 https://doi.org/10.24844/EM3702.05

La construcción mental de funciones exponenciales usando multiplicación repetida

The construction of exponential functions by secondary school students using repeated multiplication

Tomás Díaz-Berríos,[1] Rafael Martínez-Planell[2]

Resumen: Usamos la teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema) para analizar cómo estudiantes que cursan estudios de escuela superior (15-16 años) pueden construir función exponencial basándose en multiplicación repetida. En un ciclo de investigación previo, se propuso un modelo de construcciones mentales que un estudiante podría hacer para entender estas funciones. En este segundo ciclo de investigación ponemos a prueba el modelo. El modelo se utilizó para diseñar materiales didácticos que fomentaran las construcciones propuestas. Los materiales se implementaron en un curso preparatorio al cálculo. Se obtuvieron datos del trabajo colaborativo de los estudiantes a lo largo del semestre y de entrevistas semiestructuradas con ocho estudiantes. Los resultados muestran que los estudiantes de este segundo ciclo de investigación lograron hacer la mayor parte de las construcciones propuestas en el modelo. Este estudio pretende contribuir a entender cómo los estudiantes pueden construir su entendimiento de las funciones exponenciales.

Palabras claves: *APOE, función exponencial, descomposición genética, exponentes racionales, función.*

Fecha de recepción: 8 de febrero de 2024. **Fecha de aceptación:** 27 de marzo de 2025.

[1] Escuela Superior José Rojas Cortés, Oficina Regional Educativa de Bayamón, Departamento de Educación de Puerto Rico, tomasmat301@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-5046-014X

[2] Departamento de Ciencias Matemáticas, Universidad de Puerto Rico, Mayaguez, Puerto Rico, rmplanell@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-5512-8405

Abstract: We use Action-Process-Object-Schema (APOS) theory to study how high school students (15-16 years old) may construct exponential functions based on repeated multiplication. In a previous research cycle, a model of mental constructions a student may use to understand these functions was proposed. In this second research cycle, we test the model. The model was used to design didactical materials that foment the proposed constructions. The materials were implemented in a precalculus course. Data was obtained from students' collaborative work throughout the semester and from semi-structured interviews with eight students. The results show that students in this second research cycle could do most of the constructions proposed in the model, thereby improving the results of the first cycle. This study contributes to understanding how students may construct exponential functions.

Keywords: *APOS theory, exponential function, genetic decomposition, rational exponents, function.*

1. INTRODUCCIÓN

Las funciones exponenciales son una familia de funciones de gran importancia en la ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas, se pueden usar para modelar cantidades cuya tasa de cambio instantáneo es proporcional a la cantidad presente en ese momento. Como esto sucede con alguna frecuencia en la naturaleza, esto convierte a estas funciones en herramientas útiles para modelar una amplia gama de fenómenos de crecimiento y decrecimiento de diversas cantidades. Sin embargo, los estudiantes muestran dificultades cuando tratan con este tipo de función (Borji *et al.*, 2023; Confrey y Smith, 1994, 1995; Díaz-Berríos y Martínez-Planell, 2022; Ellis *et al.*, 2015, 2016; Ferrari-Escolá *et al.*, 2016; Weber, 2002). Hay varias posibles razones para estas dificultades. Entre ellas, no se está prestando suficiente atención a la covariación entre la sucesión aditiva de exponentes y la sucesión multiplicativa de potencias (Confrey y Smith, 1994, 1995); no se está ayudando a que los estudiantes construyan las propiedades de exponentes como un proceso donde puedan imaginarlas y justificarlas sin depender de la memorización (Ferrari-Escolá *et al.*, 2016; Weber, 2002); contrario a lo que a veces se asume, los estudiantes inicialmente no relacionan la multiplicación repetida con la exponenciación (Díaz-Berríos y Martínez-Planell, 2022); y no se está sacando provecho a los contextos de aplicaciones o de la vida real para introducir las funciones exponenciales (Borji *et al.*, 2023; Ellis *et al.*, 2015, 2016). En este estudio se ampliaron y mejoraron las construcciones teóricas establecidas por Weber (2002), y se adaptó el acercamiento sugerido por Ferrari-Escolá *et al.* (2016) y Díaz-Berríos y Martínez-Planell (2022). También se tuvieron en cuenta los resultados aportados por Ellis *et al.* (2015, 2016) en el diseño de los materiales.

El objetivo de este estudio es proponer y poner a prueba un modelo de construcciones mentales (descomposición genética) de cómo los estudiantes pueden llegar a entender funciones exponenciales. El modelo se pone a prueba diseñando e implementando actividades para ayudar a que los estudiantes hagan las construcciones propuestas, y luego entrevistandolos para ver el efecto de las actividades en su entendimiento de función exponencial. Se estudia las construcciones que los estudiantes pueden hacer, las que le causan dificultad, y si el modelo permite describir adecuadamente el trabajo de los estudiantes. Como resultado, el modelo se puede aceptar, refinar, o descartar.

Este estudio puede considerarse como un segundo ciclo de investigación basado en el primer ciclo de Díaz-Berríos y Martínez-Planell (2022). En ese primer ciclo, los autores mostraron que dos de 16 estudiantes participantes evidenciaron construir su entendimiento (en el sentido de construir un Proceso o un Objeto, como definido más adelante en términos de APOE) de función exponencial en los enteros, pero ninguno lo extendió a los racionales debido a que no tenían un Objeto de potencia fraccionaria unitaria, o sea, no daban sentido a la potencia $1/n$ para enteros positivos n. El trabajo de esos estudiantes, así como los retos a los que se enfrentaron permitieron proponer un modelo (descomposición genética) de construcciones mentales que un estudiante podría hacer para entender funciones exponenciales utilizando multiplicación repetida. El modelo se puso a prueba en el estudio presente. Demostramos que usando esa descomposición genética como guía y rediseñando las actividades y materiales pedagógicos, se pudo ayudar a que los ocho estudiantes participantes lograsen construir su entendimiento de función exponencial en los enteros y cuatro de ellos lo extendieran a los racionales.

2. REVISIÓN DE LITERATURA

Confrey y Smith (1995) utilizaron la operación que llaman subdivisión ("splitting") y la perspectiva de covariación de funciones para argumentar que la yuxtaposición de secuencias aditivas y multiplicativas puede conducir a un enfoque eficaz de funciones exponenciales. Discuten la "interpolación en los mundos de contar y subdividir" [nuestra traducción] para extender funciones exponenciales de los enteros positivos a los números racionales. Sus propuestas se reflejan en varios estudios posteriores que sugirieron la construcción de función exponencial a partir del razonamiento covariacional discreto y acercándose al razonamiento covariacional continuo, a medida que el conjunto de exponentes se vuelve denso en la recta real. Nuestro estudio sigue el mismo patrón. En un estudio de este tipo, Weber (2002) observó la necesidad de ayudar a los estudiantes a pensar en la exponenciación como un proceso. Luego usó actividades para que los estudiantes pensaran en b^x como x factores de b. Afirmó que esto ayudó a los estudiantes a pensar en el proceso de exponenciación como un objeto sobre el que se podía actuar, como puede ocurrir, por ejemplo, cuando los estudiantes dan sentido o reconstruyen las reglas de los exponentes. Sin embargo, no discutió en detalle la extensión de funciones exponenciales a exponentes racionales. En este estudio hacemos esa extensión a los exponentes racionales.

Ferrari-Escolá *et al.* (2016) también se basaron en las ideas de Confrey y Smith (1995) y Weber (2002) para diseñar actividades que ayuden a los estudiantes a yuxtaponer una secuencia aditiva de entradas (exponentes: $1, 2, ..., n, ...$) y una secuencia multiplicativa de salidas (potencias de una base dada: b^1, b^2,..., b^n, ...) y pensar en la exponenciación como un proceso. Ferrari-Escolá *et al.* (2016) utilizaron conjuntos de fichas de la forma $(n|y)$[3] donde n es un número entero positivo y $y = 2^n$, y donde y o n podría faltar y pidieron a los estudiantes que los ordenaran, encontraran las fichas o partes de las fichas faltantes, así como una operación entre pares de fichas que darían como resultado otra ficha del conjunto. Inspirándose en el desarrollo histórico de los logaritmos, también sugirieron que los estudiantes pueden descubrir la operación de multiplicar (la parte superior de dos fichas cualesquiera $(n|y)$) sumando (la parte inferior de las fichas) y dividir restando, que dan sentido a las reglas de las funciones exponenciales y logarítmicas,

[3] Usaremos la notación $(n \mid y)$ para referirnos a una ficha de la forma $\boxed{\begin{smallmatrix} y \\ n \end{smallmatrix}}$ donde n es un exponente entero positivo y y es una potencia que puede ser (pero no está) escrita en la forma b^n, para alguna base b. Por ejemplo, (3 | 8) es una ficha en el juego base 2.

sin que el estudiante tenga que depender de la memoria. Sin embargo, no usaron estos materiales para extender funciones exponenciales a los números racionales, algo que hacemos en nuestro estudio.

En vez de abordar las funciones exponenciales desde el punto de vista de la covariación discreta, Ellis *et al.* (2015, 2016) utilizaron el contexto de una planta que aumenta su altura exponencialmente con el tiempo para que los estudiantes perciban el crecimiento como continuo. Basándose en la intuición de crecimiento continuo de los estudiantes, estos autores proponen una trayectoria hipotética de aprendizaje para el crecimiento exponencial y observar etapas clave en el desarrollo de la comprensión del crecimiento exponencial en términos de covariación continua. Evitan el acercamiento al crecimiento exponencial como multiplicación repetida. En nuestro estudio exploramos la coordinación de ambos puntos de vista, las fichas de Ferrari-Escolá *et al.* (2016) basadas en la multiplicación repetida y el de crecimiento continuo de Ellis *et al.* (2015).

Borji *et al.* (2023) también se basaron en las ideas de Ellis *et al.* (2015) y Kuper y Carlson (2020) y utilizaron actividades de aprendizaje con problemas del mundo real para examinar la comprensión de estudiantes universitarios (futuros maestros de matemáticas de nivel preuniversitario) de expresiones exponenciales y logarítmicas. Borji *et al.* (2023), plantearon que la mayoría de los estudiantes tienen una comprensión procedimental de conceptos exponenciales y logarítmicos y argumentaron que la enseñanza de estas funciones presta poca atención a situaciones contextuales. En su estudio, una entrevista de entrada reflejó que los estudiantes no entendían los exponentes y logaritmos aplicados a situaciones contextuales. Para mejorar la comprensión de los estudiantes diseñaron actividades que involucraban problemas contextuales acompañados de lenguaje de n-plicar ("n-tupling"). Una entrevista de salida reflejó que las actividades de aprendizaje contribuyeron a un mejor entendimiento de los estudiantes. Como ellos, nuestro estudio también usa situaciones en contexto para mejorar el entendimiento de los estudiantes. Contrario a ellos, evitamos el lenguaje de n-plicar para basarnos en multiplicación repetida.

En este estudio, al igual que Confrey y Smith (1994, 1995), Weber (2002), y Ferrari-Escolá *et al.* (2016), inicialmente enfatizamos la covariación discreta haciendo que los estudiantes relacionen la secuencia aritmética de exponentes con una secuencia geométrica correspondiente de potencias de una base dada. Para ello, el proyecto utilizó materiales didácticos (fichas) para definir funciones exponenciales sobre los números naturales, extender a cero y luego a los enteros negativos. Sin embargo, a diferencia de Weber (2002) y Ferrari-Escolá *et al.* (2016), también se extienden funciones exponenciales a los números racionales.

3. MARCO TEÓRICO

La teoría utilizada en esta investigación es la teoría Acción-Proceso-Objeto-Esquema (APOE). Para más detalles puede consultar Arnon *et al.* (2014) o Dubinsky y McDonald (2001). Elegimos la teoría APOE en este estudio ya que se utilizó en el estudio sobre el cual basamos nuestra investigación (Díaz-Berríos y Martínez-Planell, 2022). APOE se ha usado con éxito para estudiar la construcción del conocimiento en múltiples tópicos de matemáticas y a diferentes niveles (Arnon *et al.*,, 2014) es una teoría cognitiva y, como tal, tiene sus limitaciones. APOE no pretende modelar otros aspectos importantes como los aspectos institucionales o afectivos de los estudiantes.

En APOE, una Acción es una transformación de un objeto matemático que se percibe como externa. Esto es en el sentido de que la Acción está relativamente aislada de otros conocimientos matemáticos del individuo, de forma tal que éste no va a poder justificar la Acción o discutirla en términos generales. Una Acción puede ser llevar a cabo un procedimiento de forma rígida siguiendo paso a paso instrucciones explícitas o memorizadas. Por ejemplo, un estudiante que ha memorizado que un número como $27^{\frac{1}{5}}$ puede escribirse como $\sqrt[5]{27}$ y de ahí puede computarlo con una calculadora, pero no sabe que éste es un número que multiplicado por sí mismo cinco veces produce el número 27, está pensando en los exponentes fraccionarios unitarios como una Acción. Un estudiante que multiplica repetidamente un número por sí mismo sin darse cuenta que el número de veces que multiplica es un exponente, está pensando en multiplicación repetida como una Acción. Un estudiante que ha memorizado para qué valores de A y de b la función $f(x) = Ab^x$ es creciente o decreciente pero que no puede justificarlo, está pensando en función exponencial como una Acción. Frecuentemente las acciones se evidencian cuando los estudiantes se basan en ejemplos y cálculos específicos y no dan muestra de poder discutir la noción de interés en términos generales.

Cuando se repite una Acción y el individuo reflexiona sobre ella, puede que sea interiorizada en un Proceso. En este caso, el individuo puede pensar en realizar el mismo tipo de Acción, pero ya sin la necesidad de estímulos externos. Un Proceso permite que el estudiante imagine la transformación matemática sin tener que llevarla a cabo explícitamente, puede omitir pasos, anticipar resultados y, por ende, generar una imagen dinámica del Proceso. Un Proceso implica que se han hecho conexiones significativas con otros conocimientos matemáticos y, como consecuencia, el estudiante puede justificarlo o discutirlo en términos generales. Percibir una transformación como independiente de representación, es consistente con pensar en la transformación como un Proceso. Diferentes Procesos se pueden coordinar y/o revertir para formar nuevos Procesos. Algunos ejemplos de Proceso son: un estudiante con una concepción de Proceso de la exponenciación puede imaginar que la multiplicación de un número A repetidamente por un número b produce números de la forma Ab^n, puede imaginar dinámicamente que n aumenta en uno con cada multiplicación sucesiva sin necesitar hacer esto explícitamente y, podrá anticipar y justificar que Ab^n multiplicado por b^m es igual a Ab^{n+m} para cualquier enteros positivos n y m; con un Proceso de función exponencial podrá imaginar las características de la función $f(x) = Ab^x$ sin tener que llevar a cabo cómputos explícitos; un estudiante con una concepción de Proceso de exponenciación racional podrá pensar en una potencia racional, digamos $32^{\frac{3}{5}}$, en términos de multiplicación repetida: un número que multiplicado por sí mismo 5 veces produce 32 que también se multiplica por sí mismo 3 veces, y más generalmente ser capaz de dar sentido a las potencias racionales $a^{\frac{n}{m}}$ de esta manera, no simplemente como símbolos sin sentido.

Cuando un individuo puede pensar en el Proceso como una entidad en sí misma, una totalidad, y puede realizar o imaginar realizar Acciones sobre la totalidad, entonces se dice que el Proceso ha sido encapsulado en un Objeto. Un Objeto puede ser desencapsulado en el Proceso del que proviene, según sea necesario en un problema dado. Lo importante de un Objeto es que el individuo puede realizar Acciones sobre el Objeto. Algunos ejemplos de Objeto son: un estudiante necesitaría tener una concepción de Objeto de exponenciación (que se puede desencapsular para dar sentido a las potencias individuales) y pensar en cada expresión exponencial b^x como un número, una totalidad, antes de poder hacer Acciones sobre exponenciación para construir la noción de función exponencial $f(x) = b^x$; otro ejemplo: un estudiante deberá tener una concepción de Objeto de función para construir la composición de funciones (esto envuelve la desencapsulación de dos Objetos de función f y g, y la coordinación de los Procesos resultantes (ver detalles en Arnon *et al.*, 2014, p. 23-24) o antes de poder revertir un Proceso f (desencapsulado) para construir la función inversa f^{-1}.

Un Esquema para un cierto concepto matemático es una colección coherente de Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas que están vinculados por algunos principios generales para formar un marco en la mente del individuo que se puede aplicar a una situación problemática que involucra ese concepto.

En este estudio no haremos uso explícito de Esquemas porque el fenómeno didáctico de interés se puede modelar con la parte APO de la teoría.

El paso de la Acción al Proceso al Objeto puede parecer una progresión donde puede haber avances y retrocesos a medida que el individuo lucha por asimilar nuevas situaciones a las estructuras mentales existentes (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) o acomodar las estructuras mentales para dar cuenta de situaciones nuevas. Lo que dice APOE es que la tendencia general del individuo cuando trabaja en diferentes problemas que involucran una noción matemática específica será diferente, dependiendo de si el individuo piensa en la noción como una Acción, un Proceso o un Objeto.

Otra idea importante en APOE es la de descomposición genética (DG). Una DG es un modelo de cómo un estudiante puede construir una noción matemática específica, expresada en términos de las estructuras (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) y mecanismos (interiorización, coordinación, inversión, encapsulación, desencapsulación, ...) de APOE. Diferentes investigadores o incluso el mismo investigador pueden proponer diferentes descomposiciones genéticas para una misma noción. La DG no pretende ser la "mejor manera" en que un estudiante puede llegar a entender una noción matemática en particular. Una DG es esencialmente una hipótesis inicial que puede cambiar dependiendo de los resultados del estudio.

La investigación en APOE generalmente comienza proponiendo una DG basada en la noción matemática en sí, su historia, la experiencia docente del investigador, y cualquier dato disponible, incluida la literatura de investigación. Se diseñan materiales didácticos para ayudar a los estudiantes a realizar las construcciones propuestas en la DG. Luego, se obtienen datos de los estudiantes. Los datos pueden sugerir construcciones mentales (en términos de las estructuras de APOE) que los estudiantes hacen fácilmente (para que se les pueda quitar el énfasis en la DG), construcciones que los estudiantes encuentran difíciles (por lo que deben detallarse más en la DG), y construcciones inesperadas (que deben tenerse en cuenta en una futura DG). Los datos que se obtienen de una investigación sugieren cómo revisar la DG y los materiales didácticos. La DG revisada se puede utilizar en ciclos de investigación posteriores, y los ciclos de investigación se pueden realizar hasta obtener una DG que ya no amerite ser revisada. En ese momento, la DG describirá cómo la mayoría de los estudiantes construyen Procesos u Objetos de la noción matemática específica que se esté considerando.

En APOE se utiliza una estrategia pedagógica llamada ciclo ACE para fomentar la reflexión. Las actividades "A" diseñadas para fomentar las construcciones propuestas en la DG se hacen colaborativamente en grupos de tres o cuatro estudiantes; hay discusiones en el pleno de la clase "**C**" para considerar soluciones de los grupos de estudiantes, dificultades comunes, o aspectos que el instructor quiera enfatizar; y ejercicios "**E**" para hacer en el hogar.

Las preguntas de investigación de este estudio son:

1) La descomposición genética que se propone en el estudio (que se detalla en la próxima sección), ¿qué tan bien describe cómo los estudiantes entienden[4] la función exponencial?
2) De las construcciones mentales conjeturadas en la descomposición genética de función exponencial, ¿cuáles son las construcciones que estudiantes preuniversitarios dan muestra de poder hacer y cuáles les causan dificultad?

4. DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA REVISADA PARA EL SEGUNDO CICLO DE INVESTIGACIÓN

A continuación, solo incluimos la parte de una DG de función exponencial que ponemos a prueba en este estudio. Esto no incluye el entendimiento gráfico de funciones exponenciales ni el entendimiento de logaritmos, ya que a causa de la pandemia de Covid-19 no pudimos implementar las actividades que teníamos diseñadas para ello. Antes de entrar en detalles, resumimos la DG brevemente. La DG comienza con un listado de prerrequisitos que se asume que los estudiantes conocen antes de estudiar funciones exponenciales. Luego de eso proponemos que el estudiante use multiplicación repetida para construir función exponencial, primero en los enteros positivos, para luego, dividiendo repetidamente por el factor multiplicativo, extender la función exponencial a cero y a los enteros negativos. Coordinando Procesos de exponentes enteros, función exponencial en los enteros, y exponentes fraccionarios unitarios, se puede extender función exponencial a los racionales (figura 1). Los números racionales es el conjunto más amplio con el cual los estudiantes de esta edad (15 y 16 años) pueden hacer cómputos estando restringidos a la pantalla finita de una calculadora gráfica. En varias investigaciones (e.g., Kidron, 2018; Sirotic y Zazkis, 2007; Murmur y Zazkis, 2021) se muestra que los estudiantes tienen dificultad construyendo los números irracionales, entendiendo su relación con los racionales,

[4] Por "entender" queremos decir construir procesos u objetos, según se define en la teoría.

así como tratando con exponentes irracionales. Por ello, no intentamos extender la construcción de exponentes a todos los reales, sino que esperamos que el uso de contextos donde la variable de entrada se perciba continua, como sería el caso del tiempo, permita a los estudiantes intuir la existencia de potencias reales (ver Ellis *et al.*, 2015, 2016). Los estudiantes pueden interiorizar acciones sobre exponentes racionales, para computar y entender lo que es un exponente racional, sin que necesariamente tengan que primero construir una conceptualización de Proceso del conjunto de números reales.

Conocimientos previos para revisar o construir

1. Se necesita un proceso de exponentes enteros positivos. Para enteros positivos n y m, Acciones de expandir b^n y b^m como un producto de factores individuales b, y usar estas expansiones para explorar expresiones de la forma $b^n b^m$, $\frac{b^n}{b^m}$ y $(b^n)^m$ y tratar de encontrar fórmulas correspondientes, se pueden interiorizar en un Proceso que permite a los estudiantes imaginar que para un entero positivo n, multiplicar un número b por sí mismo n veces da como resultado b^n y dar sentido a las propiedades de los exponentes $b^n b^m = b^{n+m}$, $\frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$, y $(b^n)^m = b^{nm}$. Estudiantes con una conceptualización de Proceso de exponentes enteros positivos, pueden imaginar y darles sentido a esas propiedades sin depender de la memorización ni de hacer cómputos explícitos.
2. Se necesita un Proceso de exponentes enteros. Acciones de explorar la validez de las expresiones $b^n b^m = b^{n+m}$, $\frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$, para los casos donde uno o ambos de n y/o m es cero, o donde $m = -n$ (en la primera expresión), $m = n$ o $m > n$ (en la segunda expresión) pueden interiorizarse en un Proceso que permita justificar las definiciones $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$ y $b^0 = 1$ en términos de extender las propiedades de los exponentes naturales a los enteros. La necesidad de realizar Acciones sobre el Proceso de exponentes enteros, por ejemplo, para resolver problemas contextuales, fomenta su encapsulación en un Objeto de exponentes enteros.

Función exponencial en los naturales

La acción de ordenar y completar espacios en blanco en pares ordenados correspondientes a una sucesión geométrica (n, s_n) (es decir, donde $s_n = b^n$ para n un entero positivo, algunos $b > 0$, $b \neq 1$, y donde s_n podría no estar expresado como una potencia), donde el factor multiplicativo común (la base b) se da verbal o simbólicamente, o donde se dan dos términos consecutivos (n, s_n) y (n+1, s_{n+1}) para permitir encontrar el factor multiplicativo b, se puede interiorizar en un Proceso de multiplicación repetida que permite imaginar que (n) crece aritméticamente mientras que (s_n) crece geométricamente, permite relacionar n con s_n, y reconocer n como el número de veces que la base b es multiplicada por sí misma. En este momento, es posible que el estudiante no sepa que n es un exponente. Acciones de k-saltos a la derecha, es decir, completar algunos términos de sucesiones de la forma (n, s_n), ($n+k$, s_{n+k}), ($n+2k$, s_{n+2k}) ... para k suficientemente grande que no sea razonable hacer esto multiplicando repetidamente por b, puede hacer evidente la necesidad de la notación exponencial y así fomentar la coordinación del Proceso de multiplicación repetida con un Proceso prerrequisito de exponentes enteros positivos para dar como resultado un Proceso de función exponencial en los naturales, que permite reconocer a n (en pares (n, s_n)) como un exponente.

Extensión a los enteros

La acción de usar multiplicación repetida para encontrar la parte que falta en el par ordenado $(0, ?)$ de forma tal que complete un conjunto dado de pares ordenados en una sucesión geométrica $(1, s_1)$, $(2, s_2)$, $(3, s_3)$ mientras que también hace que esta extensión sea consistente con el Proceso de exponentes enteros positivos, se pueden interiorizar en un Proceso que extiende el Proceso de función exponencial a cero. Acciones similares que extienden aún más la función a pares de la forma $(-1, s_{-1})$, $(-2, s_{-2})$, $(-3, s_{-3})$ ... se pueden interiorizar en un Proceso que extiende el Proceso de función exponencial en los naturales para formar un Proceso de función exponencial en los enteros. En este momento, el estudiante puede que no relacione los valores enteros negativos de n con exponentes enteros negativos. Acciones de k-saltos a la izquierda, es decir, completar algunos términos de sucesiones de la forma (n, s_n), ($n-k$, s_{n-k}), ($n-2k$, s_{n-2k}), ... partiendo de cualquier n, para k lo suficientemente grande como para que no sea razonable hacerlo dividiendo repetidamente por b, fomenta la coordinación de este Proceso con el Proceso prerrequisito de exponentes enteros para dar como resultado un Proceso que reconoce que un entero negativo n en un par $(n, ?)$ es un exponente y que el par se completa de una manera consistente con propiedades de exponentes.

Proceso de potencias fraccionarias unitarias

Se necesita un Proceso de potencias fraccionarias unitarias para permitir que los estudiantes imaginen que para $a > 0$, y n entero positivo, $a^{\frac{1}{n}}$ es un número que multiplicado por sí mismo n veces da como resultado a. Para construir este Proceso: dado un número positivo a y un entero positivo (pequeño) n, la Acción de usar tecnología de computación para tantear numéricamente o para analizar geométricamente (intersecando las gráficas de $y = x^n$ y $y = a$, por ejemplo) y encontrar o aproximar un número que al multiplicarse por sí mismo n veces produce el número dado a, puede interiorizarse en un Proceso que permite al alumno imaginar y anticipar la existencia de tales números. Otras Acciones de usar tecnología para calcular potencias fraccionarias unitarias, verificar que efectivamente tengan la propiedad esperada, y usarlas para resolver situaciones de problemas contextuales pueden ayudar a los estudiantes a encapsular el Proceso de potencias fraccionarias unitarias en un Objeto.

Extensión a los números racionales

El Proceso de multiplicación repetida se coordina con un Proceso de potencias fraccionarias unitarias mediante la aplicación del primero al encapsulamiento del segundo, para producir un Proceso de potencias fraccionarias repetidas. Este proceso permite pensar en $\underbrace{b^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}}\ldots b^{\frac{1}{n}}}_{\text{m veces}}$ como $\left(b^{\frac{1}{n}}\right)^m = b^{\frac{m}{n}}$. El proceso de potencias fraccionarias repetidas se puede coordinar con el Proceso de función exponencial en los enteros para formar un nuevo Proceso que extiende función exponencial a los racionales. La DG se resume en la figura 1.

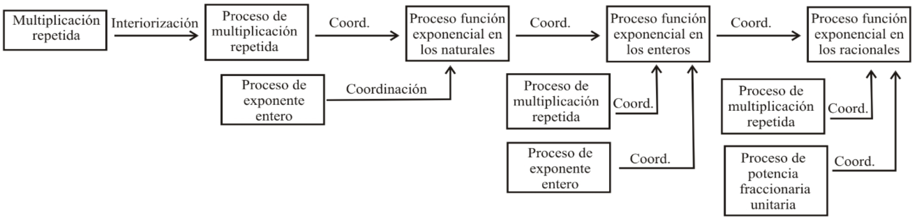


Figura 1. Resumen gráfico de la descomposición genética.

5. METODOLOGÍA

Durante el año escolar 2021-2022, se seleccionó por conveniencia una escuela privada de nivel superior en Puerto Rico para el estudio. La escuela atiende un estudiantado de nivel económico medio-alto, la mayor parte de los cuales espera seguir estudios universitarios. Puede esperarse que estos estudiantes estén mejor preparados que los estudiantes típicos del sistema de educación pública de Puerto Rico. Todos, los nueve estudiantes de undécimo grado (15-16 años de edad) que estaban tomando el curso de Precálculo y la maestra del curso, aceptaron participar voluntariamente. Sin embargo, un estudiante no culminó su participación en el estudio. Los ocho estudiantes que completaron su participación son los que llamaremos estudiantes participantes. La maestra aplicó la estrategia pedagógica ACE y administró todas las actividades de enseñanza. En particular, las actividades se hicieron colaborativamente en dos grupos, uno de tres estudiantes y el otro de cinco. El investigador principal trabajó de cerca con la maestra del curso para asegurar que las actividades se implantaran como fueron diseñadas. El estudio se llevó a cabo cumpliendo con todos los reglamentos de prácticas éticas, confidencialidad, y consentimiento informado, requeridos por la Junta de Revisión Institucional de la Universidad Interamericana de Puerto Rico.

Los estudiantes participaron en un conjunto de cinco actividades distribuidas en 10 sesiones, cada sesión de 1.5 horas de duración. Las actividades se describen más adelante. En la implementación de cada actividad de aprendizaje los primeros 50 minutos fueron para trabajar en grupos y los últimos 40 minutos para la discusión en clase. Las actividades se realizaron utilizando un manipulativo con fichas (figura 2) que muestran a una función como máquina. La ficha en la figura 2 es parte del conjunto de fichas de la base 2 y representa el dato $2^3 = 8$. De ahora en adelante esta ficha se va a denotar de la forma (*3*/*8*). Se está adaptando la idea de Ferrari-Escola *et al.* (2016) pues, como ellos, usamos "juegos" de fichas. Se mejoró el diseño de Díaz-Berríos y Martínez-Planell (2022) pues sus fichas tenían una raya en el medio, como las fichas de dominó, y esto confundía a los estudiantes que pensaban que la raya era para división. Se le añadió un diseño de función como máquina (figura 2), para propiciar que los estudiantes pensaran en exponentes como entradas y potencias como salidas. También, se usó una situación de crecimiento continuo, como sugieren Ellis *et al.* (2015, 2016) para ayudar a que los estudiantes piensen que cualquier número real (tiempo) puede ser un exponente.

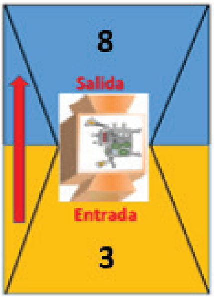


Figura 2. Ficha (de la base 2) mostrando una función como máquina.

La tabla 1 resume las actividades de aprendizaje, propósito de la actividad, y problemas de muestra.

Tabla 1. Resumen de las actividades de aprendizaje implementadas, propósito, y problemas de muestra

<table>
<tr><th>Act</th><th>Propósito</th><th>Problemas de muestra</th></tr>
<tr><td># 1</td><td>Prereq. exponente entero</td><td>1. Escribe en notación exponencial: $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b$
2. Expande y expresa sin usar notación de exponentes: $3(b^5)^2$
3. Considere la expresión $\frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$. Indique si es o no es válida en el caso que $m = n$. Explique su respuesta.</td></tr>
<tr><td># 2</td><td>Fn. exp. en enteros positivos</td><td>“Moverse a la derecha en pasos unitarios”
Se presenta al estudiante la situación de un globo aerostático cuya altura se duplica cada minuto de vuelo. Se le dan fichas sin ordenar, algunas incompletas y se les pide que las ordenen y completen. Ya ordenadas corresponden a las columnas de la siguiente tabla:
<table>
<tr><td>Altura (metros)</td><td>1</td><td>2</td><td></td><td>8</td><td></td><td>32</td><td></td><td>128</td><td></td><td>512</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Tiempo de vuelo (min.)</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td></td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td></td><td>9</td><td>10</td><td></td><td></td><td>13</td><td>14</td></tr>
</table>
Otro ejemplo:
<table>
<tr><td>Altura del globo (metros)</td><td>4</td><td>4.32</td><td>4.67</td><td>5.04</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Tiempo de vuelo (minutos)</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td># 3</td><td>Extender fn. exp. a enteros</td><td>“Moverse hacia la izquierda en pasos unitarios.” En el contexto de un globo aerostático que duplica su altura como función del tiempo. Se explica el tiempo negativo en términos de minutos antes de comenzar a tomar datos.
<table>
<tr><td>Altura (metros)</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>4</td><td>8</td><td>16</td></tr>
<tr><td>Tiempo (minutos)</td><td>-5</td><td>-4</td><td>-3</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
</table>
También se les dio fichas donde tenían que “dar saltos a la izquierda” para fomentar el uso de exponentes negativos.
<table>
<tr><td>Altura (metros)</td><td></td><td></td><td></td><td>474.76</td><td></td><td></td><td>4,233</td><td>5,079.60</td></tr>
<tr><td>Tiempo (minutos)</td><td>1</td><td>10</td><td>20</td><td>30</td><td>40</td><td>41</td><td>42</td><td>43</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td># 4</td><td>Proceso potencia fraccionaria unitaria</td><td>Primero el estudiante tantea con la calculadora para preguntas tales como: ¿Qué número positivo al multiplicarlo por sí mismo da 7?
Complete la sucesión de forma tal que crezca siguiendo un patrón de siempre multiplicar por el mismo número 3, ___, ___, ___, 9.</td></tr>
<tr><td># 5</td><td>Función exp. en números racionales</td><td>Finalmente, se trataron problemas como: ordene y complete las fichas si la altura de un globo aerostático se duplica cada tres minutos:
<table>
<tr><td>Altura del globo (metros)</td><td>0.91</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Tiempo de vuelo (minutos)</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Los datos del estudio se obtuvieron del trabajo escrito de los participantes en las actividades de aprendizaje, grabaciones de voz del trabajo en grupo en la sala de clases, y de las entrevistas semi-estructuradas que se llevaron a cabo con cada estudiante a finales del semestre. Cada entrevista duró aproximadamente una hora. Para las entrevistas se diseñó un instrumento que permitió indagar cuáles de las construcciones propuestas en la DG los estudiantes pudieron hacer. El entrevistador también podía pedir que los estudiantes justificaran sus respuestas y podía indagar acerca del entendimiento de los estudiantes. Para analizar los datos, primero el autor principal transcribió las discusiones en grupo. Luego ambos autores, de forma independiente, separaron las transcripciones en episodios según los problemas que discutían los estudiantes y en cada episodio, añadieron notas a las transcripciones acerca del tipo de estructura (según APOE y según se describen en la DG) que los estudiantes individualmente en cada grupo estaban evidenciando. Después, en reuniones semanales, discutieron las notas, acordaron cómo recortar las transcripciones eliminando intercambios que no aportaron a la discusión, y escogieron citas que ejemplificaban las construcciones de los diferentes estudiantes. Finalmente, prepararon tablas, una por estudiante, donde se llevaba cuenta de los episodios, las estructuras que evidenciaban, y citas pertinentes. En cada espacio de las tablas se acordó un código para la estructura que evidenciaba el estudiante; el código incluía la letra "A" para Acción, "P" para Proceso, y "O" para Objeto e identificaba la estructura según definida en la DG. Así, por ejemplo, algunas entradas en la tabla leerían como A-MR (Acción de multiplicación repetida), P-FE-Z (Proceso de función exponencial en los enteros), A-PFU (Acción de potencia fraccionaria unitaria). Esto se hizo para todas las estructuras en la DG. Para completar el análisis de las entrevistas semiestructuradas, se señalaron construcciones donde los estudiantes mostraron dificultad, se tomó nota de construcciones inesperadas, y se buscaron patrones en la tabla de análisis.

Finalmente, se compararon las tablas correspondientes a las discusiones en clase con la tabla de la entrevista semiestructurada, buscando en las notas y transcripciones según necesario, se discutió la concordancia entre ambos conjuntos de datos, y se llegó a un acuerdo final.

6. RESULTADOS

Los datos los obtuvimos de las discusiones en grupos de trabajo colaborativo que se dieron en clase y de las entrevistas individuales al final del curso. En las discusiones en clase se formaron dos grupos de estudiantes. En el grupo 1 estaban Anita, Amara, y Alejandro. El grupo 2 contaba con Iván, Genaro, Camilo, Herminio, y Kenny.

Construcción de función exponencial en los enteros como Objeto

Para discutir la construcción de un Objeto de función exponencial en los enteros nos concentramos en analizar al grupo 1, pues en ese grupo estaba Alejandro, el único estudiante que no mostró hacer tal construcción. La construcción de este Objeto por parte de los estudiantes en el grupo 2 fue similar a las de Anita y Amara (grupo 1), que mostramos a continuación, así que no las repetimos.

En el primer problema de la primera actividad se les dijo a los estudiantes que en el pueblo de Ponce la altura en metros de un globo aerostático se duplica por minutos. Se le dieron fichas fuera de orden y se le pidió ordenar y completar los términos de las otras fichas que faltaban.

Altura del globo (metros)	1	2		8		32		128		512					
Tiempo de vuelo (min.)	0	1	2	3		5	6	7		9	10			13	14

La forma de "función como máquina" (figura 2) de las fichas propiciaron el pensamiento funcional:

Amara: La entrada es tiempo y la salida es la altura ...

Anita: ... Tenemos que velar que los de abajo, elementos de entrada, estén en orden ... Encontramos un patrón ... la base es 2 y entonces el de abajo, los de entrada, son sus exponentes

Anita: [Luego] ... de menor a mayor vamos multiplicando por 2 ... Y de mayor a menor ¿vamos?

Anita y Amara: Dividiendo entre 2.

Alejandro, que había permanecido callado, mostró compartir las construcciones de Anita y Amara en el siguiente ejercicio. Aquí se le dieron las fichas:

Altura del globo (metros)	4	4.43	4.67	5.04							
Tiempo de vuelo (min.)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Alejandro: Aquí se está dividiendo 5.04 entre 4.67, o también puede ser 5.04 entre 4.67... redondeado a dos lugares decimales es 1.08

Anita y Amara: 1.08

Alejandro y Anita: Multiplicamos 1.08 por cada elemento de salida en la tabla

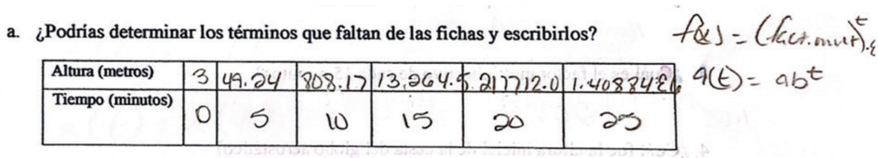
Alejandro: [Luego, resumiendo] ... en el primer caso, el de Ponce el factor multiplicativo 2 se elevaba utilizando como exponente a cada uno de los números de entrada ... O sea que cada elemento de salida que se obtenía era el doble del anterior... En el segundo caso del globo aerostático en el pueblo de Mayagüez se multiplicaba la altura que te daban en la ficha por 1.08 para obtener cada uno de los elementos de salida...

En diferentes momentos durante sus discusiones en clase, los estudiantes del grupo 1 mostraron poder imaginar la multiplicación repetida sin tener que llevarla a cabo explícitamente, lo cual es consistente con un Proceso de multiplicación repetida. Por ejemplo, cuando Anita dice "de menor a mayor vamos multiplicando por 2". También, todos mostraron evidencia de relacionar exponenciación con multiplicación repetida, como cuando Anita dice "son sus exponentes" o Alejandro cuando dijo "el factor multiplicativo 2 se elevaba utilizando como exponente a cada uno de los números de entrada". Esto permitió a cada miembro del grupo coordinar el Proceso de multiplicación repetida con un Proceso de exponenciación para construir un Proceso de función exponencial en los naturales donde se reconocen a los elementos de entrada asociados al tiempo como exponentes. Además, cuando Anita y Amara dicen "y de mayor a menor ¿vamos? ... dividiendo entre 2" muestran evidencia consistente con un Proceso de reversión de multiplicación repetida. En otra ocasión, Alejandro dijo "el factor multiplicativo es el factor que nos permite encontrar los elementos de salida que faltan... ya sea dividiendo o multiplicando". Que puedan revertir la multiplicación sugiere que han construido un Proceso de multiplicación repetida. Todos ellos reconocieron las entradas como exponentes, lo que en general no sucedió con los estudiantes del primer ciclo de investigación (Díaz-Berríos y Martínez-Planell, 2022).

En varios problemas en la clase y entrevistas, los estudiantes del grupo 1 fueron consistentes en mostrar su estructura de Proceso de función exponencial en los naturales. Anita y Amara también dieron muestras consistentes con haber construido un Objeto de función exponencial en los naturales. En otro problema en el contexto del globo aerostático se le dieron fichas como en la siguiente tabla:

Altura (metros)	3	5.25	9.19	16.08						
Tiempo (minutos)	0	1	2	3	4	5	10	15	20	25

La figura 3 muestra el trabajo del grupo del grupo 1. Mientras discuten esta situación:



a. ¿Podrías determinar los términos que faltan de las fichas y escribirlos?

$f(t) = (fact. mult)^t \cdot 3$

$f(t) = ab^t$

Altura (metros)	3	49.24	808.17	13,264.5	217712.0	1.40884E6
Tiempo (minutos)	0	5	10	15	20	25

Figura 3. Trabajo del grupo 1 en el ejercicio 1a de la actividad 2.

Amara: Podemos decir que $f(5) = 3(1.75)^5$

Anita: Exacto... $f(t) = (\textit{factor multiplicativo})^t \cdot 3$, el factor multiplicativo elevado al tiempo por la salida cuando el tiempo es cero

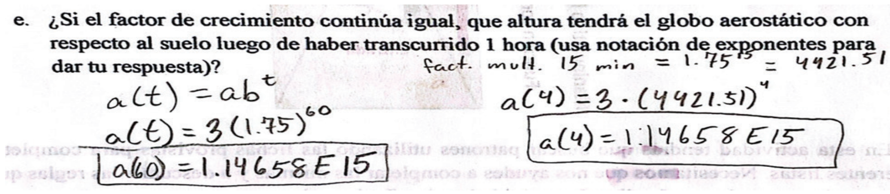
Amara: El factor multiplicativo elevado a la entrada por la altura inicial será igual al elemento de salida que estás buscando

Cuando Anita y Amara hallan una fórmula, $f(t) = a(b)^t$, que modela la situación, muestran evidencia consistente con la construcción de un Objeto de función exponencial en los naturales. Parecen pensar en el Proceso de función exponencial en los naturales como una entidad en sí misma, una totalidad, que pueden encapsular en una fórmula. Cuando se les pide la altura del globo luego de una hora muestran poder hacer acciones sobre esa totalidad (figura 4):

Amara: Tienes que elevar 1.75 al exponente 60 y luego multiplicarlo por 3 y ¿el resultado es?... Recuerden que también tienen que multiplicarlo por la altura inicial que es 3

Anita: ... Espérate, sería tomar el factor multiplicativo por minutos y lo elevas por el tiempo que es 60 minutos y lo multiplicas luego por 3 ... Yo voy calculando el resultado porque nos tiene que dar un decimal ... $f(t) = a(b)^t$, esto es ... $f(60) = 3(1.75)^{60}$, $f(60) = 1.14658E15$ ese es el resultado final...

Inclusive, la figura 4 muestra que el grupo 1 pudo hacer acciones sobre su Objeto de función exponencial en los naturales al verificar su resultado “dando saltos a la derecha”, en este caso, hallando y usando el factor multiplicativo de un cuarto de hora.


e. **¿Si el factor de crecimiento continúa igual, que altura tendrá el globo aerostático con respecto al suelo luego de haber transcurrido 1 hora (usa notación de exponentes para dar tu respuesta)?**

fact. mult. 15 min $= 1.75^{15} = 4421.51$

$a(t) = ab^t$

$a(t) = 3(1.75)^{60}$

$\boxed{a(60) = 1.14658E15}$

$a(4) = 3 \cdot (4421.51)^4$

$\boxed{a(4) = 1.14658E15}$

Figura 4. Trabajo del grupo 1 en el ejercicio 1e de la actividad 2.

En el próximo ejemplo, Anita y Amara del grupo 1 muestran evidencia consistente con extender el Proceso de función exponencial en los naturales a cero y los enteros negativos. Se les dice: la siguiente sucesión crece exponencialmente con un factor multiplicativo de 2; complete la tabla.

Salidas								4	8	16
Entradas	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

Anita: Empezamos aquí en la tabla cuando transcurrió 4 minutos de vuelo la altura de la cesta del globo aerostático era de 16 metros... El factor multiplicativo siempre va a ser 2 ... Pues vamos a dividir la altura de la cesta del globo aerostático de 16 metros entre 2 expandiendo los demás elementos de salida hacia la izquierda... 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$

Amara: [Leyendo] ¿Hay relación entre las entradas negativas con sus salidas correspondientes y lo que usted conoce de exponentes negativos? (figura 5)

Anita: ... cuando el 2 está elevado a la –1, que significa en la situación en contexto un minuto antes de vuelo, 2^{-1} pues va a dar como elemento de salida la altura inicial de la cesta del globo aerostático que sería 1/2 metro ... y con el tiempo antes de t minutos de vuelo moviéndose hacia la izquierda, los negativos podemos evaluar esa expresión exponencial...

Amara: [Luego] Hacia la izquierda los elementos de salida están disminuyendo ... pues como lo estábamos viendo en fracción, pues va a aumentar el denominador de la fracción ... es lo mismo que si tuvieras un número con exponente negativo y lo inviertes a su recíproco

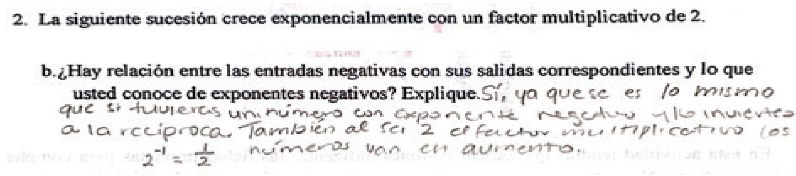


Figura 5. Trabajo del grupo 1 en el ejercicio 2b de la actividad 3.

Estas estudiantes revierten el Proceso de multiplicación repetida y dividiendo repetidamente extienden la tabla hacia la izquierda “8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$”. Cuando Amara lee la próxima pregunta (¿Hay relación entre las entradas negativas ...?), muestra aceptar el resultado de Anita y luego ambas coordinan la multiplicación repetida con un Proceso de exponenciación. De esa forma construyen un Proceso de función exponencial en todos los enteros.

La extensión de los naturales a cero también se hace como un Proceso, como lo evidencia su argumento justificando esto. Amara usa la propiedad $\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$ y sustituyendo por m argumenta (figura 6):

Amara: Pues que sea b^m ... pues entonces aquí sería b^{m-m} ... y eso es igual a b^0 ... [escribe 1].
Anita: Sí, porque cuando la base está elevado a el exponente 0 eso es igual a 1.

Aquí Anita muestra extender la función exponencial a cero como una Acción. Acto seguido, utilizando la propiedad $b^{(n+m)} = b^n \cdot b^m$, Anita justificó que $b^0 = 1$ (figura 6). Poder justificar y discutir en términos generales son características de un Proceso. Esto sugiere que la extensión al cero de función exponencial en los naturales la hicieron como un Proceso.

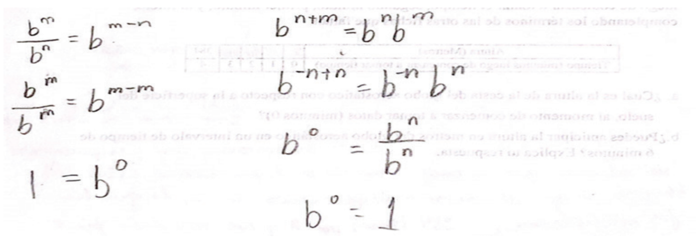


Figura 6. Trabajo del grupo 1 en el ejercicio 2d de la actividad 3.

Los resultados de las discusiones en el salón de clase y en la entrevista semiestructurada sugieren que Anita y Amara construyeron un Objeto de función exponencial en los enteros. Mostramos el caso de Anita en la entrevista semiestructurada, porque podemos hacerlo de manera más clara y resumida.

Entrevistador: [Una cantidad *C* crece exponencialmente, triplicándose cada hora. En un momento inicial hay 15 kilos de la cantidad] ¿Cuántos kilos va a haber 5 horas después?

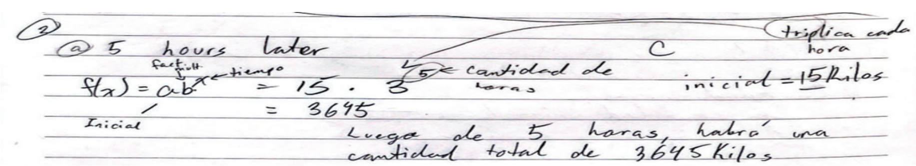
Anita: Me viene a mi mente una fórmula que nosotros utilizamos y que descubrimos durante la implantación de las actividades de aprendizaje de la investigación que era $f(x) = ab^x$ ó $f(t) = ab^t$, donde a representa el valor inicial, la b representa el factor multiplicativo y la x o t que representa el tiempo ... En este caso el valor inicial sería 15, el factor multiplicativo sería 3, y el tiempo sería h que no se ha determinado... [figura 7]

Entrevistador: ¿Cuántos kilos había 7 horas antes del momento inicial?

Anita: Ok ... Pues como ahí dice que es 7 horas antes del momento inicial el 7 sería un -7 como exponente ... Por el contrario, si fuese 7 horas después el exponente sería un 7 positivo... 7 horas antes del momento inicial habría $\frac{1}{1,458}$ kilos.

Entrevistador: Para llegar a esa respuesta ¿qué hiciste?

Anita: Para poder llegar a esta respuesta primero analicé la oración y como me está preguntando ¿cuántos kilos había 7 horas antes del momento inicial? yo al instante pensé que el 7 es como exponente y tiene que ser un siete negativo, -7 ... Y utilizando la misma fórmula que te facilité previamente que era $f(h) = 15(3)^h$ sustituí el exponente h por -7 y eso sería $f(-7) = 15(3)^{-7}$ y lo resuelvo ... [figura 7]



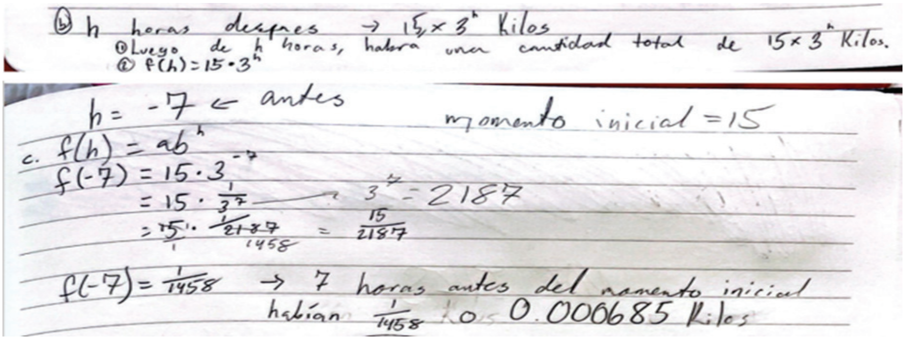


Figura 7. Trabajo de Anita en la pregunta 2(a, b, c) de la entrevista.

Anita muestra evidencia consistente con realizar acciones sobre el Objeto de función exponencial en los enteros, cuando dice "utilizando la misma fórmula que te facilité previamente que era $f(h) = 15(3)^h$ sustituí el exponente h por -7 y eso sería $f(-7) = 15(3)^{-7}$". Anteriormente, Anita había dado muestra de tener al menos una conceptualización de Proceso de función exponencial en los enteros. Eso da confianza que no está usando la fórmula como algo memorizado, una Acción, sino que puede imaginar de dónde vino la fórmula. En este caso la fórmula $f(h) = 15(3)^h$ puede representar la encapsulación del Proceso de función exponencial en los enteros en un Objeto de función exponencial en los enteros.

Construcción de función exponencial en los enteros como Acción

El caso de Alejandro, tercer miembro del grupo 1, es diferente. Alejandro se mantuvo bastante callado durante la actividad en clase y, a insistencia de sus compañeras, solo hizo algunos cálculos específicos como Acciones. Todavía en la entrevista final mostró evidencia consistente con una conceptualización de Acción de función exponencial en los enteros positivos. En el mismo problema:

Alejandro: En la primera hora va a haber 45 kilos ... en la segunda hora sería 135 kilos... En la tercera 405 kilos ... En la cuarta 1,215 kilos... En la quinta 3,645 kilos ¿Cuántos kilos va a haber h horas luego del momento inicial?... $f(h) = 15(3)^h$ ... ¿Cuántos kilos había 7 horas antes del momento inicial?... "Antes del momento inicial había 2,187 kilos

Entrevistador: ¿Qué tú entiendes por 7 horas antes del momento inicial?

Alejandro: Pues yo lo que hice fue tomar el 3 y lo elevé a la potencia 7 y luego lo multipliqué por 15 que es la cantidad inicial [Figura 8].

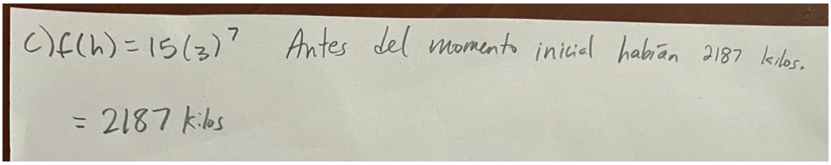


Figura 8. Trabajo de Alejandro en la pregunta 2c de la entrevista.

En su respuesta, Alejandro muestra que puede hacer Acciones de multiplicación repetida y puede generalizar para describir lo que sucede h horas después, expresándolo en términos de una función exponencial. Esto podría ser consistente con un Proceso de función exponencial en los enteros positivos. Sin embargo, no extiende ese Proceso a los enteros negativos. Cuando se le pregunta por 7 horas antes, no revierte el Proceso de multiplicación repetida para dividir siete veces por 3, sino que aplica la Acción (sobre un Objeto de función exponencial en los enteros positivos) de sustituir ciegamente 7 por h. En resumen, Alejandro no muestra haber construido un Objeto de función exponencial en los enteros.

Como Anita y Amara del grupo 1, los cinco estudiantes del grupo 2 mostraron construir una función exponencial en los enteros como un Objeto. Como su trabajo fue similar al de Anita y Amara, solo mostramos un breve ejemplo de cómo los estudiantes del grupo 2 comenzaron a extender su noción de función exponencial a los enteros negativos:

Genaro: La altura inicial del globo aerostático cuando el tiempo es 0 es de 24 metros... ¿Cuál es la altura de la cesta de un globo aerostático que puede esperarse que hubiese un minuto de vuelo antes, dos minutos de vuelo antes y tres minutos de vuelo antes ...?

Iván: ¿Qué hacemos entonces? dividir cada elemento de salida hacia la izquierda entre 2.

Camilo: Entonces aquí en la tabla los elementos de salida hacia la izquierda son 12, 6, 3.

Genaro y Iván: Acá, sabemos que cuando el de entrada es 0 el de salida es 24... Cuando el de entrada es -1 el de salida es 12... Cuando el de entrada es -2 el de salida es 6... Y cuando el de entrada es -3 el de salida es 6.

Iván: Es lo mismo, lo único es que vas hacia la izquierda... Ok, me imagino que se está aplicando aquí la regla de los exponentes negativos... Y esta regla de los exponentes negativos lo que nos dice de eso es que...

Genaro: Es que cuando la base se está elevando a un exponente negativo a la base le buscamos el recíproco.

Todos los miembros del grupo 2 construyeron un Objeto de función exponencial en los enteros. Solo detallamos el ejemplo de Kenny. Las construcciones de los otros miembros son similares. En la entrevista se pregunta: una cantidad C crece exponencialmente, triplicándose cada hora. En un momento inicial hay 15 kilos de la cantidad. ¿Cuántos kilos va a haber 5 horas después? ¿h horas después?

> Kenny: Ok... me dio que va a ser 3,645 kilos en 5 horas... [se le pide que explique] multipliqué 15 por 3 cinco veces, $15 \cdot 3^5$.
>
> Kenny: [h horas después] va a haber 15 kilos triplicándose a la cantidad de horas que se ha propuesto... pues voy a sustituir entonces sobre h, que sería 15 multiplicado por 3 elevado a la potencia h... $15 \cdot 3^h$ ... en el contexto de función sería $f(h) = 15 \cdot 3^h$.

Kenny parece haber construido un Proceso de multiplicación repetida que le permite imaginar "multipliqué 15 por 3 cinco veces", coordinar ese Proceso con uno de exponenciación cuando usa las 5 horas como exponente, y encapsularlo en un Objeto cuando habla de $f(h) = 15 \cdot 3^h$. También muestra que puede hacer Acciones sobre ese Objeto (de función exponencial en los enteros) cuando se le pregunta: ¿cuántos kilos había 7 horas antes del momento inicial?

> Kenny: ¡Diantres! tú me estás diciendo 7 horas antes... Tendré que utilizar números negativos... lo que yo estoy haciendo es utilizar la misma función $f(h) = 15 \cdot 3^h$, solo que estoy elevándolo a la potencia -7... sería sustituir en h por -7, $f(-7) = 15 \cdot 3^{-7}$. ... Luego de 7 horas del momento inicial habrá 5/709 kilos.

En el mismo problema, la construcción de Herminio fue similar:

> Herminio: Como se está triplicando una cantidad cada hora, se estará triplicando cinco veces la cantidad inicial de 15 kilos y me dio a 3,645 kilos ... Sería 15 por 3 elevado a la potencia h, $15 \cdot 3^h$... Donde el exponente h sería sustituido por cualquier tiempo medido en horas... [7 horas antes] Ahí en vez de triplicarse se dividiría el valor inicial entre 3... lo dividí porque me está pidiendo lo opuesto... -7 porque son 7 horas antes...

Construcción de función exponencial en los racionales como un Proceso

En las actividades en el salón de clase, Anita y Amara del grupo 1 comienzan a construir su Proceso de función exponencial en los racionales. Para ello, la DG propone que primero deben construir un Proceso de potencias fraccionarias unitarias. Para ayudar a que los estudiantes construyan este Proceso, un ejercicio les pide que completen la sucesión 3, _, 9 de forma tal que la sucesión crezca siguiendo un patrón de siempre multiplicar por el mismo número (figura 9).

Anita: Pues ya. El factor multiplicativo sería 1.73.

Amara: Aquí hay uno que es 1.7321, que si multiplicamos el valor inicial 3 por el factor multiplicativo 1.7321 a la potencia 2 nos daría a 9.00051... Ok... $(3)^{\frac{1}{2}} \approx 1.73205$ ...

Anita: ... Porque cuando el exponente es 1 para encontrar el segundo término de la sucesión sería $3(1.73205)^1$ ó $3(3^{1/2})^1$ ... y para encontrar el tercer término de la sucesión el exponente es 2 que sería $3(3^{1/2})^2$.

El próximo ejercicio les pide completar la sucesión 3, _, _, 9.

Anita: Yo pensé elevar el factor multiplicativo 3 a la un tercio, $3^{\frac{1}{3}}$ ...

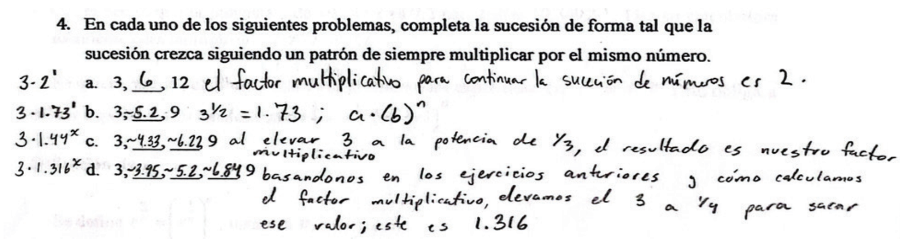
Amara: Lo que podemos hacer también es buscar con números, por ejemplo 1.44 x 3 ...

Anita: Estamos buscando un número que sea un decimal... Ok, el número es 1.44... Espérate, déjame ver... Sí, cuando uno multiplica $3(1.44)^x$ ...

Luego de completar las sucesiones 3, _, 9; 3, _, _, 9; y 3, _, _, _, 9; Anita resume:

Anita: Es como si tu estuvieses buscando las raíces cuadradas, las raíces cúbicas y las raíces cuartas [Figura 9] ... [Luego, explicando] Para calcular ese factor multiplicativo 1.316 en vez de elevar tres a 1/3 lo que hicimos fue que la base 3 la elevamos a la ¼ ... Sería utilizando algo como esto $a(n) = a \cdot b^n$.

Amara: ... esta manera de expresar los elementos de salida en notación exponencial en cada uno de los términos que faltaban en las distintas sucesiones es más sencilla y más rápida para calcular el enésimo término que estábamos buscando en la sucesión ...


4. En cada uno de los siguientes problemas, completa la sucesión de forma tal que la sucesión crezca siguiendo un patrón de siempre multiplicar por el mismo número.

3·2¹ a. 3, 6, 12 el factor multiplicativo para continuar la sucesión de números es 2.

3·1.73¹ b. 3, 5.2, 9 3^{1/2} = 1.73 ; a·(b)^n

3·1.44^x c. 3, ~4.33, ~6.22, 9 al elevar 3 a la potencia de 1/3, el resultado es nuestro factor multiplicativo

3·1.316^x d. 3, ~3.95, ~5.2, ~6.84, 9 basandonos en los ejercicios anteriores y cómo calculamos el factor multiplicativo, elevamos el 3 a 1/4 para sacar ese valor; este es 1.316

Figura 9. Trabajo del grupo 1 en el ejercicio 4 de la actividad 5.

El dialogo anterior sugiere que Anita y Amara pueden imaginar formar potencias fraccionarias unitarias como un Proceso. Anita muestra evidencia de coordinar el Proceso de potencias fraccionarias unitarias y el Proceso de función exponencial en los enteros, para formar un nuevo proceso de función exponencial en los racionales; por ejemplo, cuando en la entrevista se le pregunta qué entiende por $2^{0.65}$:

Anita: … lo que estoy pensando es en $2^{\frac{65}{100}}$… eso es equivalente a $2^{\frac{1}{100}}$ y todo eso elevado a la potencia 65, $(2^{\frac{1}{100}})^{65}$ … eso me daría $2^{\frac{13}{20}}$.

Entrevistador: ¿Qué entiendes por eso?

Anita: Que un número multiplicado por sí mismo 20 veces dé como resultado a 2 y luego el resultado de este es elevado por sí mismo 13 veces.

En la discusión anterior Anita muestra que puede imaginar el significado de una potencia racional sin tener que hacer cómputos explícitos, lo cual es consistente con un Proceso. De forma similar a Anita, Amara, e Iván (del grupo 2) mostraron construir un Proceso de función exponencial en los racionales. Anita además puede hacer Acciones sobre ese Proceso, como mostramos a continuación. Se le da la tabla:

t	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3
$f(t)$	14					28

y se pregunta: Si la tabla corresponde a un modelo exponencial, ¿cómo hallar los valores que faltan?

Anita: Del elemento de salida cuando el de entrada es 2 al elemento de salida cuando el de entrada es 3 se están duplicando... Estaría buscando un número que cuando lo multiplique por sí mismo cinco veces y luego lo multiplique por el valor inicial que es 14 me dé a 28... el segundo elemento de salida cuando el de entrada es 2.2 sería tomar el valor inicial que es 14 y lo multiplicaría por $2^{1/5}$... 14 por 2 a la potencia 2/5... 14 por 2 a la potencia 3/5... 14 por 2 a la potencia 4/5... 14 por 2 a la potencia 5/5... da 28.

Anita fue la única que mostró construir un Objeto de función exponencial en los racionales.

7. DISCUSIÓN

Los ocho participantes construyeron un Proceso de multiplicación repetida que les permitió imaginar que en los pares (n, s_n), n crecía aritméticamente mientras que s_n crecía geométricamente, relacionar a n con s_n y reconocer a n como el número de veces que la base b era multiplicada por sí misma. También pudieron coordinar un Proceso de multiplicación repetida con un Proceso prerrequisito de exponenciación para construir un Proceso de función exponencial en los naturales, anticipando la forma general $s(t) = ab^t$. Esto verifica lo que se conjeturó en la DG. En comparación, la mitad de los estudiantes del primer ciclo (Díaz-Berríos y Martínez-Planell, 2022) no reconoció que la entrada n en un par (n, s_n) es un exponente. Estos estudiantes inicialmente construyeron el crecimiento exponencial como una multiplicación repetida sin dar evidencia de estar consciente de que la entrada n registra el número de factores b en un producto b^n, o que n podía considerarse como un exponente. La tabla 2 resume las construcciones que evidenciaron los estudiantes en los dos ciclos de investigación.

Tabla 2. Estructuras construidas por los estudiantes

Ciclo	**Objeto de función exponencial en los naturales**	**Objeto de función exponencial en los enteros**	**Objeto de potencia fraccionaria unitaria**	**Proceso de función exponencial en los racionales**
Ciclo 1	2/16	0/16	0/16	0/16
Ciclo 2	7/8	7/8	4/8	3/8

¿Cuáles fueron las diferencias en el tratamiento que recibieron los estudiantes en los dos ciclos? Primero, para el segundo ciclo de investigación cambiamos la adaptación que se hizo en Díaz-Berríos y Martínez-Planell (2022) de los materiales inspirados en Ferrari-Escolá *et al.* (2016). La representación de una función como máquina (figura 2), que es nueva en los materiales, contribuyó a una mejor comprensión de funciones exponenciales ya que desde temprano los estudiantes comenzaron a usar notación de función, cosa que no sucedió en el primer ciclo, y a tratar de simbolizar sus procedimientos. Esto ayudó a que siete de los ocho estudiantes del segundo ciclo extendieran función exponencial de los naturales a los enteros y que pudiesen conjeturar una regla general "$f(x) = ab^x$" para calcular elementos de salida de la función exponencial. Otra modificación a los materiales fue el uso de una situación contextual. En este estudio, se modeló el crecimiento y decrecimiento exponencial adaptadas al entorno del estudiantado puertorriqueño (globo aerostático del pueblo de Jayuya). Esto facilitó el razonamiento en los estudiantes al permitir inquirir usando datos con significado para ellos, y relacionarlos a los parámetros de un modelo matemático exponencial $f(x) = ab^x$. Los estudiantes frecuentemente discutían en términos del significado concreto de los parámetros a y b. Esto sugiere que el contexto les ayudó a analizar y comprender mejor los comportamientos relacionados a crecimiento o decrecimiento exponencial. El uso de situaciones contextuales como apoyo es consistente con Borji *et al.* (2023).

Como sugiere Weber (2002), después de construir funciones exponenciales sobre los números enteros, la construcción puede extenderse a todos los números racionales. En la DG se conjeturó que, si primero los estudiantes construían un Objeto de potencia fraccionaria unitaria, luego podrían construir un Proceso de función exponencial en los racionales. La extensión a los racionales fue diferente en los dos ciclos. La construcción de potencia fraccionaria unitaria se describió en detalle en la DG para este segundo ciclo, pero no fue así para el primer ciclo. Ninguno de los estudiantes del primer ciclo construyó un Proceso de potencia fraccionaria unitaria. Posiblemente apoyados en las actividades de aprendizaje, cuatro de los ocho estudiantes del segundo ciclo evidenciaron pensar en $a^{1/n}$ como un número que multiplicado por sí mismo n veces da como resultado a. Tres de estos estudiantes lograron construir un Proceso de función exponencial en los racionales según se describe en la DG. El que tres de los ocho estudiantes participantes del segundo ciclo pudiera construir un Objeto de potencia fraccionaria unitaria y cuatro de los ocho un Proceso de función exponencial en los racionales muestra el potencial de considerar esta construcción explícitamente, pero también sugiere la necesidad de revisar las actividades para ayudar a que más estudiantes construyan un Proceso de función exponencial en los racionales. La mayor dificultad que tuvieron los estudiantes extendiendo función exponencial a los racionales fue que no construyeron un Objeto de potencia fraccionaria unitaria. Se puede apoyar a los estudiantes enfatizando más el entendimiento verbal de las potencias fraccionarias unitarias.

Para extender el Proceso de función exponencial a todos los reales, los estudiantes podrían construir previamente un Esquema de estructura de los números reales, permitiéndoles razonar sobre números racionales, números irracionales y sus expansiones decimales, lo cual es difícil en el nivel de la escuela secundaria (Kidron, 2018). Esto sugiere que a nivel preuniversitario la extensión a exponentes reales se obtiene mejor construyendo sobre la comprensión intuitiva del tiempo (los exponentes) como una cantidad continua (Ellis *et al.*, 2015, 2016; Kuper y Carlson, 2020; Borji *et al.*, 2023). La intuición del tiempo como cantidad continua puede compensar su falta de conocimiento sobre la estructura de los números reales. Para esto, es imprescindible el tratamiento gráfico de las funciones exponenciales.

Una limitación importante del estudio fue que no se pudo culminar con la implementación de todas las actividades diseñadas para construir el entendimiento gráfico de las funciones exponenciales a causa de la pandemia del Covid-19. Los estudiantes necesitan construir gráficas de funciones exponenciales que modelan comportamientos de crecimiento y decrecimiento para poder entender la extensión de función exponencial a los reales. Esta experiencia sugiere en el futuro incluir la representación gráfica desde las primeras actividades, comenzando con gráficas discretas hasta llegar a gráficas continuas. Otra limitación es que las características de los ocho estudiantes participantes y de su escuela pueden ser diferentes a las de otros estudiantes y escuelas, lo que podría permitir cuestionar la aplicabilidad de nuestros resultados a este nivel. Esto requiere más estudio.

8. CONCLUSIÓN

En este estudio, mostramos que siete de ocho estudiantes participantes pudieron construir un Objeto de función exponencial en los enteros y tres pudieron construir un Proceso de función exponencial en los racionales. Esto es un logro porque en el primer ciclo, dos de 16 estudiantes pudieron construir un Objeto de función exponencial en los enteros y ningún estudiante alcanzó a construir un Proceso de función exponencial en los racionales. Este estudio nos permite ver cómo el uso de manipulativos (similar a Ferrari-Escolá *et al.*, 2016; Díaz-Berríos y Martínez-Planell, 2022), situaciones en contextos continuos (como sugieren Ellis *et al.*, 2015, 2016; Borji *et al.*, 2023), y actividades de aprendizaje basadas en una descomposición genética, se pueden utilizar para ayudar a los estudiantes a construir función exponencial con sentido. Esto es una aportación del estudio.

El estudio y las actividades sirven de modelo a un acercamiento a las funciones exponenciales que puede ser efectivo ya que promueve el aprendizaje activo y con sentido. Fomenta el aprendizaje colaborativo en un formato innovador y ameno a los estudiantes. Aunque no tratamos logaritmos como parte del estudio, nuestro acercamiento enfatiza de forma natural la relación de inversa entre funciones exponenciales y logarítmicas, ya que las fichas que se usan para una función sirven para la otra intercambiando salidas por entradas.

Además, contribuye a la literatura al examinar cómo los estudiantes pueden extender la idea de multiplicación repetida a una función exponencial en los números racionales. Asimismo se constata que al utilizar material basado en las ideas de Ferrari-Escolá *et al.* (2016) con una estrategia pedagógica adecuada, la enseñanza utilizando el ciclo ACE (actividades en grupos, discusión en clase, y ejercicios), los estudiantes de nivel secundario pueden construir un Proceso de función exponencial en los racionales a partir de multiplicación repetida. En este estudio no se consideró el entendimiento gráfico de las funciones exponenciales y por lo tanto no se consideró la extensión de función exponencial de los racionales a todos los reales.

Las observaciones del estudio permiten refinar las actividades. Por ejemplo, proponemos que para que los estudiantes construyan un Proceso de potencia fraccionaria unitaria se debe dar énfasis a la representación verbal. Anticipamos que este énfasis va a contribuir a que los estudiantes construyan un Proceso de potencia fraccionaria unitaria que luego pueden encapsular en un Objeto sobre el cual hacer acciones para extender función exponencial a los racionales.

Para finalizar, los resultados de este estudio facilitaron datos que nos permitieron contestar la primera pregunta de investigación: La descomposición genética que se propone en este segundo ciclo, ¿qué tan bien describe cómo los estudiantes entienden función exponencial? Podemos afirmar que la DG describió efectivamente lo que la mayor parte de los estudiantes pudieron construir para entender función exponencial. También, los datos obtenidos en el estudio nos permitieron contestar la segunda pregunta de investigación: De las construcciones mentales conjeturadas en la descomposición genética de función exponencial, ¿cuáles son las construcciones que estudiantes de secundaria dan muestra de poder hacer y las que les causan dificultad? Las construcciones mentales conjeturadas en la descomposición genética que los estudiantes evidenciaron poder hacer fueron: Proceso de multiplicación repetida, coordinación de un Proceso de multiplicación repetida con un Proceso de exponenciación para construir un Proceso de función exponencial en los naturales, extender el Proceso de función exponencial en los naturales a un Proceso de función exponencial en los enteros y, para la mitad de los estudiantes, construir un Proceso de potencia fraccionaria unitaria. Tres de los cuatro estudiantes que evidenciaron construir este último Proceso lo pudieron extender a un Proceso de función exponencial en los racionales. La construcción más difícil para los estudiantes resultó ser la de un Proceso de Potencia fraccionaria unitaria.

Una limitación del estudio es que trata solo un aspecto de las funciones exponenciales. La investigación debe expandirse para incluir gráficas de funciones exponenciales, funciones logarítmicas, y otros temas tales como ecuaciones exponenciales y logarítmicas y el uso de funciones exponenciales y logarítmicas para diversas aplicaciones de modelado.

REFERENCIAS

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E. Oktac, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). *APOS Theory A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education.* Springer New York Heidelberg Dordrecht London. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6

Borji, V., Surynková, P., Kuper, E., y Robová, J. (2023). University students' understanding of exponential and logarithmic concepts: in case of real-world situations. *Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)*, 2291–2298. Alfréd Rényi Institute of Mathematics; Eötvös Loránd University of Budapest, Hungary. ⟨hal-04404329⟩

Confrey, J., y Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 135–164. https://doi.org/10.1007/BF01273661

Confrey, J., y Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(1), 66–86. https://doi.org/10.2307/749228

Díaz-Berríos, T., y Martínez-Planell, R. (2022). High school student understanding of exponential and logarithmic functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *66*, 1–20. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100953

Dubinsky, E., y McDonald, M. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergrad mathematics education. En D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study* (pp. 273–280). Kluwer. https://doi.org/10.1007/0-306-47231-7

Ellis, A. B., Özgur, Z., Kulow, T., Williams, C. C., y Amidon, J. (2015). Quantifying exponential growth: Three conceptual shifts in coordinating multiplicative and additive growth. *The Journal of Mathematical Behavior, 39*, 135–155. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.06.004

Ellis, A. B., Özgur, Z., Kulow, T., Dogan, M. F., y Amidon, J. (2016). An exponential growth learning trajectory: Students' emerging understanding of exponential growth through covariation. *Mathematical Thinking and Learning, 18*(3), 151–181. https://doi.org/10.1080/10986065.2016.1183090

Ferrari-Escolá, M., Martínez-Sierra, G., y Méndez-Guevara, M. E. M. (2016). Multiply by adding: Development of a logarithmic-exponential covariational reasoning in high school students. *The Journal of Mathematical Behavior, 42*, 92–108. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.03.003

Kidron, I. (2018). Students' conceptions of irrational numbers. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *4*(1), 94-118. https://doi.org/10.1007/s40753-018-0071-z

Kuper, E., y Carlson, M. (2020). Foundational ways of thinking for understanding the idea of logarithm. *Journal of Mathematical Behavior, 57*(100740) 1–18. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.100740

Murmur, O., y Zazkis, R. (2021). Irrational gap: sensemaking trajectories of irrational exponents. *Educational Studies in Mathematics*, *107*, 25-48. https//doi.org/10.1007/s10649-021-10027-2.

Sirotic, N., y Zazkis, R. (2007). Irrational numbers: The gap between formal and intuitive knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *65*(1), 49–76. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9041-5

Weber, K. (2002). Students' understanding of exponential and logarithmic functions. En *Proceedings of the 24th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1019–1027, Athens, GA.

Autor de correspondencia
Tomás Díaz-Berríos

Dirección Calle Juan D Rivera y Santiago, 00720,
Orocovis, Puerto Rico
tomasmat301@gmail.com