

Evaluación de la Razonabilidad Numérica en alumnado de secundaria

Assessment of Numerical Reasonableness in secondary school students

Macarena Fariña,¹ Alicia Bruno²

Resumen: Este trabajo analiza cómo alumnado de secundaria (13-14 años) evalúa si el resultado de una repuesta numérica es razonable. Se realizó una prueba escrita con cinco actividades en las que aparecen operaciones con números decimales y fracciones. Las actividades están diseñadas para que el alumnado pueda utilizar justificaciones diferentes para evaluar la razonabilidad numérica. Entre estas justificaciones tenemos la adecuación al contexto, el cálculo operatorio, la estimación numérica y la estimación gráfica. También se analiza la seguridad que manifiesta el alumnado con su respuesta. Los resultados indican que la evaluación de la razonabilidad numérica y la seguridad de las repuestas varía según el tipo de actividades y que el alumnado es capaz de evaluar con seguridad la razonabilidad de una actividad numérica, aunque recurre mayoritariamente al uso de cálculos exactos por encima de otros tipos de justificaciones. Este resultado pone de manifiesto la importancia de fomentar en el alumnado el uso de diferentes estrategias para evaluar si una respuesta numérica es razonable.

Palabras claves: *razonabilidad numérica; seguridad; estimación numérica; estimación gráfica; cálculo.*

Fecha de recepción: 27 de febrero de 2024. **Fecha de aceptación:** 10 de abril de 2025.

¹ Universidad de la Laguna, Tenerife, España, macarena.farcast@gmail.com, <https://orcid.org/0009-0008-8259-4258>

² Universidad de la Laguna, Tenerife, España, abruno@ull.edu.es, <https://orcid.org/0000-0002-0154-8073>

Abstract: This paper analyzes how secondary school students (13-14 years old) evaluate the result of a numerical answer in a reasonable way. A written test was conducted with five activities involving operations with decimal numbers and fractions. The activities were designed for students to employ different justifications to assess numerical reasonableness. These justifications include contextual appropriateness, operative calculation, numerical estimation, and graphical estimation. It also examines the confidence expressed by the students in the answers they have provided. The results indicate that the assessment of numerical reasonableness and confidence in responses varies according to the type of activities and students can assess the reasonableness of numerical tasks with confidence, although they mainly resort to the use of exact calculations over other types of justifications. This result highlights the importance of encouraging students to use different strategies to assess numerical reasonableness.

Keywords: *numerical reasonableness; confidence; numerical estimation; graphical estimation; calculation*

INTRODUCCIÓN

El sentido numérico se define como una red conceptual bien organizada que permite relacionar los números con las operaciones y sus propiedades para resolver problemas de una forma creativa y flexible (Swoder, 1992, p. 381). Tanto documentos curriculares como distintas investigaciones han caracterizado el sentido numérico a través de componentes con el fin de hacerlo operativo para organizar su desarrollo en el aula y en la investigación (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1989; McIntosh, *et al.*, 1992; Reys y Yang, 1998; Yang, 2003). Aunque con algunas diferencias entre unos trabajos y otros, hay un consenso en señalar las siguientes componentes fundamentales: a) comprender el significado de los números; b) reconocer el tamaño relativo y absoluto de los números; c) usar puntos de referencia; d) usar representaciones de los números y las operaciones; e) identificar el efecto relativo de las operaciones; f) establecer relaciones entre las operaciones; g) hacer uso de las propiedades de las operaciones para facilitar un cálculo numérico; h) estimar el resultado de operaciones; comprender la relación entre el contexto del problema y la operación necesaria; i) ser consciente de que existen múltiples estrategias; j) evaluar

el resultado y reconocer si es razonable. Estas componentes no son independientes y suelen combinarse en la resolución de diferentes actividades numéricas, al tiempo que no deben considerarse cerradas (McIntosh, *et al.*, 1992). Este trabajo se centra en la última de las componentes citadas, la cual siguiendo la terminología de Alajmi (2009) denominaremos de forma más concisa evaluar la razonabilidad numérica de una tarea o actividad.

McIntosh, *et al.* (1992) indican que, cuando se llega a una solución, las personas con sentido numérico examinan su respuesta en función de la situación planteada originalmente (incluyendo los números y las preguntas formuladas), para determinar si su respuesta “tiene sentido”. Muchos estudiantes a menudo omiten esta evaluación quizás porque no sienten que el resultado sea importante, más allá de haber llegado a una solución, o puede que observen que esta acción no es requerida por el profesor de forma explícita. Para que el alumnado desarrolle la habilidad de evaluar un resultado numérico, debe fomentarse que se haga preguntas adecuadas antes del proceso de realización de la tarea: “¿qué resultado espero obtener?”, “¿a qué número estará próximo el resultado?”; y después de finalizar la resolución: “¿el resultado está próximo a lo que esperaba?” o “¿tiene sentido esta solución en este contexto?”. Estas últimas preguntas pueden asociarse a la última fase del proceso de resolución de un problema indicado por Polya (1945), y que denomina “mirar hacia atrás” o “evaluar el resultado”. En este trabajo la entendemos de forma más amplia, pues es una reflexión que debe realizarse en cualquier ejercicio numérico, e incluso, en cualquier paso de su proceso de realización.

La evaluación del resultado numérico es importante en situaciones dentro y fuera del aula. De hecho, indica Grayer (2009) que, plantearse si un dato numérico o un resultado a una operación es razonable se utiliza en una amplia gama de actividades cotidianas, que van desde valorar si la cuenta en un restaurante es correcta, comprobar el cambio de dinero al pagar, decidir la dosis de un medicamento, etcétera.

Por otra parte, son varios los currículos europeos que incluyen el sentido numérico como uno de los objetivos a trabajar en el aula, sin embargo, en diversas ocasiones se promueven poco sus componentes, poniendo el foco en la enseñanza de procesos algorítmicos (Clarke *et al.*, 2012). En España, la nueva ley de Educación en el currículo de Matemáticas de la Educación Secundaria Obligatoria (Real Decreto 217/2022), incluye entre sus saberes básicos el sentido numérico, indicando que “se caracteriza por la aplicación del conocimiento sobre numeración y cálculo en distintos contextos, y por el

desarrollo de habilidades y modos de pensar basados en la comprensión, la representación y el uso flexible de los números y las operaciones”. Como se observa, se sitúa el sentido numérico muy próximo al indicado por Swoder (1992). A su vez, una de las competencias específicas de este nivel educativo hace referencia a que alumnado debe ser capaz de “analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para evaluar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global”.

Como veremos en el siguiente apartado, hasta el momento los estudios realizados sobre razonabilidad numérica se sitúan mayoritariamente en Asia y Estados Unidos (Alajmi y Reys, 2007, 2010; Sianturi *et al.*, 2023; Yang, 2022; Yang y Sianturi, 2019a, 2019b, 2021), y en menor medida en el contexto español (Almeida y Bruno, 2016, 2017). Teniendo en cuenta la gran importancia que tiene esta habilidad en la vida cotidiana, a nivel curricular y en el desarrollo del aprendizaje matemático en general, se muestra necesario avanzar en el conocimiento de cómo la aplican los estudiantes. En este caso, el presente trabajo expone los resultados de una prueba para observar la capacidad para valorar la razonabilidad de respuestas numéricas de alumnado de 2º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) en España.

MARCO TEÓRICO

Evaluar de forma efectiva lo razonable de un resultado en una tarea numérica requiere conocer diferentes estrategias numéricas y tener la inclinación a dar argumentos matemáticos, más allá de volver a efectuar las operaciones ya realizadas (pues esto último, en ocasiones, es muy costoso en determinadas tareas). En este sentido, Alajmi y Reys (2010) estudiaron cómo 200 estudiantes de secundaria de Taiwán valoraban si sus respuestas a tareas numéricas eran o no razonables. Observaron que más del 60% de los estudiantes repetían los algoritmos escritos, sin poner en juego otras habilidades como cálculo mental, estimación, uso de puntos de referencia o aplicación de propiedades de las operaciones. Este mismo hecho ya había sido concluido con anterioridad por McIntosh *et al.* (1992), argumentando que el alumnado optaba por repetir sus cálculos, antes que usar otros argumentos basados en el contexto o en las propiedades numéricas. Del mismo modo, Yang y Sianturi (2019a, 2021) realizaron estudios con alumnado de 6º grado de primaria en Indonesia y Hong Kong llegando a la conclusión

de que la dificultad para valorar la razonabilidad de una respuesta numérica provenía principalmente de errores conceptuales y escasa comprensión de las propiedades de los números y las operaciones. En concreto, Yang y Sianturi (2019b) indican que el alumnado no desarrolla correctamente esta componente del sentido numérico debido: a) al arraigo que tienen en el uso de reglas o algoritmos escritos; b) a que poseen conceptos erróneos relacionados con contenidos matemáticos esenciales; y c) que están centrados en prepararse para realizar exámenes estatales en los que no es necesario usar estrategias más flexibles y propias de un adecuado sentido numérico. Este último hecho hace que el profesorado, e incluso los libros de texto, no los promuevan en el aula (Alajmi y Reys, 2007). Una razón puede ser que los propios profesores no están habituados a evaluar sus respuestas o incluso presentan ciertas debilidades matemáticas para ello. Así, Veloo (2010) en un estudio realizado en Brunei Darussalam comparó las habilidades de 237 profesores de primaria y 35 de secundaria, observando un mayor dominio del sentido numérico por parte de los segundos, aunque lo consideró bajo en ambos grupos. Además, señaló que las áreas de debilidad de los profesores de primaria eran similares a la de los estudiantes de secundaria. En concreto observó que la mayoría de ellos no demostraron el uso de estrategias de estimación para juzgar la razonabilidad de los resultados de cálculo. Por ejemplo, 39% de profesores de primaria entendieron que $589 \times 0.95 = 595.45$ era una respuesta razonable y 23% lo indicó para $45 \times 1.05 = 39.65$. Estos resultados se derivan de sus ideas previas sobre los números naturales, que los llevan a pensar que multiplicar siempre da un número mayor, mientras que dividir da un número menor (Bell *et al.*, 1984; Graeber *et al.*, 1989).

Por otro lado, Alajmi y Reys (2007), en su estudio realizado en Taiwán, constataron que, aunque el profesorado de matemáticas de secundaria consideraba útil saber valorar lo razonable de las respuestas numéricas, no trabaja estrategias para ello en el aula. En este mismo estudio, el profesorado afirmó que cuando un estudiante resuelve una tarea numérica eligiendo las operaciones adecuadas, aunque cometa un error de cálculo que le lleva a una respuesta alejada de la correcta, evaluará su respuesta como razonable. Es decir, para los docentes de dicho estudio una respuesta a una cuestión numérica es razonable si se realizan los cálculos que pretendía el enunciado, aunque el resultado se aleje bastante del correcto. Por otro lado, aunque estos profesores reconocían que la estimación es una herramienta útil en la vida cotidiana, consideraban que el aprendizaje en la escuela debe centrarse en adquirir otro tipo de conocimiento numérico, asociado

a la adquisición de procedimientos estándares curriculares. En este sentido, en el currículo español actual (Real Decreto 217/2022), se promueve una mirada alentadora hacia la promoción de esta componente del sentido numérico a través de una competencia específica.

Se han realizado pocas investigaciones sobre la capacidad del alumnado para juzgar la razonabilidad de las respuestas y, normalmente se ha estudiado como un aspecto secundario en estudios que analizan la comprensión y uso de la estimación numérica (Alajmi, 2009). También se ha analizado en relación con otras componentes del sentido numérico. Es el caso de Yang *et al.* (2008), quienes estudiaron la habilidad de los alumnos de quinto grado de primaria en Taiwán, respecto a las cuatro componentes del sentido numérico siguientes: “reconocer el tamaño relativo de los números”; “usar múltiples representaciones de los números y las operaciones”; “comprender el efecto relativo de las operaciones”; y “reconocer cuando un resultado obtenido es razonable”. Concluyeron que los mejores resultados se encuentran en las actividades sobre “reconocer el tamaño relativo de los números”, mientras que las mayores dificultades se referían a “reconocer cuando un resultado obtenido es razonable”.

Yang y Sianturi (2019b) invitan a priorizar el desarrollo de estrategias de sentido numérico en el aula por encima de la enseñanza de reglas y algoritmos. Entre las estrategias propuestas se encuentran usar la estimación numérica y las representaciones múltiples y valorar la razonabilidad de sus respuestas. Como se decía con anterioridad, las componentes del sentido numérico están relacionadas entre sí, por lo que es evidente que para desarrollar una correcta razonabilidad será necesario tener otras estrategias como la estimación numérica o las múltiples representaciones de los números y las operaciones.

Alajmi y Reys (2007, 2010) indican que los criterios que el alumnado tiene para valorar la razonabilidad de una respuesta numérica son: a) la relación entre los números y el efecto de las operaciones y b) el sentido práctico de la respuesta. El primero de los criterios se refiere al conocimiento del alumnado sobre la relación que existe entre los números y las operaciones, que le permite identificar la frontera de una respuesta razonable. Por ejemplo, si se pregunta si es razonable este resultado: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$, el alumnado capaz de establecer relaciones entre los números podría indicar, sin hacer cálculo, que, puesto que $\frac{1}{2}$ es la mitad de la unidad y se suma un poco más ($\frac{1}{3}$), no tendría sentido que la solución fuera inferior a la mitad de la unidad ($\frac{2}{5}$). Sin embargo, el alumnado suele recurrir a ideas erróneas sobre fracciones como la que se establece en el ejemplo anterior de sumar dos fracciones sumando numeradores y

denominadores por separado porque no ha desarrollado una representación mental adecuada del concepto de fracción (Cramer *et al.*, 2018) o por el fuerte arraigo del conocimiento previo de los números naturales que los lleva a aplicar reglas similares de operatoria (Vamvakoussi *et al.*, 2012). El segundo de los criterios se refiere a la capacidad del alumnado para establecer relaciones entre la solución obtenida y el contexto. Por ejemplo, una fracción no puede ser la respuesta razonable para un problema de división en el que se da un total de personas y un número de coches, y se quiere averiguar cuántas personas pueden ir en cada coche. Ambos criterios están interrelacionados y permiten al alumnado poner en práctica diferentes estrategias entre las que destacan la estimación numérica y el uso de puntos de referencia numéricos para determinar la razonabilidad de una respuesta. Por otra parte, diferentes estudios han mostrado que apoyarse en representaciones es una habilidad importante asociada al sentido numérico y se incluye como una de sus componentes. Akkaya (2016) observó que usar diferentes representaciones es una estrategia útil para valorar si un resultado es razonable en el contexto de tareas con números decimales. Por su parte, Cramer *et al.*, (2018) indican que cuando el alumnado conoce en profundidad una representación gráfica de un concepto matemático, es capaz de desarrollar habilidades de cálculo y estimación numérica que le permiten valorar lo razonable de las respuestas numéricas. Es por ello por lo que, en este trabajo, incluimos como tercer criterio para valorar la razonabilidad de una respuesta numérica: c) utilizar representaciones gráficas.

Por otro lado, el alumnado será incapaz de desarrollar estos criterios para valorar la razonabilidad de una respuesta numérica si posee ideas matemáticas erróneas. Varios estudios relacionan el éxito de los estudiantes a la hora de indicar una respuesta para resolución de un problema con la seguridad que manifiestan sobre dichas respuestas y razonamientos (Caleon y Subramaniam, 2010; Yang y Sianturi, 2019a, 2019b, 2021). Estos estudios se han llevado a cabo utilizando test de tres niveles (pregunta y respuesta, justificación de la respuesta, seguridad en la respuesta) con los que se posibilita identificar las ideas erróneas en relación con el tópico de estudio, presentando la siguiente clasificación del alumnado: (1) una respuesta correcta o incorrecta con bajo grado de seguridad indica lagunas de conocimiento; (2) una respuesta correcta con un alto grado de seguridad indica un profundo conocimiento de los conceptos; (3) una respuesta incorrecta con un grado de seguridad alto indica la presencia de ideas erróneas; (4) un grado de seguridad bajo con un desempeño alto puede atribuirse al estilo personal del alumnado (con escasa confianza en sí mismo)

o a una laguna de conocimiento que lo empuja a responder al azar y acertar en sus respuestas.

La evaluación de la confianza o seguridad de su respuesta promueve en el alumnado un pensamiento más profundo y juega un papel esencial en el desarrollo del aprendizaje (Foster, 2016). Además, conocer con qué seguridad el alumnado se está enfrentando a una actividad matemática, posibilita que los docentes puedan elegir la secuencia de aprendizaje más apropiada, adaptándola a las necesidades individuales. Esta adaptación es de suma importancia dado que el alumnado que ha desarrollado ideas erróneas con un alto grado de confianza suele considerar razonables sus argumentos, a pesar de que le lleve a dar respuestas incorrectas, y estos pensamientos son resistentes al cambio (González-Forte *et al.*, 2023).

OBJETIVOS

A pesar de la importancia que tiene evaluar las respuestas en cualquier tarea matemática y en especial aquellas que abordan cuestiones numéricas, encontramos escasos estudios que analicen directamente la razonabilidad numérica a nivel internacional. Este hecho cobra importancia en el ámbito español dado el énfasis en el currículo actual en el desarrollo de esta habilidad matemática. Por otra parte, el estudio sobre la seguridad del alumnado en sus valoraciones aporta una visión complementaria respecto a sus decisiones, sean correctas o no.

Tras hacer una revisión de la literatura concerniente a la razonabilidad y seguridad en sus respuestas del alumnado, podemos indicar los objetivos del presente estudio:

- Evaluar el éxito por parte del alumnado de secundaria para valorar la razonabilidad de la solución de una tarea numérica.
- Observar las justificaciones que elige el alumnado de secundaria para valorar la razonabilidad de una solución numérica.
- Relacionar las justificaciones que elige el alumnado de secundaria con la seguridad de su respuesta.

METODOLOGÍA

PARTICIPANTES

Se realizó un estudio descriptivo con 46 estudiantes (27 chicas y 19 chicos) de Segundo de Educación Secundaria Obligatoria de un colegio concertado de La Orotava (Tenerife). Se trata de un centro de línea 2 que abarca los estudios de Educación Infantil, Primaria y Secundaria. Los estudiantes de este centro educativo provienen mayoritariamente de la zona centro de La Orotava, donde la actividad económica radica en el sector servicios y la agricultura. Las familias participan, generalmente, en las actividades a las que se les convoca desde el centro y su nivel socioeconómico es medio-bajo.

En cuanto a sus resultados académicos en matemáticas, hay que indicar que se trata de un grupo heterogéneo en el que encontramos a 11 estudiantes con resultados académicos de sobresaliente y 10 estudiantes con resultados académicos bastante bajos.

INSTRUMENTO

Para llevar a cabo el estudio se realizó una prueba consistente en cinco actividades numéricas. En dos de ellas, el alumnado debía valorar si la solución ya dada era correcta, mientras que en las otras tres debía elegir la respuesta correcta entre varias opciones. En todos los casos, se solicitaba una justificación de su respuesta. Las actividades eran de respuesta múltiple, por lo que el alumnado ya tenía a su disposición algunos argumentos para justificar sus elecciones o bien podía indicar sus propios argumentos. La prueba se llevó a cabo realizando cada actividad un día diferente durante dos semanas consecutivas y dejando al alumnado un máximo de 15 minutos para resolverla. Previamente se les indicaba que no era necesario usar lápiz y papel para realizar cálculos y que el uso de la calculadora no estaba permitido. Las sesiones en las que se llevaba a cabo la prueba se intercalaron con sesiones habituales de estudio de otros contenidos matemáticos.

Para la elaboración de estas actividades se tomó como ejemplo la prueba en tres niveles de Yang y Sianturi (2019a, 2021) en la cual, en primer lugar, el alumnado elige una opción de respuesta, a continuación, elige una justificación y, por último, indica el grado de seguridad con el que ha respondido. Nuestro trabajo difiere del anterior en que se les permitió elegir más de una opción de justificación

y una opción abierta a “otros motivos o soluciones” en la que podía expresar sus propios argumentos. Se diseñó de esta forma porque, en estudios previos de las autoras (Fariña y Bruno, 2021), se constató que el alumnado puede tener más de una razón para justificar si una respuesta es razonable o no mostrar acuerdo con ninguna de ellas. Ambos aspectos podrían contribuir a que el alumnado mostrara una mayor seguridad en las respuestas. Además, también se cambió la forma de realizar la prueba, dado que se llevó a cabo en papel en la clase habitual, por parte de una investigadora que al tiempo es profesora de los estudiantes, en vez de hacerlo con ordenadores como en el caso de los autores citados. El hecho de realizarlo en papel puede contribuir a una mayor facilidad para realizar una representación gráfica o una expresión matemáticamente más compleja de escribir con el ordenador. Por otra parte, las actividades fueron de creación propia excepto la actividad 3, tomada de Yang y Sianturi (2019a).

Se presentan a continuación los enunciados de las diferentes actividades utilizadas, junto con una explicación de estas. En ellas indicamos lo que se ha considerado una respuesta correcta e incorrecta, respecto de lo razonable. En general, se considera que una respuesta es correcta cuando el estudiante elige una opción que valora lo razonable del resultado de la tarea con una justificación válida, e incorrecta en caso contrario. Esto se hace en cada actividad desde diferentes perspectivas que se detallan en la tabla 1.

Tabla 1. Tipos de actividades

Actividad	Tipo de actividad
1	Razonabilidad de la solución respecto al contexto
2	Razonabilidad de la solución respecto al resultado de las operaciones en un contexto
3	Razonabilidad de la solución respecto al resultado de las operaciones con estimación numérica
4	Razonabilidad de la solución a través de la estimación numérica en suma de fracciones
5	Razonabilidad de la solución a través de la estimación numérica y gráfica en suma de fracciones

En la Actividad 1 (figura 1) se muestra un problema de división medida ya resuelto. En este caso, la evaluación de la respuesta tiene que ver con la no adecuación al contexto, dado que no es razonable decir que “va a comprar 9,75 cajas” aunque este sea el resultado numérico de la operación. De este modo, consideramos como respuesta correcta cuando se elige la opción negativa n3. Las respuestas afirmativas a1 – a4 no se consideran correctas por no evaluar el resultado respecto al contexto, aunque se hayan evaluado los cálculos adecuadamente.

Andrés va a comprar cajas para guardar 234 bolígrafos. Quiere poner 24 bolígrafos en cada una. ¿Cuántas cajas necesita comprar Andrés? $234:24 = 9,75$ Solución: Andrés dice que va a comprar 9,75 cajas	
¿Crees que la respuesta de Andrés es correcta? ☐ Sí ☐ No	
En caso afirmativo, ¿por qué? a1) Ha elegido la operación adecuada a2) Ha resuelto correctamente la operación a3) El resultado es exacto a4) Otro motivo:	En caso negativo, ¿por qué? n1) No ha elegido la operación adecuada n2) No ha resuelto correctamente la operación n3) La operación y el resultado son correctos, pero no tiene sentido dar una solución decimal n4) Otro motivo
¿Cómo de seguro estás de tu respuesta? ☐ Nada seguro ☐ Poco seguro ☐ Neutral ☐ Seguro ☐ Muy seguro	

Figura 1. Actividad 1.

En la solución al problema de la Actividad 2 (figura 2) hay un error de cálculo en la resta $20 - 5,85 = 15,15$, que lleva a que la solución dada no sea razonable. Esto puede descubrirse por estimación, observando que el resultado no puede ser mayor de 15 dado que se está restando 5,85 a 20, o bien, realizando las operaciones. Por ello, se da a los estudiantes dos opciones correctas: n2) las operaciones elegidas son adecuadas, pero hay un error de cálculo en la devolución; y n3) en la que se razona empleando una estimación numérica en el contexto del dinero. Aunque previamente se informaba al alumnado que no era necesario el uso de lápiz y papel, se incluye esta opción para valorar el alumnado que sigue priorizando el uso del cálculo sobre otras estrategias.

Cinco amigos se reúnen para desayunar. Tres toman café mientras que el resto elige zumo. El precio de cada café es 0,85 € y el zumo 1,65 €. Si pagamos con un billete de 20€, ¿cuánto nos devuelven? $0,85 \cdot 3 = 2,55$ $1,65 \cdot 2 = 3,30$ Cuenta: $2,55 + 3,30 = 5,85\text{€}$ Devolución: $20 - 5,85 = 15,15\text{€}$ Solución: Si pagamos con un billete de 20€ nos devolverán 15,15€	
¿Crees que la solución dada es correcta? ☐ Sí ☐ No	
En caso afirmativo, ¿por qué? a1) Se han elegido las operaciones adecuadas a2) Se han resuelto correctamente las operaciones a3) La respuesta final es correcta a4) Otro motivo:	En caso negativo, ¿por qué? n1) Las operaciones elegidas no son adecuadas n2) Las operaciones elegidas son adecuadas, pero hay un error de cálculo en: A - el precio de cafés y zumos B - el precio final C - la devolución n3) No tiene sentido. Si cuesta más de 5€ el desayuno, no pueden devolverte 15€ n4) Otro motivo
¿Cómo de seguro estás de tu respuesta? ☐ Nada seguro ☐ Poco seguro ☐ Neutral ☐ Seguro ☐ Muy seguro	

Figura 2. Actividad 2.

En la Actividad 3 (figura 3), tomada de Yang y Sianturi (2019a), el alumnado debe elegir qué operación se aproxima más a un resultado dado, siendo operaciones de suma y multiplicación que involucran números decimales. En este caso la justificación de la opción se presenta para que el alumnado dé los argumentos que considere oportunos y de esta forma observar cómo argumentaban ellos mismos su respuesta. Codificamos como respuesta correcta cuando el estudiante elige la opción b), argumentando a través del cálculo o la estimación, generalmente usando la propiedad de que cualquier número multiplicado por 1 da el mismo número.

Sin usar lápiz y papel ni calculadora, ¿cuál de las siguientes operaciones se aproxima más a 1? a) $0,9 + 1$ b) $0,9 \cdot 1$ c) $0,9 + 0,9$ d) $0,9 \cdot 0,9$
¿En qué te has basado para dar tu respuesta?
¿Cómo de seguro estás de tu respuesta? ☐ Nada seguro ☐ Poco seguro ☐ Neutral ☐ Seguro ☐ Muy seguro

Figura 3. Actividad 3

La Actividad 4 (figura 4) proporciona cinco opciones para que el alumnado elija el resultado de una suma de fracciones junto a un argumento. En este caso, se considera como respuesta correcta aquella que opta por la realización del cálculo (opción c) o por una estimación numérica (opción d), dado que las otras opciones implican usar una regla operatoria incorrecta. Como en las actividades anteriores, se les da la posibilidad de elegir la opción del cálculo, aunque se les indique previamente que no es necesario usar lápiz y papel, para ver en qué proporción el alumnado se siente más seguro recurriendo exclusivamente al uso de cálculos frente al que se siente cómodo haciendo uso de estimaciones numéricas.

Estima el resultado de la siguiente operación con fracciones: $\frac{4}{5} + \frac{7}{6} = ?$
a) 11/11 porque sumamos los numeradores y denominadores entre sí. b) 11/30 porque calculamos el m.c.m. de los denominadores y sumamos los numeradores. c) 59/30 porque reducimos a común denominador y operamos las fracciones obtenidas. d) 2 aproximadamente, porque cada fracción representa casi la unidad, por lo que su suma está cerca de dos. e) Otra solución:
¿Cómo de seguro estás de tu respuesta? ☐ Nada seguro ☐ Poco seguro ☐ Neutral ☐ Seguro ☐ Muy seguro

Figura 4. Actividad 4.

La Actividad 5 (figura 5) se centra en la estimación decimal o en el uso de gráficas de rectángulos para estimar la solución de la suma de dos fracciones unitarias cuyo resultado es menor que la unidad. A diferencia de la actividad anterior, se busca alejar a los estudiantes de las justificaciones basadas en los cálculos de las reglas de suma de fracciones. Para ello se les ofrece dos opciones con estimaciones de tipo gráfico y una opción con estimación pasando las fracciones a su expresión decimal. Se darán como correctas las respuestas que indiquen las opciones a) y/o c), además de la d) con una explicación adecuada.

Estima el resultado de la siguiente operación con fracciones: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = ?$
a) 0,5 aproximadamente, porque cada fracción se aproxima a 0,25 por lo que su suma está cerca de 0,5 b) 0,75 aproximadamente, puesto que al realizar la gráfica tenemos: 
c) 0,6 aproximadamente, puesto que al realizar la gráfica tenemos: 
d) Otra solución:
¿Cómo de seguro estás de tu respuesta? ☐ Nada seguro ☐ Poco seguro ☐ Neutral ☐ Seguro ☐ Muy seguro

Figura 5. Actividad 5.

Al finalizar cada actividad, el estudiante debía indicar el grado de seguridad con el que había dado su respuesta. Las opciones eran: nada seguro, poco seguro, neutral, seguro o muy seguro. Este grado de seguridad nos indicaba si el alumnado tenía confianza en sus conocimientos para hacer la elección adecuada o no, a la vez que nos permitía comprobar si las respuestas más razonables se corresponden con el alumnado más seguro de sus capacidades o si, por el contrario, abunda una falsa seguridad entre estudiantes con pocas habilidades para valorar la razonabilidad de una respuesta numérica.

ANÁLISIS

Para llevar a cabo el análisis de los resultados se tuvo en cuenta dos aspectos. En primer lugar, se clasificaron las respuestas del alumnado en Correcta e Incorrecta, tal y como hemos detallado en el apartado de instrumento. Además, se subclasificaron sus respuestas, en aquellas actividades en las que fuera posible, según su tipo de argumento: contexto (CT), cálculo (C), estimación numérica (EN), estimación gráfica (EG) y mezcla o combinación de argumentos presentes en la actividad (M). En este caso, también fue preciso establecer una categoría de “Sin argumento” (A) para aquellos estudiantes que no elegían un argumento para su respuesta, y una categoría de “Incoherente” (I) para estudiantes que eligen un argumento que no tiene sentido según su primera elección de respuesta o que eligen dos argumentos incompatibles entre sí.

En segundo lugar, se analizó el grado de seguridad del alumnado en cada actividad y se relacionó con sus respuestas. Se codificaron como: Nada seguro (NS), Poco seguro (PS), Neutral (N), Seguro (S) o Muy seguro (MS). De esta forma, podemos valorar si el alumnado posee ideas erróneas en relación con las operaciones con números decimales y fracciones. Los estudios previos en los que se ha relacionado los resultados de los estudiantes con su grado de seguridad a través del uso de una prueba en tres niveles han sido cuantitativos, con un alto número de estudiantes respondiendo a las actividades (Sianturi *et al.*, 2024; Yang y Sianturi, 2019a, 2019b, 2021). En estos trabajos, se otorgaron diferentes puntuaciones a las justificaciones del alumnado en función de si estaban basadas en el uso del sentido numérico, el cálculo, conceptos erróneos (lo que nosotros hemos catalogado como incoherente) o si no aportaban un argumento para su respuesta.

En nuestro trabajo no seguimos ese análisis estadístico, puesto que trabajamos con una muestra de 46 estudiantes con un objetivo exploratorio y descriptivo. No obstante, sí pudimos relacionar los resultados del alumnado con su seguridad adaptando la escala de desempeño respecto a la de los trabajos anteriormente citados. Para ello, consideramos si su respuesta es correcta o no. Se define la siguiente escala de desempeño:

- Desempeño alto: 4 o 5 respuestas correctas en las 5 actividades.
- Desempeño medio-alto: 3 respuestas correctas.
- Desempeño medio-bajo: 2 respuestas correctas.
- Desempeño bajo: 1 respuesta correcta o ninguna.

En cuanto a la escala de seguridad, coincide con la utilizada en los trabajos previamente citados, es decir, se otorga los valores de 1 punto para NS, 2 puntos para PS, 3 puntos para N, 4 puntos para S y 5 puntos para MS. Así, pudimos calcular la media de cada estudiante en las 5 actividades y clasificarlas de la siguiente forma:

- Seguridad alta: mayor o igual a 3.3
- Seguridad media: entre 2.9 y 3.3
- Seguridad baja: menor o igual que 2.9

RESULTADOS

Se presentan los resultados de las repuestas a las actividades de la prueba, observando la elección de respuestas correctas e incorrectas, así como el grado de seguridad del alumnado con su elección.

En la tabla 2 se recogen las repuestas del alumnado a cada una de las actividades, indicando los argumentos elegidos en cada una. En el caso de que no se dé un tipo de argumento en una actividad, se indica poniendo un guion.

Tabla 2. Respuestas correctas, incorrectas y argumentos de las Actividades

	Correcta						Incorrecta			Blanco
	CT	C	EN	EG	M	A	C	EG	I	
Actividad 1	26	-	-	-	-	-	18	-	2	-
Actividad 2	-	21	2	-	17	-	4	-	1	1
Actividad 3	-	24	4	-	-	3	8	-	3	4
Actividad 4	-	15	1	-	1	-	28	-	1	-
Actividad 5	-	2	7	12	5	-	-	12	8	-

Como se aprecia en la tabla 2, en las Actividades 2 y 3, la mayoría del alumnado opta por respuestas correctas. En las Actividades 1 y 5, aproximadamente la mitad del alumnado opta por respuestas correctas, mientras que en la Actividad 4 se encuentra un mayor número de respuestas incorrectas. Aunque se

evidencia que el alumnado es capaz de usar estimaciones numéricas y gráficas, la tendencia al uso del cálculo es alta.

Si profundizamos en estos resultados fijándonos en cada actividad, nos encontramos con que, en la Actividad 1, 26 de los 46 estudiantes eligen la opción correcta según el contexto, algunos ratificando en “otro motivo” que tendría que comprar 10 cajas (figura 6).

En caso negativo, ¿por qué?

- ☐ No ha elegido la operación adecuada
- ☐ No ha resuelto correctamente la operación
- ☒ La operación y el resultado son correctos, pero no tiene sentido dar una solución decimal
- ☒ Otro motivo: No puede comprar 9,75 cajas, tendría que comprar 10 cajas.

Figura 6. Respuesta correcta según el contexto de la Actividad 1.

También encontramos en esta Actividad 1 dos respuestas incoherentes al seleccionar al mismo tiempo dos opciones incompatibles y el caso de un estudiante que no termina de comprender el problema, tal y como se muestra en la figura 7.

¿Crees que la respuesta de Andrés es correcta? ☐ Sí ☒ No

En caso afirmativo, ¿por qué?

- ☐ Ha elegido la operación adecuada
- ☐ Ha resuelto correctamente la operación
- ☐ El resultado es exacto
- ☒ Otro motivo: La operación está bien pero tendrías que dividir los bolígrafos que tienes entre las cajas en las que los quieres colocar.

Figura 7. Respuesta incoherente por incompreensión del enunciado de la Actividad 1.

En la Actividad 2, 21 de los 46 estudiantes se sitúan en la categoría de Cálculo. Estos estudiantes repiten la operación para asegurarse de que el resultado es correcto. Al hacerlo, se dan cuenta de que el error radica en el cálculo de la devolución y eligen la opción n2)-C. Es el caso del estudiante de la figura 8 que además corrige el error de cálculo. Otros 17 estudiantes siguen esta misma

estrategia, pero optan al mismo tiempo por la estimación numérica, eligiendo la opción n3). Solo dos estudiantes eligen la estimación numérica n3) de forma única, por encima del cálculo. Los estudiantes que dan una respuesta incorrecta son los que no encuentran el error de cálculo, eligiendo opciones afirmativas, o bien, se contradicen en sus respuestas, eligiendo las opciones negativas n1) y n2)-B.

En caso negativo, ¿por qué?

- ☐ Las operaciones elegidas no son adecuadas
- ☒ Las operaciones elegidas son adecuadas pero hay un error de cálculo en ☐ el precio de cafés y zumos / ☐ el precio final / ☒ la devolución
- ☐ No tiene sentido. Si cuesta más de 5€ el desayuno, no pueden devolverte 15€
- ☒ Otro motivo: la solución de la devolución es 14'15€ y no 15'15€

Figura 8. Respuesta correcta basada en cálculos de la Actividad 2.

En la Actividad 3, se observa que 42 estudiantes respondieron a esta cuestión, mientras que 4 dejaron la respuesta en blanco. De los 31 estudiantes que eligieron la opción correcta (b), 24 de ellos manifiestan que han realizado cálculos para establecer cuál es la respuesta correcta. En algunos casos escriben los cálculos en el papel, obviando la indicación previa de no usar lápiz y papel, en otros casos podrían haberse realizado de forma mental. Estos cálculos implican, en múltiples ocasiones, descartar las otras opciones. Otros 4 estudiantes de estos 24 afirman que las soluciones de las opciones distintas a la b) son mayores que la unidad. Un ejemplo de esta justificación se observa en la figura 9 con un razonamiento incorrecto. Solamente 4 alumnos usaron una estimación numérica, centrándose en la propiedad de que cualquier número multiplicado por 1 da el número inicial.

B.- ¿Sin usar lápiz y papel, cuál de las siguientes operaciones se aproxima más a 1?

- ☐ $0,9 + 1$
- ☒ $0,9 \cdot 1$
- ☐ $0,9 + 0,9$
- ☐ $0,9 \cdot 0,9$

¿En qué te has basado para dar tu respuesta?

En la lógica de que $0,9 \cdot 1$ va a ser el mismo número, mientras que los otros se suman o se multiplican, lo que quiere decir que va a dar mayor resultado que (1).

Figura 9. Respuesta correcta en la Actividad 3 con razonamiento incorrecto.

Por otra parte, 11 estudiantes dan respuestas incorrectas: 5 estudiantes eligen la opción a), 3 la opción b), 1 la opción d) y 3 una elección múltiple. En estos casos se observa que el alumnado prefiere elegir las opciones de suma frente a la multiplicación y muestran dificultades en estas operaciones y sus propiedades.

En la Actividad 4, 17 estudiantes eligen una respuesta correcta frente a 29 que eligen explicaciones incorrectas. En concreto, 28 estudiantes señalaron las opciones a) o b) optando por una regla operatoria incorrecta. En la figura 10, observamos la respuesta de un alumno que manifestó aplicar la regla de la división ("multiplicar en cruz") para sumar las fracciones. En cuanto a la respuesta incoherente que aparece en esta actividad, el estudiante eligió dos respuestas contradictorias y escribió "No lo entiendo", lo que nos indica que existe un desconocimiento de la suma de fracciones o dudas en lo que debía contestar en la actividad.

Tu respuesta:

- ☐ $\frac{11}{11}$ porque sumamos los numeradores y denominadores entre sí.
- ☐ $\frac{11}{30}$ porque calculamos el m.c.m. de los denominadores y sumamos los numeradores.
- ☐ $\frac{59}{30}$ porque reducimos a común denominador y operamos las fracciones obtenidas.
- ☐ 2 aproximadamente, porque cada fracción es casi la unidad, por lo que su suma está cerca de dos.
- ☒ Otra solución: $\frac{10}{12}$. Porque se cruzan (???)

Figura 10. Respuesta incorrecta en la Actividad 4.

Con relación a los 15 estudiantes que realizaron los cálculos de manera correcta, y señalaron la opción c), argumentan el proceso para sumar fracciones, tal y como se muestra en la figura 11.

☒ Otra solución: calculamos m.c.m. se divide por el de abajo y se multiplica por el de arriba sumamos numeradores y se deja el m.c.m.

Figura 11. Reescritura del proceso de suma de fracciones de la Actividad 4.

En la Actividad 5, 26 estudiantes optaron por respuestas correctas frente a 20 que tuvieron respuestas incorrectas. Los resultados en este caso fueron diversos en cuanto a las respuestas correctas. Así, los 2 estudiantes bajo la categoría de Cálculo recurrieron a realizar el cálculo exacto de la suma de fracciones, usando el mínimo común múltiplo y escribiendo en la categoría "Otra solución" la respuesta $7/12$. Entre los 5 que combinan estrategias un estudiante realizó también el cálculo exacto combinado con la estimación gráfica c) (figura 12), mientras que los otros 4 señalaron las opciones a) y c).

Tu respuesta:

☐ 0,5 aproximadamente, porque cada fracción se aproxima a 0,25 por lo que su suma está cerca de 0,5

☐ 0,75 aproximadamente, puesto que al realizar la gráfica tenemos:



☒ 0,6 aproximadamente, puesto que al realizar la gráfica tenemos:



☐ Otra solución:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = ? \quad \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$$

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 3} \quad 4 \overline{) 2} \\ 1 \overline{) 1} \quad 2 \overline{) 2} \\ \quad 1 \quad 1 \\ \hline \end{array}$$

mcm = $3 \cdot 2^2 = 12$
 $12 : 3 = 4 \cdot 1 = 4$
 $12 : 4 = 3 \cdot 1 = 3$

Figura 12. Respuesta correcta según cálculo y estimación gráfica en Actividad 5.

En cuanto al alumnado que eligió respuestas incorrectas, 12 eligieron la estimación gráfica más alejada de la respuesta exacta (opción b), mientras que 6 de los 8 estudiantes señalaron dos respuestas poco relacionadas en este caso, como son la estimación numérica a) junto a la estimación gráfica b), lo que muestra una inadecuada estimación de las dos fracciones o del número decimal 0,25 en la barra. Los estudiantes restantes eligieron las dos estimaciones gráficas de rectángulos, es decir, que aceptan ambas aproximaciones como próximas entre sí, mostrando poca precisión en la búsqueda de la respuesta correcta.

SEGURIDAD DEL ALUMNADO

Se presentan a continuación los resultados del alumnado en cuanto a su seguridad a la hora de dar una respuesta en cada actividad (tabla 3). Para ello, hemos dividido al alumnado entre aquellos que dan una respuesta correcta y los que optan por una respuesta incorrecta, y codificado su grado de seguridad.

Tabla 3. Seguridad del alumnado con su respuesta en las Actividades

	Correcta					Incorrecta				
	NS	PS	N	S	MS	NS	PS	N	S	MS
Actividad 1	0	0	7	9	10	0	0	2	6	12
Actividad 2	1	2	4	10	23	0	0	1	2	1
Actividad 3	1	3	7	5	15	2	5	2	1	1
Actividad 4	0	4	5	2	6	4	3	9	7	6
Actividad 5	3	10	4	7	2	3	5	7	4	1

De forma general, se observa que es poco el alumnado que afirma estar nada seguro de sus respuestas. Se aprecia que el alumnado que da respuestas correctas mayoritariamente afirma estar seguro o muy seguro de ellas, mientras que hay una mayor variación del grado de seguridad en el alumnado que opta por respuestas incorrectas.

En la Actividad 1, podemos observar que 19 de los 26 estudiantes que eligieron una justificación correcta (es decir, 70% de las respuestas correctas) y 18 de los 20 con justificación incorrecta (es decir, 90% de las respuestas incorrectas), indican que están seguros o muy seguros de la elección.

En la Actividad 2, se observa que el alumnado mayoritariamente se siente seguro o muy seguro si ha elegido una respuesta correcta y también si ha elegido una respuesta incorrecta. Asimismo los dos estudiantes que basaron su respuesta únicamente en la estimación numérica indicaron que se sentían seguros o muy seguros. Por otra parte, aunque pocos, se dan casos de estudiantes que se sienten poco o nada seguros a pesar de haber repetido los cálculos.

En la Actividad 3, observamos que, de las respuestas correctas, la mayoría se corresponden con niveles más altos de seguridad (20 de 31, es decir, 64%), mientras que las elecciones de respuestas incorrectas señalan niveles bajos de seguridad, ya que solo 2 de 11 (18%) estudiantes responden que se sienten seguros o muy seguros de su respuesta, frente a 7 que optan por señalar poca o ninguna seguridad (63%).

En la Actividad 4, se comprueba que 47% del alumnado que dieron respuestas correctas se declara muy seguro o seguro de ellas, así como 44% de los que dieron respuestas incorrectas. En general, hay una mayor dispersión en sus opciones de seguridad que en las anteriores actividades. En relación con los dos

estudiantes que usaron la estimación numérica, su grado de seguridad es neutral, por lo que no podemos establecer ninguna conclusión en cuanto a la asimilación de esta estrategia.

En la Actividad 5, se observa, al igual que en la actividad anterior, una dispersión entre las opciones. En este caso con tendencia a sentirse neutro o nada-poco seguro, tanto en las respuestas correctas (50%) como en las incorrectas (40%).

VALORACIÓN DE LA SEGURIDAD DEL ALUMNADO EN FUNCIÓN DE SUS RESULTADOS

La media de seguridad de todo el alumnado fue 3.66, lo que indica que, por lo general, suelen estar muy seguros de sus respuestas.

En la tabla 4 se establece la relación entre el desempeño del alumnado y su seguridad siguiendo las escalas de desempeño y seguridad definidas en el apartado metodológico de análisis.

Tabla 4. Distribución del alumnado en función de sus respuestas y grado de seguridad

Categorías	Seguridad alta	Seguridad media	Seguridad baja	Total
Desempeño alto	12 (26.09%)	2 (4.35%)	4 (8.69%)	18 (39.13%)
Desempeño medio-alto	9 (19.57%)	2 (4.35%)	1 (2.17%)	12 (26.09%)
Desempeño medio-bajo	6 (13.04%)	4 (8.69%)	1 (2.17%)	11 (23.90%)
Desempeño bajo	3 (6.52%)	0 (0%)	2 (4.35%)	5 (10.87%)
Total	30 (65.22%)	8 (17.39%)	8 (17.39%)	46 (100%)

Se observa que 65.22% del alumnado (30 alumnos) presenta una seguridad alta en sus respuestas, frente a 17.39%, tanto en la seguridad media como en la baja. De los que se sitúan en la seguridad alta, 26.09% (12 alumnos) también han mostrado desempeño alto, lo que indica que este alumnado posee el conocimiento matemático necesario para juzgar correctamente la razonabilidad de las respuestas numéricas abordadas. En cambio, 13.04% (6 alumnos) y 6.52% (3 alumnos) del citado grupo, mostraron un desempeño medio-bajo y bajo, que indica que tienen ideas equivocadas que están arraigadas con certeza. También se observa que 4 estudiantes se sitúan en desempeño medio con seguridad media. Por último, solamente 4.35% presenta un desempeño bajo con un grado de seguridad bajo, lo que indica que podrían tener lagunas en sus conocimientos que no les permiten

juzgar adecuadamente lo razonable de una respuesta. También son llamativos los 5 estudiantes que, presentando un desempeño alto o medio-alto, tienen seguridad baja en sus respuestas, lo que podría asociarse a un tema personal de falta de confianza en sus capacidades matemáticas.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Se ha presentado un estudio descriptivo en el que se evalúa el éxito por parte de alumnado de secundaria para valorar la razonabilidad de la solución de una tarea numérica, observando las justificaciones que siguen en dichas valoraciones. Esto se ha analizado en cinco actividades con números decimales y fracciones, en las que se les ha dado diferentes opciones para basar su justificación (asociadas al contexto, apoyándose en una estimación gráfica, realizando una estimación numérica o efectuando los cálculos exactos). También se han relacionado las justificaciones que eligen con la seguridad de las repuestas.

En los resultados de este estudio destaca que, en cuatro de las actividades analizadas, más de la mitad del alumnado evalúa de manera correcta el resultado mostrado, siendo la actividad que implicaba estimar la suma de dos fracciones unitarias la que produjo peores resultados de valoración. En este último caso, la mayoría del alumnado (61%) optó por realizar los cálculos aplicando reglas operatorias incorrectas, por ejemplo, aplicar la regla asociada a la división de fracciones de “multiplicar en cruz” o sumar numeradores y denominadores. Vamvakoussi *et al.* (2012) señalan que algunas dificultades del alumnado para operar con fracciones son debidas a que aplican propiedades de los números naturales. Por otra parte, el mayor éxito de evaluación de la razonabilidad de la respuesta se produjo en la actividad sobre estimaciones de operaciones de números decimales, en la que 40 de los 46 estudiantes optaron por una respuesta correcta. Por lo tanto, evaluar lo razonable del resultado ha estado condicionado por el contenido numérico que implica la actividad.

La justificación por la que optan para realizar la valoración del resultado también ha presentado resultados diferentes, en función de la actividad. La justificación predominante en la mayoría de las actividades se basa en el uso de cálculos por encima de la estimación numérica o gráfica, por ejemplo. Estos resultados coinciden con los obtenidos por Alajmi y Reys (2010) en su estudio realizado en Taiwán en el que concluyeron que la mayoría del alumnado recurre a reglas y algoritmos para valorar la razonabilidad de sus respuestas antes que

usar otras estrategias. Se ha indicado que esa preferencia por los cálculos lo determinan los conceptos numéricos sobre los números y sus operaciones. Así, para el caso de las fracciones, Cramer *et al.* (2018) establecen que, el alumnado que no ha desarrollado una representación mental fuerte y consolidada del concepto de fracción y de sus operaciones, no logra realizar estimaciones numéricas o valorar la razonabilidad de una respuesta numérica con otras estrategias. En la actividad en la que debía estimar el resultado de una multiplicación de decimales (Actividad 3) un bajo porcentaje del alumnado mantiene la idea errónea de que la multiplicación da un resultado mayor siempre. Los resultados en esta actividad coinciden con los obtenidos en el estudio de Yang y Sianturi (2019a) cuyo alumnado obtuvo un alto índice de éxito, recurriendo a la estimación numérica y a la realización de los cálculos indicados para descartar otras opciones. En nuestro estudio, la estimación no se muestra predominante en determinadas actividades, lo que refleja que no es una habilidad desarrollada de forma habitual en sus clases de matemáticas.

El tercer objetivo de este estudio está relacionado con la seguridad del alumnado al decidir sus respuestas. En ello, parece dominar la idea de que, si la operación y los cálculos son correctos, el resultado es correcto, dado que la mayoría del alumnado repite los cálculos para valorar la razonabilidad de las respuestas, en especial en las tres primeras actividades, lo que les aporta seguridad. De nuevo observamos que la seguridad es menor en las actividades con fracciones, incluso entre aquellos que han optado por las opciones correctas. Probablemente se deba a que no estaban habituados a la realización de este tipo de estimaciones gráficas o porque la actividad requiere establecer relaciones numéricas: suma de fracciones, paso de fracción a decimal, relacionar decimales con la representación de barras. También es preciso indicar que un porcentaje menor del alumnado ha tenido un desempeño medio-bajo con un alto grado de confianza, lo que indica que posee ideas erróneas que considera correctas. En otros estudios se ha indicado que dicha situación produce que las ideas erróneas sean difíciles de modificar (González-Forte *et al.*, 2023). Los resultados sobre la seguridad de las repuestas del alumnado de este estudio difieren de los presentados por Yang y Sianturi (2019a) en la investigación realizada con 942 estudiantes de sexto grado en Hong Kong con tareas similares cuyo objetivo era valorar la razonabilidad del alumnado, si bien no se incluía la representación gráfica como estrategia. En dicho estudio se indica que 35.46% del alumnado presentaba un desempeño bajo y grado de seguridad alto frente al 5.73% del alumnado que presentaba desempeño y grado de seguridad altos. Resultados similares se han

obtenido en estudios en los que se ha usado una prueba en tres niveles para valorar el conocimiento del alumnado en función de sus argumentos y grado de seguridad (Sianturi *et al.*, 2024; Yang y Sianturi, 2021). Foster (2016) valora la importancia de conocer el grado de seguridad del alumnado al enfrentarse a una tarea numérica para diseñar actividades y secuencias de aprendizajes favorables para el desarrollo de diferentes habilidades matemáticas que permitan el análisis de sus respuestas.

Debe tenerse en cuenta que, pese a tener algunos puntos en común, el estudio de Yang y Sianturi (2019a), del que parte este estudio, estaba dirigido a una población mayor que la nuestra y las actividades estaban enfocadas de forma diferente, excluyendo las representaciones gráficas. Para poder hacer un estudio más exhaustivo y significativo de este aspecto, se considera necesaria una población mayor y adecuar las actividades de estudio. No obstante, este primer estudio será de gran ayuda para realizar una intervención de aula con el objetivo de desarrollar diferentes estrategias en el alumnado que les permita evaluar con seguridad la razonabilidad de sus respuestas numéricas.

Por otro lado, estudios más recientes (Yang, 2022) establecen la utilidad de realizar una prueba en cuatro niveles en lugar de en tres, haciendo hincapié en las creencias internas de precisión del alumnado o grado de seguridad. De este modo, el estudiante debe elegir una respuesta a la pregunta planteada, indicar su seguridad con la respuesta, elegir la justificación de su respuesta y, por último, indicar su seguridad con la justificación. De este modo, se podría evaluar mejor las concepciones del alumnado, el nivel conceptual de entendimiento y las concepciones erróneas significativas. Se abre aquí un nuevo campo de estudio en consonancia con el indicado anteriormente.

Pese a las limitaciones del presente estudio al tratarse de una prueba contestada por una muestra pequeña, los resultados ponen de manifiesto la importancia y necesidad de trabajar con el alumnado actividades que fomenten el uso de estrategias que les permita valorar la razonabilidad de una respuesta numérica más allá del cálculo algorítmico. Entre ellas destacan el uso de la estimación numérica y las representaciones gráficas, tal y como concluyen Yang y Sianturi (2019b). Los profesores deben promover que, en determinadas circunstancias, dar una respuesta exacta no es la única manera de valorar una respuesta razonable (Alajmi y Reys, 2010). Es necesario poner énfasis en la comprensión de los números, las operaciones y sus relaciones, y dar la oportunidad a los estudiantes de pensar en métodos alternativos para determinar si sus respuestas en tareas numéricas son razonables. Esto se convierte en un

aspecto importante del currículo en España, tanto de primaria como de secundaria (Real Decreto 217/2022). Así, se indica la importancia que tiene para la vida cotidiana desarrollar diferentes estrategias que permitan valorar lo razonable de una respuesta. Este trabajo tiene como fin contribuir a este campo de estudio, aunque es necesario profundizar en cómo ayudar al alumnado a desarrollar las habilidades matemáticas necesarias para realizar el proceso de evaluación, más allá de la aplicación de reglas y algoritmos.

AGRADECIMIENTOS

Proyectos PID2020-113601GB-I00 y PID2022-139007NB-I00, financiados por MCIN/AEI.

REFERENCIAS

- Akkaya, R. (2016). An investigation into the number sense performance of secondary school students in Turkey. *Journal of Education and Training Studies*, 4(2), 113-123. <https://doi.org/10.11114/jets.v4i2.1145>
- Alajmi, A., y Reys, R. (2007). Reasonable and reasonableness of answers: Kuwaiti middle school teachers' perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 65, 77-94. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9042-4>
- Alajmi, A. H. (2009). Addressing computational estimation in the Kuwaiti curriculum: Teachers' views. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12(4), 263-283. <https://doi.org/10.1007/s10857-009-9106-3>
- Alajmi, A., y Reys, R. (2010). Examining eighth grade Kuwaiti students' recognition and interpretation of reasonable answers. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 8, 117-139. <https://doi.org/10.1007/s10763-009-9165-z>
- Almeida, R., y Bruno, A. (2016). Uso de puntos de referencia y de representaciones gráficas para resolver tareas numéricas en secundaria. *PNA*, 10(3), 191-217. <https://doi.org/10.30827/pna.v10i3.6088>
- Almeida, R., y Bruno, A. (2017). Establishing profiles on the use of number sense. *REDI-MAT*, 6(1), 56-84. <https://doi.org/10.17583/redimat.2017.1910>
- Bell, A., Fischbein, E., y Greer, B. (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems: The effects of number size, problem structure and context. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 129-147. <https://doi.org/10.1007/BF00305893>

- Caleon, I., y Subramaniam, R. (2010). Development and application of three-tier diagnostic test to assess secondary students' understanding of waves. *International Journal of Science Education*, 32(7), 939-961. <https://doi.org/10.1080/09500690902890130>
- Clarke, D. M., Clarke, D. J., y Sullivan, P. (2012). Reasoning in the Australian curriculum: Understanding its meaning and using the relevant language. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 17(3), 28-32. <https://search.informit.org/doi/10.3316/aeipt.197602>
- Cramer, K., Wyberg, T., y Leavitt, S. (2018). The role of representations in fraction addition and subtraction. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(8), 490-496. <https://doi.org/10.5951/MTMS.13.8.0490>
- Fariña, M., y Bruno, A. (2021). Respuestas numéricas razonables en alumnado de secundaria. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 261-268). SEIEM.
- Foster, C. (2016). Confidence and competence with mathematical procedures. *Educational Studies in Mathematics*, 91, 271-288. <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9660-9>
- González-Forte, J. M., Fernández, C., Van Hoof, J., y Van Dooren, W. (2023). Incorrect ways of thinking about the size of fractions. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 21, 2005-2025. <https://doi.org/10.1007/s10763-022-10338-7>
- Graeber, A. O., Tirosh, D., y Glover, R. (1989). Preservice teachers' misconceptions in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(1), 95-102. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.20.1.0095>
- Grayer, M. (2009). Reasonable or not? A study of the use of teacher questioning to promote reasonable mathematical answers from sixth grade students (Master's thesis, University of Nebraska). DigitalCommons@University of Nebraska. <https://digitalcommons.unl.edu/mathmidactionresearch/70>
- McIntosh, A., Reys, B. J., y Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12(3), 2-8.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado*. <https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/29/217>
- Reys, B. J., y Yang, D. C. (1998). Relationship between computational performance and number sense among sixth and eighth grade students in Taiwan. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(2), 225-237. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.29.2.0225>

- Sianturi, I. A. J., Ismail, Z., y Yang, D. C. (2024). Examining fifth graders' conceptual understanding of numbers and operations using an online three-tier test. *Mathematics Education Research*, 36, 399-423. <https://doi.org/10.1007/s13394-023-00452-2>
- Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., y Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(3), 344-355. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.02.001>
- Veloo, P. K. (2010). The development of number sense and mental computation proficiencies: An intervention study with secondary one students in Brunei Darussalam (Doctoral thesis, University of Otago). University of Otago. <http://hdl.handle.net/10523/411>
- Yang, D. C. (2003). Teaching and learning number sense – An intervention study of fifth grade students in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1(1), 115-134. <https://doi.org/10.1023/A:1026164808929>
- Yang, D. C. (2022). Investigating the differences between confidence ratings in the answer and reason tiers in fourth graders via online four-tier test. *Studies in Educational Evaluation*, 72, 101127. <https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2022.101127>
- Yang, D. C., y Sianturi, I. A. J. (2019a). Sixth grade students' performance, misconceptions, and confidence when judging the reasonableness of computer results. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17(8), 1519-1540. <https://doi.org/10.1007/s10763-018-09941-4>
- Yang, D. C., y Sianturi, I. A. J. (2019b). Assessing students' conceptual understanding using an online three-tier diagnostic test. *Journal of Computer Assisted Learning*, 35(5), 678-689. <https://doi.org/10.1111/jcal.12368>
- Yang, D. C., y Sianturi, I. A. J. (2021). Sixth grade students' performance, misconception, and confidence on a three-tier number sense test. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 19, 355-375. <https://doi.org/10.1007/s10763-020-10051-3>

Autora de correspondencia

ALICIA BRUNO

Dirección: Avenida Astrofísico Francisco Sánchez, s/n.
Facultad de Ciencias. Sección de Matemáticas.
Apartado 456. Código postal 38200.
San Cristóbal de La Laguna. S/C de Tenerife, España
abruno@ull.edu.es