 https://doi.org/10.24844/EM3702.07

Tras la indagación de significados. Tareas para la formación de profesores que revelan concepciones alternativas: el caso del número racional

In search of meaning: Tasks for teacher education that reveal alternative conceptions – the case of rational numbers

Cristina Ochoviet Filgueiras,[1] Verónica Molfino Vigo[2]

Resumen: Existen abundantes evidencias sobre la importancia de las tareas que se proponen a los estudiantes para favorecer la enseñanza de las matemáticas. Las investigaciones profundizan en los diferentes tipos de tareas, su potencial, cómo gestionarlas en el aula, y cuáles son los resultados esperados de su inclusión en el aula. Sin embargo, son pocos los estudios relativos a qué tipo de tareas son propicios para enseñar didáctica de matemáticas. Este trabajo presenta una tarea propuesta en un curso de didáctica de matemáticas de un programa de formación de profesores, diseñada en cinco fases a partir de insumos específicos de la matemática educativa. Además, el estudio ilustra, a través de un estudio de caso, cómo esa tarea, que se articula con la práctica docente de una futura profesora, permitió evidenciar tanto sus concepciones sobre el concepto de fracciones equivalentes como las repercusiones que estas tienen sobre la enseñanza que imparte. El diseño de la clase planificada por la futura profesora estuvo guiado por la práctica de interrogar significados, que asumió en este trabajo un doble rol: como herramienta de

Fecha de recepción: 2 de febrero de 2024. **Fecha de aceptación:** 1 de abril de 2025.

[1] Instituto de Profesores Artigas, Consejo de Formación en Educación, Montevideo, Uruguay, cristinaochoviet@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-9069-3469

[2] Instituto de Profesores Artigas, Consejo de Formación en Educación, Montevideo, Uruguay, veromolfino@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-6672-762X

indagación del pensamiento de los estudiantes para la docente y como herramienta de indagación del pensamiento de ella para las investigadoras.

Palabras clave: *Formación de profesores, concepciones alternativas, número racional, diseño de tareas.*

Abstract: There is abundant evidence on the importance of the tasks assigned to students to enhance the teaching of mathematics. Research delves into the different types of tasks, their potential, how to manage them, and the expected outcomes of their use in the classroom. However, few studies focus on what types of tasks are suitable for teaching Didactics of Mathematics. This paper presents a task proposed in a Mathematics Method course within a teacher training program, designed in five phases based on specific inputs from Mathematics Education. Furthermore, through a case study, the research illustrates how this task–connected to the teaching practice of a prospective teacher–revealed both her conceptions about the concept of equivalent fractions and the implications these have on her teaching. The design of the class planned by the prospective teacher was guided by the practice of questioning meanings, which played a dual role in this study: as a tool for the teacher to explore students' thinking and as a tool for the researchers to explore the teacher's thinking.

Keywords: *Teacher training, alternative conceptions, rational number, task design.*

INTRODUCCIÓN A LA PROBLEMÁTICA

Hace ya varias décadas que las tareas se posicionaron como un medio fundamental para viabilizar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Las tareas propuestas determinan la naturaleza de las ideas matemáticas que circulan en una clase, y forman la base para el aprendizaje de los estudiantes (Stein y Smith, 1998a). En particular, algunos autores señalan que las "buenas tareas" son las cognitivamente demandantes (Stein y Smith, 1998b), y enfatizan la importancia de seleccionar, diseñar y gestionar adecuadamente tareas de ese tipo (Kilpatrick *et al.*, 2001). El argumento detrás de estas afirmaciones es el potencial que tienen las tareas para favorecer la comunicación entre profesores y estudiantes y, por tanto, la construcción de ideas matemáticas (Zaslavsky y Sullivan, 2011).

En esta misma línea, Zaslavsky (2008) afirma que en la formación docente las tareas juegan un rol esencial en el aprendizaje de los futuros profesores porque promueven conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas. Es en esa dirección que este escrito pretende aportar: sobre las tareas que los formadores de profesores de matemáticas proponen a sus estudiantes, futuros profesores, en cursos de didáctica de matemáticas. Esto es, tareas que tienen por objetivo acercar a los estudiantes de profesorado marcos conceptuales específicos de didáctica de matemáticas, y favorecer instancias de reflexión para articular los aportes de la investigación con los desafíos de la práctica docente.

La formación de profesores de matemáticas en Uruguay abarca cuatro años en los que los futuros profesores estudian *ciencias de la educación, didáctica de matemáticas/práctica docente* y *matemáticas*. Este último bloque formativo comprende cursos de análisis matemático, geometría, álgebra, álgebra lineal, probabilidad y estadística, topología y cursos de profundización optativos en geometría, análisis matemático o álgebra abstracta. El trayecto *didáctica de matemáticas/práctica docente* consta de cuatro cursos, uno introductorio en el primer año, sin práctica docente, y otros tres en los restantes tres años de la carrera, con una carga horaria de práctica docente ascendente a lo largo de la misma. Es en estos cursos en los que se proponen el tipo de tareas que mencionamos, diseñadas y gestionadas para la enseñanza de didáctica de matemáticas y su vinculación con aspectos relativos a la práctica docente. El componente práctico del último de esos cursos implica que el estudiante de profesorado de matemáticas (EPM) tiene un grupo de secundaria a su cargo (12-15 años) y, por tanto, es responsable del dictado de todas las clases de matemáticas de ese grupo a lo largo de un año escolar. Esta práctica preprofesional es supervisada por un formador de didáctica de matemáticas.

Presentamos el diseño y análisis de la implementación de una tarea que fuera propuesta en un curso del último año de la carrera de profesor de matemáticas, del trayecto *didáctica de matemáticas/práctica docente*, siguiendo aportes específicos relativos a la formación de profesores (Zaslavsky y Sullivan, 2011). Esa tarea requería, a los estudiantes de profesorado, estudio, diseño, implementación y análisis, reflexión y síntesis, a partir de constructos de la investigación en matemática educativa. A su vez, el análisis de la puesta en práctica de la tarea arrojó una situación que presentamos como el caso de una EPM, estudiante de cuarto año del programa de formación en Uruguay. En el marco de dicha tarea, la EPM propuso a sus estudiantes de séptimo grado de secundaria (entre 12 y 13 años) que discutieran si dos fracciones dadas eran equivalentes, utilizando la práctica de indagación de significados sugerida por Szydlik (2015).

En el diálogo que surgió en la clase con los alumnos, se pusieron en evidencia las concepciones de la docente y se hizo patente que la definición de fracciones equivalentes que había enseñado no era matemáticamente correcta. La EPM tenía, sin embargo, aprobados los cursos de álgebra, geometría y topología de la carrera, así como los tres cursos previos del trayecto *didáctica de matemáticas/práctica docente*.

Este trabajo se encuadra en la línea de investigación identidad y conocimiento del profesor (Molfino *et al.*, 2023; Molfino y Ochoviet, 2019a). En esa línea, dos antecedentes son especialmente relevantes. En Molfino y Ochoviet (2019b) se presentan dos tareas propuestas a estudiantes del último curso de didáctica de matemáticas/práctica docente que implicaban el acercamiento a reportes de investigación para su uso didáctico en el contexto de la práctica, en un caso el diseño de tareas para estudiantes de secundaria, en el otro el análisis de respuestas de sus estudiantes. Las autoras reportan que esas tareas resultaron sumamente potentes para que los estudiantes, futuros profesores, no solo conocieran marcos específicos del campo sino también que los emplearan y relacionaran con los saberes provenientes de la práctica docente.

En Ochoviet y Parodi (2024) se reportan los resultados de una investigación en la que se diseñó e implementó una secuencia de viñetas conceptuales para enseñar a futuros profesores resultados de investigación relativos al pensamiento algebraico, en particular sobre los diversos entendimientos del signo de igual. Los autores reportan que los estudiantes de profesorado:

> ...tomaron conciencia de las consecuencias que puede tener el lenguaje en el proceso de enseñanza, la precisión que es requerida para la correcta elección de las palabras que se utilizan en clase y cómo lo que se enseña en un curso puede obstaculizar lo que se aprenderá en cursos posteriores. (Ochoviet y Parodi, 2024, p. 411)

Estos trabajos aportan evidencia sobre el potencial que pueden tener las tareas para enriquecer el conocimiento pedagógico del contenido (Shulman, 1986) en estudiantes de profesorado de matemáticas.

En particular, sobre el contenido números racionales, la investigación ha puesto en evidencia las dificultades que tienen tanto los estudiantes de todos los niveles educativos así como los profesores en servicio para comprenderlos (Depaepe *et al.*, 2015). Por ejemplo, se ha reportado que tanto los futuros docentes de nivel primaria (maestros) como maestros en servicio poseen dificultades en la comprensión del concepto de fracción (Carvalho, 2023; Copur-Gencturk, 2021;

Tirosh y Tsamir, 2024), de la magnitud de las fracciones (Copur-Gencturk, 2022), en la identificación y tránsito entre las diferentes representaciones del número racional (Carvalho, 2023; Ryan y Williams, 2007), en el entendimiento de las operaciones con fracciones así como sus aplicaciones a la resolución de problemas (Ball, 1990; Borko *et al.*, 1992; Copur-Gencturk, 2021; Newton, 2008; Son y Crespo, 2009), en el establecimiento de conexiones entre la fracción vista como un proceso (en particular el de repartir) y la fracción vista como un número (Ryan y Williams, 2007), y con el concepto de densidad en el conjunto de los números racionales (Merenluoto y Lehtinen, 2002). En un estudio específico sobre cómo estudiantes para maestros definen el número racional y la consistencia con los ejemplos y no ejemplos que presentan, Tirosh y Tsamir (2024) consideran tres definiciones de número racional que involucran al concepto de fracción, pero en ninguna de ellas se problematiza el concepto de fracción equivalente.

Los estudiantes de profesorado de matemáticas para nivel secundario también muestran dificultades con el concepto de número racional. Depaepe *et al.* (2015) reportan que, si bien los estudiantes de profesorado para el nivel secundario presentan un mayor dominio de conocimiento del contenido que los estudiantes para docentes de nivel primario, el conocimiento pedagógico del contenido (Shulman, 1986) es similar. Tanto futuros profesores de matemáticas de enseñanza primaria como de secundaria presentan dificultades para comprender el razonamiento de los estudiantes y saber cómo intervenir en consecuencia para favorecer una mejor comprensión.

En suma, si bien varios estudios indagan sobre la conceptualización del número racional de estudiantes de profesorado y profesores en servicio, la mayoría de ellos lo hacen en relación a docentes de enseñanza primaria. Además, en los estudios analizados no se identifica ningún trabajo que haya abordado el estudio y comprensión de números racionales iguales y su relación con las fracciones equivalentes.

Considerando que el conocimiento matemático de los profesores incide directamente en las oportunidades de enseñanza que crean para sus estudiantes (Borko *et al.*, 1992; Murray y Baldinger, 2018), y que a su vez, la calidad de la enseñanza de las matemáticas depende directamente de las tareas que se proponen a los estudiantes (Kilpatrick *et al.*, 2001), atender a la problemática presentada resulta crucial para mejorar la formación matemática de todas las personas.

El objetivo de este trabajo consistió en explorar los efectos de la implementación de un tipo específico de tarea para la formación de profesores en la práctica docente de una EPM. La tarea utilizada constó de cinco fases: (1)

estudio, (2) diseño, (3) implementación y análisis, (4) reflexión y (5) síntesis, a partir de constructos de la investigación en matemática educativa. Nos cuestionamos ¿en qué sentido la tarea utilizada para la formación de profesores favorece la reflexión por parte de la EPM sobre su práctica docente y sobre sus concepciones matemáticas? ¿Es posible que un diseño apropiado favorezca el surgimiento de concepciones matemáticas de la EPM que sean inconsistentes con las aceptadas por la comunidad matemática? ¿De qué manera la tarea propuesta enriquece las concepciones matemáticas y didácticas de la EPM?

MARCO CONCEPTUAL

El marco conceptual se desarrolla en tres secciones. La primera refiere a los temas recomendados por Zaslavsky y Sullivan (2011) para el diseño de tareas en la formación docente. La segunda sección aborda el constructo concepciones alternativas, incluido a los efectos de contar con un instrumento para analizar las nociones matemáticas que cirularon en la clase implementada por la EPM. Finalmente, la tercera sección reseña distintos enfoques en el abordaje de los números racionales en la formación de profesores de matemáticas en Uruguay.

Los temas de las tareas en la formación de profesores

Escudero-Ávila *et al.* (2021) señalan que enseñar a enseñar matemáticas demanda al formador el diseño e implementación de tareas "que satisfagan las necesidades específicas de los elementos de la profesión docente que se desean desarrollar. Estas tareas y la manera en que se utilizan, tienen un impacto en el aprendizaje de los futuros profesores" (p. 33). En relación al diseño de tareas, Zaslavsky y Sullivan (2011) sugieren ocho temas unificadores que abarcan el tipo de competencias y conocimientos que demanda la formación de profesores de matemáticas: (1) Desarrollar la adaptabilidad; (2) Fomentar la habilidad para advertir similitudes y diferencias; (3) Afrontar conflictos y dilemas; (4) Diseñar y resolver problemas para su uso en el aula de matemáticas; (5) Aprender del estudio de la práctica; (6) Seleccionar y utilizar herramientas y recursos apropiados para la enseñanza; (7) Identificar las barreras en el aprendizaje de los estudiantes y cómo ayudarlos a superarlas; (8) Compartir y revelar las disposiciones propias, de los compañeros y de los estudiantes. En la siguiente tabla se sintetizan los temas y su descripción (tabla 1).

Tabla. 1. Temas de las tareas utilizadas en la formación de profesores de matemáticas para enseñanza secundaria

Tema	Descripción
(1) Desarrollar la adaptabilidad	Correponde a ser capaz de variar la formulación de preguntas, variación en las tareas, con el objetivo de buscar alternativas para mejorar las propuestas didácticas así como la capacidad para adaptar recursos ya existentes de acuerdo a las metas formativas. También, para estar preparados para responder ante contingencias. Las tareas a proponer deberían demandar adaptabilidad a requerimientos pedagógicos, curriculares y matemáticos.
(2) Fomentar la habilidad para advertir similitudes y diferencias	Refiere al desarrollo de la habilidad de advertir similitudes y diferencias entre problemas, entre contextos, entre errores, entre situaciones de clase, entre objetos matemáticos para clasificarlos, para detectar patrones, para establecer conexiones curriculares, para definir abordajes didácticos. Las tareas a proponer demandan también la perspectiva pedagógica, curricular y matemática.
(3) Afrontar conflictos y dilemas	Alude a que los docentes deben estar preparados para enfrentar la toma de decisiones en situaciones conflictivas, complejas y deben saber lidiar con la incertidumbre: anticipar conflictos, diseñar tareas que impliquen conflictos para los alumnos, identificar inconsistencias en documentos curriculares. Las tareas a proponer demandan también la perspectiva pedagógica, curricular y matemática.
(4) Diseñar y resolver problemas para su uso en el aula de matemáticas	Son tareas que proponen: diseñar problemas y trabajar con ellos en sus clases, incorporar en el aula problemas con múltiples soluciones o estrategias de resolución, elevar el grado de apertura de los problemas que se encuentran en los libros de texto y utilizar juegos como contexto para la resolución de problemas.
(5) Aprender del estudio de la práctica	Considera las tareas que aportan un acceso a situaciones reales o simuladas de la práctica y promueven un análisis crítico y reflexivo de esta como, por ejemplo, el análisis de videos de clases, de clases ejemplares, *lesson study*, planificación conjunta de la enseñanza, observación, discusión y reflexión conjunta sobre una clase dictada, estudios de caso que permitan reflexionar sobre desafíos pedagógicos, curriculares o matemáticos de la práctica.

(6) Seleccionar y utilizar herramientas y recursos apropiados para la enseñanza	Herramientas como libros de texto, lecturas complementarias, materiales manipulativos, instrumentos para construir o medir, calculadoras gráficas u otros entornos tecnológicos, etcétera. Las herramientas incluyen distintos tipos de recursos como los humanos o culturales. Las tareas promueven la selección, diseño, implementación, análisis del potencial, entre otros aspectos.
(7) Identificar las barreras en el aprendizaje de los estudiantes y cómo ayudarlos a superarlas	Las barreras abordan aspectos epistemológicos de las matemáticas, factores culturales, de género, expectativas de la familia, el idioma, discapacidades físicas y de otro tipo, factores socioeconómicos, etcétera. La identificación de esas barreras puede realizarse desde la perspectiva pedagógica (género, lenguaje, aspectos socioeconómicos, etcétera) o matemáticos (tipos de tareas, representaciones, excesiva formalidad, etcétera).
(8) Compartir y revelar las disposiciones propias, de los compañeros y de los estudiantes	Refiere a que el proceso de enseñanza y el de aprendizaje tienen una dimensión actitudinal que incide en ambos. Incluye: las creencias sobre la naturaleza de las matemáticas, su utilidad y aprendizaje, la capacidad propia de aprender matemáticas, los procesos de autorregulación relativos al aprendizaje, las actitudes hacia las matemáticas como el gusto por las mismas, la ansiedad matemática, etcétera.

Fuente: Adaptado de Ochoviet (2022) con base en Zaslavsky y Sullivan (2011).

Si bien estos ocho temas están íntimamente ligados y resulta complejo aislar uno del otro, la tarea que se propuso a la EPM prioriza los temas 4, 5 y 7, esto es, diseñar un problema con objetivos específicos para los estudiantes de secundaria, aprender de la práctica a través de la implementación en aula de ese problema y la reflexión posterior, y prestar especial atención a las respuestas de los estudiantes para identificar concepciones, obstáculos, dificultades, entre otros.

Concepciones alternativas

Los EPMs llegan al programa de formación con conocimientos previos producto de su experiencia y del tránsito por la enseñanza primaria y secundaria. En la formación docente avanzan en el estudio de las matemáticas del nivel superior, en cursos de didáctica de matemáticas y práctica docente. Esto implica que múltiples fuentes inciden en la construcción de sus concepciones sobre los temas matemáticos que el currículo les demanda enseñar y pueden existir inconsistencias con el conocimiento disciplinar.

> Para el profesor de matemáticas de secundaria el desafío es enfrentar sus propias debilidades en el conocimiento pues es frecuente que el especialista encuentre que sus propias construcciones son defectuosas o que realiza generalizaciones matemáticamente incorrectas. Los estudiantes en formación docente inicial que quieren convertirse en profesores especializados de matemáticas suelen llegar con un historial satisfactorio de aprobación de exámenes escolares; desafortunadamente, su comprensión, a veces, es principalmente instrumental. (Ryan y Williams, 2007, p. 137)

Se ha reportado que las concepciones de los EPMs inciden en lo que enseñan en su práctica profesional (por ejemplo, Chhabra y Baveja, 2012; Ryan y Williams, 2007). Esto es, no es el conocimiento disciplinar el que es enseñado sino el que el docente ha construido, sumado a lo que entiende que es enseñar y aprender. Para conceptualizar teóricamente determinadas manifestaciones del conocimiento que los profesores, efectivamente, movilizan al enseñar matemáticas, utilizaremos la noción de *concepción alternativa*. Según Narjaikaew (2013) "El término concepciones alternativas en ciencias se refiere a conceptos que las personas tienen y que son inconsistentes con ideas científicamente aceptables" (p. 251). El término concepción alternativa es utilizado, muchas veces, como sinónimo de concepciones erróneas (Chhabra y Baveja, 2012). Cubero (2021) especifica que el término concepciones erróneas supone darle un estatus inferior a las concepciones que difieren del conocimiento disciplinar socialmente establecido, por ello, en este trabajo, optamos por el término concepción alternativa.

Según Ryan y Williams (2007), el proceso de enseñanza demanda al docente la elaboración de explicaciones y esto le requiere que sea capaz de establecer conexiones entre los contenidos matemáticos del currículo para estar bien preparado para responder las preguntas de sus estudiantes. A este respecto, los autores agregan que:

> De hecho, estudios de investigación han informado que los docentes de matemáticas más efectivos son los "conexionistas", es decir, aquellos que establecen conexiones ricas (y correctas) a través del campo disciplinar, y pueden utilizar una variedad de representaciones y modelos en las conversaciones con niños. (p. 138)

A su vez, Ryan y Williams (2007) afirman que para formar docentes "conexionistas" es necesario que el entorno de formación los invite a cuestionarse sobre sus propios conocimientos, favoreciendo procesos de orden metacognitivo.

Números racionales: diferentes enfoques

En el discurso matemático escolar de la enseñanza de las matemáticas en la formación de profesores de matemáticas en Uruguay conviven al menos dos enfoques diferentes sobre el abordaje del conjunto de los números racionales. Uno de ellos es la definición por abstracción del conjunto de los números racionales. Esto implica considerar el producto cartesiano $Z \times Z^*$, definir la relación $\Re$ tal que $(a, b)\Re(c, d)$ si $a \cdot d = c \cdot b$, probar que es de equivalencia y considerar el conjunto Q como el conjunto cociente que queda definido (ver, por ejemplo, Lentin y Rivaud, 1982). El otro enfoque consiste en definir axiomáticamente el conjunto de los números reales y, a partir de este, considerar a Q como un subconjunto. El primero de los enfoques, conocido también como enfoque genético, supone la construcción previa de los conjuntos N y Z. En cambio, en el segundo enfoque, se define el conjunto de los números reales y luego se identifican los subconjuntos N, Z y Q. Así, en el primer abordaje aparecen los pares ordenados de enteros, que luego dan lugar a la notación fraccionaria, y entre estos pares es posible indicar si son o no equivalentes (según la relación definida), cuestión que luego se traslada a la notación fraccionaria.

El segundo enfoque define el conjunto Q como $\left\{x \in R; x = \frac{p}{q} \text{ con } p, q \in Z, q \neq 0\right\}$, obsérvese que esta definición hace uso de la división entre dos enteros, operación definida en R con anterioridad a la definición del conjunto de los números racionales. Según esa definición, dos racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son iguales si el cociente de dividir a entre b, y c entre d es el mismo, sin invocar el concepto de equivalencia de fracciones.

MÉTODO

La población de estudio está constituida por una EPM (27 años de edad) cursando su cuarto curso de didáctica de matemáticas/práctica docente en un instituto de formación docente de Uruguay. Este curso tiene dos componentes: uno teórico y otro práctico, y se ubica en el cuarto y último año de la carrera de profesor. El componente teórico, en el que se abordan aspectos teóricos de didáctica de matemáticas y se vinculan con la práctica, se desarrolla en el instituto de formación docente y está a cargo de una formadora en didáctica de matemáticas. El componente práctico consiste en que la EPM desempeñe, a lo largo de un año lectivo, el rol de profesora de matemáticas en un grupo a su cargo en la enseñanza secundaria. Esto implica las actividades de enseñanza, la evaluación de sus estudiantes, la asistencia a las reuniones de profesores del grupo de clase, la integración de tribunales de exámenes, entre otras responsabilidades del rol docente. Todas estas tareas las realiza bajo la supervisión de la formadora de didáctica de matemáticas. Además, la EPM tenía aprobados los cursos de geometría, álgebra y topología de la carrera.

En la clase teórica de didáctica de matemáticas se estudió la práctica de *interrogar significados* sugerida por Szydlik (2015), que consiste en dar espacio en el aula de matemáticas para el desarrollo de conversaciones entre estudiantes y profesor. Según la autora, esta práctica permite a los estudiantes reconocer sus propios supuestos sobre cómo, cuándo y para qué es empleada una notación, representación o término matemático, favorece que los alumnos concienticen sus propias interpretaciones y les da confianza para cambiarlas. En ese sentido, esta práctica se erige como una herramienta para los docentes que oficia como 'ventana' para conocer el pensamiento de sus estudiantes. En particular, en la clase teórica se estudiaron los tres tipos de conversaciones matemáticas que Szydlik (2015) propone: sobre el uso de los símbolos (en particular aborda el uso del signo igual), sobre una representación o sobre el lenguaje matemático.

Se solicitó a la EPM la lectura completa del artículo y que realizara una síntesis de las principales ideas (fase de estudio). Luego, se le propuso la siguiente tarea con las restantes cuatro fases (tabla 2).

Tabla 2. Tarea propuesta a la EPM

Consigna	Descripción de la consigna
Diseño y análisis a priori	Elija uno de los tres tipos de conversación ejemplificados en el artículo y diseñe una actividad apropiada para desarrollar esa conversación en una clase de su grupo de práctica. Presente la actividad, fundamente el diseño y realice el análisis a priori.
Implementación de la clase y análisis	Implemente la actividad en una clase de 45 minutos, en su grupo de práctica, para desarrollar la conversación matemática en cuestión. Tiene que evidenciarse la función de esa conversación como "ventana al pensamiento de nuestros estudiantes" (Szydlik, 2015, p. 656), así como las concepciones de los alumnos con respecto a la temática correspondiente. Grabe y transcriba el audio de la clase.
	Analice el desarrollo de la conversación matemática de la clase, qué ideas de los alumnos se evidenciaron respecto de la temática del tipo de conversación elegida y cómo se trabajaron esas ideas a lo largo de la conversación, mediante la práctica de interrogar significados, de acuerdo a las recomendaciones de la autora y sus sugerencias de trabajo en el aula.
Reflexión posterior a la clase	Realice una reflexión sobre la incidencia que tuvo la conversación matemática instrumentada en las ideas matemáticas de los estudiantes. Reseñe qué fortalezas y debilidades tuvo, como docente, en la implementación de la clase y cómo evolucionaron las concepciones alternativas de los estudiantes. Sea específico y concreto en sus observaciones. Fundamente y ejemplifique si es necesario.
Síntesis del trabajo realizado	Elabore un diálogo breve, como alguno de los que presenta la autora en el artículo, que funcione como síntesis del trabajo realizado y que ejemplifique un aspecto de lo sucedido en la clase. Para ello, imagine que usted es Szydlik y que está preparando un diálogo para incluir en su artículo. El diálogo puede seleccionarlo de la transcripción de la clase o puede reelaborarlo, pero debe reflejar algún aspecto surgido en la clase.

La primera parte de la consigna, diseño y análisis a priori, se ubica en el tema 4 (Zaslavsky y Sullivan, 2011), esto es, diseñar un problema para luego ponerlo en práctica en la clase. En la segunda parte, implementación de la clase y análisis, se movilizan los temas 5 y 7 (Zaslavsky y Sullivan, 2011), pues además de la puesta en práctica con una intención específica, se solicita que se ponga especial atención a las respuestas de los alumnos para tratar de identificar las concepciones matemáticas que se revelan. La tercera y cuarta parte de la consigna, reflexión y síntesis, se encuadran en el tema 5 (Zaslavsky y Sullivan, 2011):

aprender de la práctica a través de la reflexión sobre los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

La estudiante contó con cuatro semanas de tiempo para la realización de esta tarea. Entregó su trabajo por escrito dando cuenta de la clase que dictó bajo la práctica de interrogar significados en el grupo de séptimo grado que tenía a cargo (estudiantes de 12 y 13 años). Este escrito es el que se analiza en este estudio. Además, se realizó la audiograbación de la clase dictada por la EPM y su transcripción.

La tarea demandaba, además de la implementación de una clase, la presentación de un breve guion a modo de síntesis. Esto implicó la escritura de un diálogo en el que la participante de este estudio debía explicitar “la interacción entre un profesor-personaje imaginario y un estudiante-personaje” (Zazkis y Marmur, 2018, p. 294). La propuesta indicaba que para la redacción de estas interacciones podía tomarse información de lo efectivamente sucedido en la clase implementada o bien reelaborarlo. De acuerdo con Zazkis y Marmur (2018), la elaboración de guiones es una herramienta que permite la recolección de datos y el análisis de estos guiones proporciona “imágenes de la enseñanza y conocimiento sobre el entendimiento de las matemáticas de los guionistas” (p. 294). Adicionalmente, los autores observaron que los guiones aportan evidencia de la comprensión personal de los participantes de una investigación sobre los conceptos matemáticos que están implicados en la redacción del guion.

En suma, la tarea utilizada implicó: (1) el estudio de un documento proveniente del campo de la matemática educativa (Szydlik, 2015); (2) el diseño de una actividad por parte de la EPM que permitiera la interrogación de significados con base en Szydlik (2015), esto es, un diseño basado en aportes de la matemática educativa; (3) la implementación de la actividad diseñada en un grupo propio de enseñanza secundaria, así como el análisis de la clase implementada; (4) la reflexión sobre la clase implementada; (5) la elaboración de un mini-guion a manera de síntesis de los logros obtenidos en la clase implementada. Así, la arquitectura de la tarea propuesta a la EPM constó de las siguientes fases: estudio, diseño, implementación y análisis, reflexión y síntesis.

Dado el objetivo del estudio, la formadora a cargo del grupo no intervino sobre ninguna de las producciones de la estudiante hasta finalizadas las cinco fases. De manera posterior a la entrega de la tarea, se realizó una entrevista breve semiestructurada a la EPM en la que la pregunta disparadora fue: ¿Cuál es para ti la definición de fracciones equivalentes?

ANÁLISIS DE LA RESPUESTA DE LA EPM A LA TAREA Y DISCUSIÓN

RELATIVO AL 'ANÁLISIS A PRIORI'

Dentro de las tareas de Szydlik (2015) la EPM seleccionó "la que refiere al significado y problematización del signo de igual" y diseñó la siguiente actividad para implementar en clase con sus estudiantes de enseñanza secundaria:

Actividad

Contesta si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas.

$$\frac{20}{8} = \frac{50}{20}$$

$$\frac{6}{4} - \frac{1}{2} = -7 + 8$$

En este trabajo nos enfocamos solamente en la primera igualdad, porque es la que se pudo discutir cabalmente en 45 minutos de clase.

La EPM diseña una actividad que requiere señalar si una proposición es verdadera o falsa. Consideramos que es consistente con la indagación de significados pues los alumnos deberán fundamentar sus elecciones por una u otra opción. En este sentido, logra diseñar una situación con objetivos específicos que se enmarca en el tema 4 propuesto por Zaslavsky y Sullivan (2011). La EPM identifica correctamente que la primera igualdad es verdadera. Nos centraremos, entonces, en los argumentos que la EPM brinda tanto para justificar que es verdadera como en las explicaciones que, según ella, podrían conducir a sus estudiantes a pensar que es falsa; estos asuntos se encuadran en la temática 7 (Zaslavsky y Sullivan, 2011), relativa a identificar los obstáculos que podrían enfrentar los alumnos al resolver la situación.

En el análisis a priori de la actividad la EPM afirma:

> Para la primera igualdad [los estudiantes] pueden responder falso porque es posible que entiendan que dos fracciones [solo] pueden ser igualadas si ambas fracciones son equivalentes, es decir, que exista un número entero por el cual multiplicar el denominador y el numerador de una de ellas para obtener la otra.

Esta afirmación nos permite deducir, por un lado, que la EPM está considerando la posibilidad de que sus estudiantes respondan –erróneamente– que la afirmación es falsa. Esto se fundamenta en que la EPM enseñó que las fracciones equivalentes son solo aquellas en las que es posible obtener una de la otra, multiplicando numerador y denominador por un mismo número entero, tal como ella lo explicita. Según la concepción de la EPM, las fracciones $\frac{20}{8}$ y $\frac{50}{20}$ no son equivalentes porque no existe un número entero tal que al multiplicar numerador y denominador de $\frac{20}{8}$ por ese número, se obtenga $\frac{50}{20}$. Esto es inconsistente con lo que nos dice la definición de fracciones equivalentes: $\frac{20}{8}$ y $\frac{50}{20}$ sí son equivalentes porque $20 \times 20 = 8 \times 50$. Entonces, si sus estudiantes entienden que solo "pueden ser igualadas si ambas fracciones son equivalentes", y emplean la concepción de fracciones equivalentes enseñada por la EPM, la afirmación que involucra al signo de igual sería falsa.

Más adelante menciona razones por las que sus estudiantes podrían considerar que la afirmación es verdadera:

> Por otro lado, pueden responder que es verdadera si observan las fichas de diferentes representaciones de un número racional y logran identificar que las fracciones que componen la igualdad están en la sección de fracciones equivalentes de $\frac{5}{2}$. Otra justificación para indicar que la igualdad es verdadera, es simplificar $\frac{50}{20}$, llegar a que es equivalente a $\frac{5}{2}$ y luego analizar qué número entero es el que permite asegurar que $\frac{5}{2} = \frac{20}{8}$.

Cuando la EPM habla de *fichas* se refiere a un material didáctico que entregó en clase en el que se podían visualizar distintas representaciones de un mismo número racional: fracciones equivalentes, expresión decimal, un punto en la recta numérica. Las dos justificaciones que aporta evidencian la concepción de la EPM, pues reconoce que ambas fracciones son equivalentes a $\frac{5}{2}$ porque se cumple la condición explícita en su definición personal de fracciones equivalentes: que exista un número entero que multiplicado por numerador y denominador permita obtener la otra. Sin embargo, la EPM no admite como equivalentes a las fracciones $\frac{20}{8}$ y $\frac{50}{20}$, y esto contradice la propiedad transitiva que es característica, precisamente, de las relaciones de equivalencia.

Al considerar otro tipo de respuestas posibles de sus estudiantes, la EPM afirma:

> Se definió que dos fracciones son equivalentes si existe un número entero por el cual si se multiplica el numerador y el denominador de una de ellas se obtiene la restante, pero aquí sí existe un número que multiplicando numerador y denominador de $\frac{20}{8}$ me permite obtener $\frac{50}{20}$ que es el 2,5 pero no es un número entero, entonces aquellos estudiantes que no tengan presente ese detalle pueden responder verdadero mientras que los que se detengan en ese detalle pueden responder que es falso.

La EPM vuelve a explicitar su 'definición' de fracciones equivalentes, reforzando la idea de que para que sean equivalentes, el número por el cual hay que multiplicar numerador y denominador debe ser entero.

Por otro lado, la EPM indica que los estudiantes podrían decir que la afirmación es verdadera "realizando las divisiones (cincuenta dividido entre veinte y veinte dividido entre ocho) y llegar a que ambas fracciones representan a la expresión decimal 2,5". Esto permite pensar que la EPM considera que, en definitiva, las fracciones sí son iguales por representar al mismo número.

En suma, la concepción que tiene la EPM de la definición de fracciones equivalentes no es consistente con la teoría matemática. Del primer enfoque para el estudio de los números racionales, desarrollado en la sección marco conceptual, se desprende que dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes, siguiendo la definición de equivalencia que se estableció entre pares, si $a \cdot d = c \cdot b$. En cambio, la EPM considera como definición de fracciones equivalentes lo que en realidad, en esa teoría, es un teorema: Si (a, b) es un par ordenado perteneciente a $Z \times Z^*$ y n un número entero distinto de cero, entonces $(a, b) \sim (a \cdot n, b \cdot n)$. Obsérvese que este teorema permite obtener infinitas fracciones equivalentes a una dada, pero no necesariamente todas las de la clase de equivalencia a partir de esa fracción dada. Esto es, si partimos, por ejemplo, de la fracción $\frac{20}{8}$ y multiplicamos numerador y denominador por el mismo número entero distinto de cero, podremos obtener infinitas fracciones equivalentes como $\frac{40}{16}$, $\frac{60}{24}$, etcétera, pero no obtendremos otras fracciones equivalentes como ser $\frac{50}{24}$ o $\frac{15}{6}$.

La concepción de la EPM tampoco es parcialmente consistente con la teoría dado que si se aplicara como definición de fracciones equivalentes el teorema antes mencionado, entonces las fracciones $\frac{20}{8}$ y $\frac{50}{20}$ no serían equivalentes y, como es bien sabido, sí lo son.

En suma, el análisis a priori que la EPM realizó de la actividad diseñada juega un doble rol. A la EPM le permite anticipar las ideas matemáticas involucradas, las posibles respuestas que podrían dar los alumnos, así como las distintas estrategias y representaciones que podrían emplear para resolver la actividad; al equipo de investigadoras le aporta información acerca de las concepciones de la EPM sobre fracciones equivalentes y números racionales iguales, y que estas no son consistentes con la teoría matemática.

Relativo a la implementación y el análisis

Después de exponer el análisis a priori, la EPM desarrolla lo acontecido en la implementación. En primer lugar, la EPM afirma que en la clase dictada "se analizó si la igualdad presentada estaba conformada por dos fracciones equivalentes, llegando a que no, a partir del razonamiento de los estudiantes". Esto confirma lo dicho en el apartado anterior: la EPM considera que las fracciones $\frac{20}{8}$ y $\frac{50}{20}$ no son equivalentes pues no aplica la definición formal de fracciones equivalentes sino su definición personal, que en la teoría es un teorema. A continuación explica que uno de los razonamientos de sus estudiantes:

> Fue multiplicar a $\frac{20}{8}$ por 2 obteniendo $\frac{40}{16}$ y $\frac{20}{8}$ por 3 obteniendo $\frac{60}{24}$. Esto les permitía concluir que dichas fracciones no son equivalentes, y fue uno de los motivos con más adhesiones para establecer que [la proposición] era falsa".

Más allá del error de la EPM en la manera de expresarse (dice que multiplica la fracción por 2 en lugar de decir que multiplica numerador y denominador por 2), interpretamos que lo que quiso decir es que multiplicando por 2, o por 3, *numerador y denominador*, va hallando fracciones equivalentes a $\frac{20}{8}$ pero diferentes a $\frac{50}{20}$ y por ese motivo no son equivalentes. Esta descripción que hace la EPM de lo que sucedió en la clase, deja en evidencia que sus concepciones alternativas fueron trasladadas a sus estudiantes de enseñanza secundaria.

Más adelante, la EPM explica el segundo razonamiento que presentaron sus estudiantes: "hallar las expresiones decimales asociadas a dichas fracciones, arribando así a que ambas representan al número racional 2,5". Esto refuerza la otra concepción de la EPM relativa a las fracciones: dividiendo numerador por denominador se obtiene la expresión decimal y, si coinciden, entonces las fracciones son iguales. En este momento la EPM concluye: "lo que permitió analizar que dos fracciones equivalentes son iguales, y que dos fracciones iguales no siempre deben ser equivalentes". En esta afirmación se sintetiza otra concepción alternativa de la EPM relacionada con la anterior: dos fracciones pueden ser iguales (en el sentido de tener la misma representación decimal) sin ser equivalentes (porque no hay un número entero tal que, al multiplicar numerador y denominador de una de esas fracciones por ese número, se obtenga la otra). La EPM señala de manera explicíta que a los distintos razonamientos se llegó a partir de lo que los alumnos planteaban. Esto deja en evidencia la intención de la EPM para que en la clase se jerarquice y valore la participación de los alumnos, pues es a través de sus ideas y sugerencias que se arriba a conclusiones. Esto es consistente con la metodología de indagación de significados. A su vez, la implementación le permitió constrastar el análisis a priori con lo que efectivamente sucedió en clase: los alumnos utilizaron distintas aproximaciones para dar respuestas en las que las distintas representaciones del número racional tuvieron un papel relevante.

Relativo a la reflexión posterior a la implementación

Después de la descripción de la implementación de la actividad en clase, la EPM reflexiona sobre la incidencia de la conversación en las ideas matemáticas de los estudiantes. Allí afirma que:

> La discusión permitió que los estudiantes se cuestionaran que dos fracciones que no son equivalentes pueden ser iguales. Esto dio lugar a discutir que, si dos fracciones son equivalentes, son iguales, y que dos fracciones iguales, pueden no ser equivalentes.

Presenta entonces como un logro en sus estudiantes que identifiquen que dos fracciones no equivalentes pueden ser iguales (y recíprocamente), lo que devela una concepción alternativa, en el sentido de Narjaikaew (2013), de fracciones equivalentes. Esta concepción es alternativa respecto a las ideas científicamente aceptadas, que establecen que dos fracciones iguales, esto es, formadas por los mismos componentes, son, necesariamente, equivalentes. Además, dos fracciones equivalentes son representantes del mismo número racional, por lo que también se puede afirmar que representan números racionales iguales. A continuación agrega que "para establecer que, si dos fracciones están igualadas, debo recurrir a analizar sus expresiones decimales asociadas para poder establecer si esta es una igualdad verdadera o falsa", lo que devela que domina una estrategia consistente con ideas científicamente aceptadas sobre la relación entre una fracción, su expresión decimal y el número racional que representa.

Como debilidad en el trabajo con los estudiantes, la EPM señala:

> Me costó mucho no intervenir y actuar como guía, en lugar de corregir a los estudiantes, y en algunos momentos no pude evitar hacerlo. Considero que esa es mi principal debilidad, ya que en algunos momentos la clase se convirtió en una clase tradicional de matemáticas, en lugar de mantener el enfoque en la práctica "interrogando significados" de manera constante.

Esto nos informa acerca de las dificultades de quienes se inician en la docencia para romper con el modo tradicional de impartir las clases: un profesor que explica, estudiantes que escuchan y luego resuelven ejercicios similares a los que el profesor les explicó en la pizarra. Como fortaleza señala que logró que sus estudiantes evolucionaran en su concepción del signo igual como señal de realizar una operación a un signo que relaciona dos cantidades iguales, es decir, que pudieran pasar de una visión operacional a una visión relacional (Kieran, 1981). Para la EPM, la práctica de interrogar significados implicó un gran desafío que le permitió conocer un poco más el pensamiento de sus estudiantes. En este sentido, el propósito de la tarea propuesta por la formadora de didáctica fue logrado y se encuadra claramente en el tema 5 (Zaslavsky y Sullivan, 2011): aprender de la práctica.

Relativo a la síntesis del trabajo realizado

A la EPM se le propuso elaborar un breve diálogo con base en la clase dictada, aunque podían introducirse elementos ficcionales, que sintetizara y ejemplificara lo sucedido en la clase, considerando el objetivo de indagar significados construidos por los estudiantes de enseñanza secundaria. Al respecto, presentó el siguiente diálogo:

Contesta si la siguiente igualdad es verdadera o falsa. $$\frac{20}{8} = \frac{50}{20}$$

Profesora:	¿Pueden ser iguales, aunque no sean equivalentes?
Estudiante 1:	Sí.
Estudiante:	Son iguales, pero no son equivalentes.
Profesora:	¿Cuándo son equivalentes no son iguales?

Estudiante 2:	Sí, son iguales.
Profesora:	Ahora, si no son equivalentes, ¿pueden ser iguales?
Estudiantes:	Sí. No.
Profesora:	Ya dijeron que si son equivalentes son iguales.
Estudiante 3:	Entonces si no son equivalentes no son iguales.
Profesora:	Estas dos fracciones, ¿son equivalentes?
Estudiante 2:	Son iguales, pero no son equivalentes.
Profesora:	Entonces si son iguales, ¿son equivalentes?
Estudiante 2:	No siempre.

Este diálogo, que para la EPM sintetiza lo estudiado en la clase, también sintetiza lo que hemos expuesto en las secciones anteriores de este análisis: la EPM posee concepciones alternativas que son claramente inconsistentes con la teoría matemática y que la llevaron, en definitiva, a institucionalizar conocimientos matemáticamente incorrectos en el aula de clase. Sus concepciones alternativas sobre fracciones equivalentes y sobre números racionales iguales fueron institucionalizadas en el aula de enseñanza secundaria. Es decir, no enseñó conocimiento matemático sino sus concepciones acerca de ese conocimiento, institucionalizó en su grupo de clase que dos fracciones equivalentes representan el mismo número racional, lo que es matemáticamente correcto, y que dos fracciones que representan el mismo número racional no necesariamente son equivalentes (concepción alternativa, matemáticamente incorrecta). Para la EPM, dos fracciones son equivalentes si pueden obtenerse multiplicando el numerador y el denominador de una fracción dada por un mismo número entero distinto de cero, y esto hace que, para la EPM, fracciones como $\frac{20}{8}$ y $\frac{50}{20}$ no sean equivalentes. Las reconoce como iguales porque al dividir numerador entre denominador, en cada caso, obtiene la misma expresión decimal. Sin embargo, esas fracciones representan al mismo número racional pues se cumple que $20 \cdot 20 = 8 \cdot 50$ y por lo tanto las dos pertenecen a la misma clase de equivalencia. Aquí apreciamos una inconsistencia con el conocimiento científico aceptado por la comunidad matemática.

En suma, aún cuando la EPM trabajó desde una práctica de indagación y a partir de los aportes de sus alumnos, no surgieron dilemas que permitieran a los alumnos de secundaria advertir que las ideas que se discutieron eran matemáticamente incorrectas. Es importante señalar que la práctica de indagación recomendada por Szydlik (2015) resultó, en definitiva, de bajo impacto en el aprendizaje de los alumnos de secundaria debido a que las ideas matemáticas que la docente institucionalizó fueron incorrectas.

Relativo a la entrevista

A la pregunta: ¿Cuál es para ti la definición de fracciones equivalentes?, la EPM reconoció que había tenido una interpretación incorrecta de lo que se mencionaba en el libro de texto utilizado por los alumnos. Explicó que ella distinguió entre equivalentes e iguales, "equivalentes como aquellas que son múltiplos e iguales las que tienen la misma expresión decimal". El libro de texto que utilizaban los alumnos no presenta la definición de fracciones equivalentes y por ello, la EPM consideró como definición la propiedad que afirma que si tenemos una fracción y multiplicamos su numerador y su denominador por un número entero distinto de cero, entonces obtenemos una fracción equivalente. Como ya explicamos en apartados anteriores, esta propiedad permite obtener infinitas fracciones equivalentes a una dada, pero no necesariamente cualquiera de la clase de equivalencia. Al preguntarle cuál es la definición de fracciones iguales, la EPM respondió que son aquellas "asociadas a la misma expresión decimal". Esto le permitió, entonces, afirmar que las fracciones $\frac{20}{8}$ y $\frac{50}{20}$ son iguales, y por lo expuesto en primer lugar, no son equivalentes. La EPM percibió, con angustia, ante las preguntas que había algo de lo que había enseñado que no era matemáticamente correcto y no pudo recuperar por sí la definición de fracciones equivalentes, ya fuere porque no la conocía o no la recordaba; solicitó a la entrevistadora que le explicara todos los conceptos correctamente para que cuando los tuviera que enseñar nuevamente pudiera hacerlo sin errores.

CONCLUSIONES

El objetivo de este trabajo consistió en explorar el efecto de la implementación de una tarea para la formación de profesores, con base en tres de los temas propuestos por Zaslavsky y Sullivan (2011), que abarcó cinco fases: estudio, diseño, implementación y análisis, reflexión y síntesis, a partir de constructos de la matemática educativa. La tarea le permitió a la EPM una reflexión acerca de aspectos didácticos relativos a la implementación de una clase con base en la indagación de significados. La EPM pudo reconocer la principal dificultad que vivió: sostener la metodología de trabajo para no instalar una clase tradicional. Reconoció que por momentos le costó actuar como guía de los estudiantes. En cuanto a las fortalezas, consideró que logró que sus alumnos evolucionaran de una visión operacional del signo de igual a una visión relacional dado que la igualdad con la que trabajó no tenía operaciones en ninguno de los dos miembros. De estas observaciones realizadas por la EPM constatamos que la tarea propuesta efectivamente movilizó los temas 4, 5 y 7 sugeridos por Zaslavsky y Sullivan (2011) pues la EPM diseñó un problema consistente con la práctica de indagación (en la fase de diseño), reflexionó sobre las dificultades y logros en la implementación (en la fase de implementación y análisis) e identificó las ideas matemáticas que sus alumnos movilizaron en la resolución del problema (en las fases de reflexión y de síntesis). En este sentido, la tarea propuesta a la EPM resultó eficaz para promover una reflexión sobre su práctica, su hacer como docente y los logros de sus alumnos.

No obstante, se presentó un problema de naturaleza disciplinar pues las nociones matemáticas que la EPM enseñó a sus alumnos no fueron matemáticamente correctas, como, por ejemplo, que "dos fracciones iguales pueden no ser equivalentes". En consecuencia, se detectó que la EPM posee concepciones alternativas que no son consistentes con la teoría matemática; por ello, afirmamos que, adicionalmente, la tarea propuesta permitió indagar las concepciones alternativas de la propia EPM sobre fracciones iguales y equivalencia de fracciones. Esta indagación se realizó a partir de las evidencias que surgieron de la implementación de la clase por parte de la EPM. Las concepciones alternativas son aquellos conceptos de las personas que no son consistentes con el conocimiento disciplinar (Narjaikaew, 2013). En este caso se identificó la siguiente concepción alternativa: dos fracciones pueden ser iguales (si tienen la misma expresión decimal) sin ser equivalentes (porque no hay un número entero tal que, al multiplicar numerador y denominador de una de esas fracciones por ese número, permita obtener la otra). Asimismo, se obtuvo evidencia de que la EPM enseñó esta concepción matemáticamente incorrecta a sus alumnos. Esta incidencia de las concepciones en la práctica profesional de la EPM son consistentes con lo reportado por Chhabra y Baveja (2012) y por Ryan y Williams (2007): los docentes no enseñan el conocimiento disciplinar sino las concepciones que han elaborado acerca de ese conocimiento.

A la luz de la problemática identificada, no solo en relación a las concepciones alternativas de la EPM sino también a cómo esas concepciones se trasladan a sus estudiantes de enseñanza secundaria, entendemos que este estudio aporta evidencia de que para un futuro profesor es ineludible un conocimiento profundo de las distintas construcciones del conjunto de los números racionales y de sus abordajes en la matemática escolar. Así, se abren preguntas que deberían ser atendidas por la investigación: ¿Cuáles podrían ser los enfoques de la enseñanza del número racional más pertinentes para una formación de profesorado en matemáticas? ¿Cómo puede el formador en matemáticas conectar con los contenidos que se enseñan en didáctica de matemáticas? ¿Cómo puede el formador en matemáticas conectar con las prácticas de enseñanza de las matemáticas en el nivel secundario aun cuando no posea experiencia de trabajo en ese nivel?

En síntesis, la tarea presentada a la EPM permitió, por un lado, aportar a la experimentación de una futura profesora con la práctica de interrogar significados (Szydlik, 2015) para profundizar en el pensamiento de sus estudiantes y tomar decisiones con base en ese conocimiento. Por otro, permitió al equipo de investigación indagar sobre los significados de fracciones equivalentes, signo igual y número racional de la propia EPM. Esto es, los significados que había construido a lo largo de su trayectoria escolar sobre los conceptos que ella misma enseñó en la clase implementada. Así, la práctica de interrogar significados asumió en este trabajo un doble rol: como herramienta de indagación del pensamiento de los estudiantes para la EPM y como herramienta de indagación del pensamiento de la EPM para el equipo de investigadoras. En este doble rol, la tarea diseñada y propuesta demostró, en efecto, un enorme potencial, pues es a partir del pleno conocimiento de las dificultades de los EPMs que los formadores podrán ayudarlos a conquistar las habilidades profesionales. La práctica de interrogar significados no solo constituyó una "ventana al pensamiento de nuestros estudiantes [de enseñanza secundaria]" (Szydlik, 2015, p. 656), sino, también, una ventana al pensamiento de una EPM. Con esto se amplía el campo de aplicación de la práctica de interrogar significados al ámbito de la formación de profesores de matemáticas tanto con objetivos formativos como investigativos.

Este trabajo posee como limitante que se trata de un estudio de caso único, no obstante, se considera que es sumamente ilustrativo para quienes están interesados en la formación de profesores de matemáticas y también para aquellos que diseñan políticas públicas en torno a programas de formación de profesores o que se ocupan de los diseños curriculares de esos programas.

Finalmente, recomendamos a los formadores de matemáticas tener en cuenta para la planificación de sus cursos que los futuros profesores no enseñan los contenidos matemáticos sino las concepciones que elaboran sobre ellos y, por lo tanto, desde el aula de formación docente debería contribuirse para que las concepciones que construyen los EPMs sean consistentes con el conocimiento científico aceptado por la comunidad matemática, minimizando así los riesgos de que circule en las aulas de enseñanza secundaria un conocimiento que es matemáticamente incorrecto. Este estudio nos enseñó que no es posible una formación didáctica de los futuros profesores separada del conocimiento matemático, esto es, la formación didáctica es específica y debe abordar de manera interrelacionada los conceptos matemáticos con los constructos provenientes de la matemática educativa, ya sea en las clases de didáctica de matemáticas como en las clases de matemáticas de la formación de profesores. Sostenemos que no hay metodologías de enseñanza que puedan circular de manera eficaz en el aula si el profesor no posee un profundo conocimiento de la matemática escolar.

REFERENCIAS

Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(2), 132–144.

Borko, H., Eisenhart, M., Brown, C., Underhill, R., Jones, D. y Agard, P. (1992). Learning to teach hard mathematics: Do novice teachers and their instructors give up too easily? *Journal for Research in Mathematics Education, 23*(3), 194–222. https://doi.org/10.2307/749118

Carvalho, R. (2023). Prospective teacher's representations of fractions. *Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME13), Alfréd Rényi Institute of Mathematics; Eötvös Loránd University of Budapest, Hungary. hal-04413461.

Chhabra, M. y Baveja, B. (2012). Exploring Minds: Alternative Conceptions in Science. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 55, 1069 – 1078. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.09.599

Copur-Gencturk, Y. (2021). Teachers' conceptual understanding of fraction operations: results from a national sample of elementary school teachers. *Educational Studies in Mathematics 107*, 525–545. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10033-4

Copur-Gencturk, Y. (2022). Teachers' knowledge of fraction magnitude. *International Journal of Science and Mathematics Education, 20*(5), 1021-1036. https://doi.org/10.1007/s10763-021-10173-2

Cubero, R. (2021). Concepciones alternativas, preconceptos, errores conceptuales. ¿distinta terminología y un mismo significado? *Investigación En La Escuela*, 23, 33–42. https://doi.org/10.12795/IE.1994.i23.03

Depaepe, F., Torbeyns, J., Vermeersch, N., Janssens, D., Janssen, R., Kelchtermans, G., Verschaffel, L. y Van Dooren, W. (2015). Teachers' content and pedagogical content knowledge on rational numbers: A comparison of prospective elementary and lower secondary school teachers. *Teaching and Teacher Education 47*, 82–92.

Escudero-Ávila, D., Montes, M. y Contreras, L. (2021). What Do Mathematics Teacher Educators Need to Know? Reflections Emerging from the Content of Mathematics

Teacher Education. En M. Goos y K. Beswick (Eds.), *The Learning and Development of Mathematics Teacher Educators. International Perspectives and Challenges* (pp. 23–40). Springer.

Kieran, C. (1981). Concepts Associated with the Equality Symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12(3), 317–326. https://doi.org/10.1007/BF00311062

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* National Academy Press.

Lentin, A. y Rivaud, J. (1982). *Álgebra moderna*. Aguilar.

Merenluoto, K. y Lehtinen, E. (2002). Conceptual change in mathematics: understanding the real numbers. En M. Limón y L. Mason (Eds.), *Reconsidering conceptual change. Issues in theory and practice* (pp. 233–258). Kluwer Academic Publishers.

Molfino, V. y Ochoviet, C. (2019a). A mathematics teacher's identity study through their teaching practices in a postgraduate training course. The Mathematics Enthusiast, 16(1), 389–408. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1465

Molfino, V. y Ochoviet, C. (2019b). La producción de conocimiento didáctico en la formación de profesores de matemática: la investigación como herramienta. En Macedo, B.; Silveira, S.; García, M.; Meziat, D.; Bengochea, L. (Eds). *Enseñanza y aprendizaje de las ciencias en debate. Volumen 1* (pp. 616-625). Alcalá, España: Servicio de comunicaciones Universidad de Alcalá.

Molfino, V., Ochoviet, C. y Pagés, D. (2023). Exploración de las identidades profesionales de tres formadoras de profesores de Matemáticas a través de narrativas. R*evista da investigação às práticas, 13*(2), e-362. https://doi.org/10.25757/invep.v13i2.362

Murray, E. y Baldinger, E. (2018). Impact of Abstract Algebra on Teachers' Understanding of and Approaches to Instruction in Solving Equations. En N. Wasserman (Ed.), *Connecting Abstract Algebra to Secondary Mathematics, for Secondary Mathematics Teachers* (pp. 403–429). Springer.

Narjaikaew, P. (2013). Alternative Conceptions of Primary School Teachers of Science about Force and Motion. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 88, 250–257. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2013.08.503

Newton, K. J. (2008). An extensive analysis of preservice elementary teachers' knowledge of fractions. *American Educational Research Journal*, *45*(4), 1080–1110.

Ochoviet, C. (2022). *Enseñar a enseñar en la formación inicial de profesores de matemática*. Informe final de proyecto por año sabático, Consejo de Formación en Educación, ANEP.

Ochoviet, C. y Parodi, S. (2024). Vinhetas conceituais para o ensino de didática da Matemática. *Revista Binacional Brasil-Argentina: Diálogo Entre As Ciências, 13*(01), 386-413. https://doi.org/10.22481/rbba.v13i01.14230

Ryan, J. y Williams, J. (2007). *Children's Mathematics 4-15. Learning From Errors and Misconceptions.* McGraw-Hill.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4–14.

Son, J. W. y Crespo, S. (2009). Prospective teachers' reasoning and response to a student's non-traditional strategy when dividing fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 12*(4), 235–261. https://doi.org/10.1007/s10857-009-9112-5

Stein, M. K. y Smith, M. S. (1998a). Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*(4), 268-275. https://doi.org/10.5951/MTMS.3.4.0268

Stein, M. K. y Smith, M. S. (1998b). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(5), 344-350.

Szydlik, J. (2015). Mathematical Conversations To Transform Algebra Class. *Mathematics Teacher*, *108*(9), 656–661.

Tirosh, D. y Tsamir, P. (2024). Mis-Out and Mis-In Examples: The Case of Rational Numbers. *International Journal of Science and Mathematics Education.* https://doi.org/10.1007/s10763-024-10479-x

Zaslavsky, O. (2008). Meeting the challenges of mathematics teacher education through design and use of tasks that facilitate teacher learning. En B. Jaworski y T. Wood (Eds.), The mathematics teacher educator as a developing professional (pp. 93–114). Sense Publishers.

Zaslavsky, O. y Sullivan, P. (2011). Setting the stage: A conceptual framework for examining and developing tasks for mathematics teacher education. En O. Zaslavsky y P. Sullivan (Eds.), *Constructing knowledge for teaching secondary mathematics* (pp. 1–19). Springer.

Zazkis, R. y Marmur, O. (2018). Scripting tasks as a springboard for extending prospective teachers' example spaces: A case of generating functions. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *18*(4), 291–312. https://doi.org/10.1007/s42330-018-0019-y

Autora de correspondencia

Verónica Molfino Vigo

Dirección: Av. Libertador Brigadier General Lavalleja 2025,
Montevideo, Uruguay
veromolfino@gmail.com