 365-375). SEIEM.

Morales, R., Cañadas, M.C., Brizuela, B.M., y Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de Educación Primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las Ciencias, 36*(3), 59-78. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2472

Morales, R., Pizarro, F., Díaz-Levicoy, D., y García-García, J.I. (2023). Strategies and representations used by early childhood education students in a functional thinking task: A case study. *EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education, 19*(12), em2363.

Pinto, E., Ayala-Altamirano, C., Molina, M., y Cañadas, M. C. (2023). Desarrollo del pensamiento algebraico a través de la justificación en educación primaria. *Enseñanza de las Ciencias, 41*(1), 149-173. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5835

Pinto, E., Brizuela, B.M., y Cañadas, M.C. (2019). Representational variation among elementary school students: A study within a functional approach to Early algebra. En U.T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, y M. Veldhuis (Eds.), *The Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Freudenthal Group and Freudenthal Institute, Utrecht University y ERME.

Pinto, E., y Cañadas, M. C. (2018). Generalization in fifth graders within a functional approach. *PNA, 12*(3), 173-184. https://doi.org/10.30827/pna.v12i3.6643

Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA. *PNA, 1*(2), 47-66.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA,4*(1), 1-14.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J.J. Kaput, D.W. Carraher, y M.L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-160). Lawrence Erlbaum Associates.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de las investigaciones. *Números, 77,* 5-34.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Morata.

Stephens, A., Isler, I., Marum, T., Blanton, M., Knuth, E., y Gardiner, A. (2012). From recursive pattern to correspondence rule: Developing students' abilities to engage in functional thinking, en L. R. Van Zoest, J. J. Lo y J. L. Kratky (Eds.), 34th Annual Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. PME.

Tanışlı, D. (2011). Functional thinking ways in relation to linear function tables of elementary school students. *The Journal of Mathematical Behavior, 30*(3), 206-223. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.08.001

Torres, M.D., Cañadas, M.C., y Moreno, A. (2022). Pensamiento funcional de estudiantes de 2º de primaria: estructuras y representaciones. *PNA, 16*(3), 215-236. https://doi.org/10.30827/pna.v16i3.23637

Torres, M.D., Cañadas, M.C., Moreno, A., y Gómez, P. (2021). Estructuras en las formas directa e inversa de una función por estudiantes de 7-8 años. *Uniciencia, 35*(2), 237-252. https://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.16

Torres, M.D., Moreno, A., Vergel, R., y Cañadas, M.C. (2023). The evolution from "I think it plus three" Towards "I think it is always plus three." Transition from arithmetic generalization to algebraic generalization. *International Journal of Science and Mathematics Education, 22*, 971-991. https://doi.org/10.1007/s10763-023-10414-6

Ureña, J., Ramirez, R., y Molina, M. (2019). Representations of the generalization of a functional relationship and the relation with the interviewer 's mediation. *Infancia Aprendizaje, 42*(3), 1-21. https://doi.org/10.1080/02103702

Warren, E., y Cooper, T.J. (2006). Using repeating patterns to explore functional thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom, 11*(1), 9-14.

Autor de correspondencia

Rodolfo Morales

**Dirección:** Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad Católica del Maule,
Avda. San Miguel 3605, Talca, Chile
rmoralesm@ucm.cl