

Comparando y contrastando las teorías APOE y de Registros de Representación Semiótica: una posible integración

Comparing and contrasting APOS and Registers of Semiotic Representation theories: a possible integration

José David Morante Rodríguez,¹ Lidia Aurora Hernández Rebollar,² María Trigueros Gaisman³

Resumen: Se informan los resultados de la comparación y la contrastación de las teorías APOE y de Registros de Representación Semiótica los cuales servirán para establecer lazos entre ellas y reflexionar sobre la pertinencia de utilizarlas de manera conjunta en el estudio de la comprensión de conceptos matemáticos. Se exhibe el análisis de los fundamentos teóricos, principios, constructos, relaciones epistemológicas y metodológicas y su relación con la enseñanza usando la metodología del Networking of Theories. Los resultados muestran que la integración de estas teorías es viable para generar un marco coherente que permita explorar fenómenos educativos a través de una nueva lente.

Palabras clave: *Teoría APOE, teoría de los registros de representación semiótica, Networking of theories.*

Fecha de recepción: 10 de enero de 2024. **Fecha de aceptación:** 28 de marzo de 2025.

¹ Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México, morantert@gmail.com, <http://orcid.org/0000-0002-8089-0386>

² Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México, lidia.hernandez@correo.buap.mx, <http://orcid.org/0000-0003-0658-4396>

³ Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México, mtriguerosg@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-7527-6704>

Abstract: The results of the comparison and contrast of the APOS and Semiotic Representation Registers theories are reported, which will serve to establish links between them and reflect on the relevance of using them together in the study of the understanding of mathematical concepts. The analysis of the theoretical foundations, principles, constructs, epistemological and methodological relationships and their relationship with teaching using the Networking of Theories methodology is exhibited. The results show that the integration of these theories is viable to generate a coherent framework that allows exploring educational phenomena through a new lens.

Keywords: *APOS theory, theory of semiotic representation registers, Networking of theories.*

INTRODUCCIÓN

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas ha sido abordada desde diferentes perspectivas, debido a la pluralidad de enfoques que obedecen tanto a regiones como aspectos culturales (Bikner-Ahsbahs y Prediger, 2014; Krainer, 2003).

Esta diversidad de enfoques teóricos muestra la riqueza e interés creciente de la comunidad educativa pero, al mismo tiempo puede conducir a resultados someros o generar roces entre estos, debido a los aspectos parciales que cada uno aborda (Godino, 2022) y que en varias ocasiones resultan en una fragmentación del campo investigativo dentro de la matemática educativa (Noddings, 1996; Goldin, 2003; Lesh y Sriraman, 2005; Sriraman y English, 2010; Artigue y Mariotti, 2014; Krainer, 2003; Rasmussen *et al.*, 2014).

Las investigaciones del campo muestran un constante interés por abordar un mismo fenómeno usando distintos marcos teóricos (Artigue y Mariotti, 2014; Bakker y Zenger, 2021) con la finalidad de complementarse unos a otros en el estudio de una misma problemática. Otros trabajos han explorado una perspectiva más teórica en el sentido de explorar las posibilidades teóricas y metodológicas que puede ofrecer el trabajar con más de un enfoque (Font *et al.*, 2016; Godino, 2022). Finalmente, otros trabajos han expuesto esta necesidad a la luz de conceptos específicos en matemáticas (Martínez-Planell y Trigueros, 2012).

En este contexto, diversas investigaciones se han centrado en explorar cómo garantizar que la misma problemática abordada desde distintos enfoques

teóricos sea congruente y permita trascender más allá de una mera complementariedad de recursos u ornamentos investigativos.

Estas investigaciones han venido consolidando la denominada *Networking of Theories*, cuyos inicios se asocian con el contraste y establecimiento de conexiones entre las teorías y el diseño de metodologías que permitan articular enfoques teóricos de manera congruente (Prediger *et al.*, 2008).

Un aspecto por resaltar es que, en los casos en que se consigue dar paso a una relación entre enfoques teóricos, la rigurosidad o formalidad teórica se abandona y solo se enfatiza el papel pragmático de esta relación. Consecuentemente, las explicaciones o caracterizaciones de un fenómeno estudiado quedan poco exploradas dado que, no se da espacio a la modularidad y congruencia de la naturaleza ontológica, epistemológica y metodológica de los marcos usados que pueda servir como una nueva lente para estudiar fenómenos. Al respecto, Lester (2005) señala que el marco teórico es fundamental, pero al mismo tiempo puede ser el aspecto menos comprendido del proceso de investigación.

Estas ideas permiten enfatizar una problemática principal: cómo garantizar una correcta integración de enfoques teóricos que trascienda a la complementariedad o minimice la existencia de una relación incongruente.

En este contexto, es pertinente mencionar que el *Networking of Theories* ha venido desarrollando casos concretos de trabajo en red, por ejemplo, en Bikner-Ahsbahs y Prediger (2014) se reportan y discuten ampliamente cuatro casos de estudio sobre redes de trabajo a diferentes niveles y entre enfoques teóricos como: el Enfoque de Acción, Producción y Comunicación (APC) y la Introducción a la Abstracción en Contexto (AiC), capítulo 9. Otro caso de estudio es la red de trabajo entre la Teoría de Situaciones Didácticas (TDS) y la Introducción a la Abstracción en Contexto (AiC), capítulo 10. La red de trabajo entre la Introducción a la Teoría de Situaciones Densas en Interés (IDS) y el Enfoque de Acción, Producción y Comunicación (APC), capítulo 11. Por otra parte, el estudio de caso entre la Teoría de las Situaciones Densas en Interés (IDS) y la Teoría de Situaciones Didácticas (TDS) capítulo 12. En general, estos trabajos representan la primera oleada propuesta de sistematización de esta metodología.

Una segunda oleada de trabajos en los que se ha usado activamente esta metodología, son los de Drijvers *et al.* (2003), Maracaci (2008), Tabach y Nachlieli (2011), Fetzner (2013), Drayfus *et al.* (2014), Sabena *et al.* (2014), Alberto *et al.* (2019), Bingolbali *et al.* (2021), Bikner-Ahsbahs (2022), Ledezma *et al.* (2023), Rodríguez-Nieto *et al.* (2022). Un aspecto para destacar de estos estudios es que la mayoría reporta el uso de uno o dos niveles de estrategias de trabajo en red.

Otros trabajos han explorado las estrategias del Networking of Theories para impulsarla como una práctica de investigación, por ejemplo: Wedege (2010), Artigue y Bosh (2014), Kidron (2016, 2019), Godino *et al.* (2013), Artigue (2019), Bach *et al.* (2021).

Estos trabajos permiten dimensionar los esfuerzos por relacionar enfoques teóricos de manera más consistente y profunda para explorar sus alcances en la comprensión de fenómenos educativos o en la propuesta de nuevas perspectivas teóricas.

En este trabajo nos centramos en mostrar la posibilidad de la generación de una red de trabajo entre las teorías APOE y de Registros de Representación Semiótica que permita ofrecer una mirada de cómo estos enfoques teóricos pueden entrelazarse en el estudio de fenómenos interpretados a la luz de esta nueva lente.

La selección de las teorías APOE y de Registros de Representación Semiótica se fundamenta en investigaciones que evidencian su potencial complementario para analizar la comprensión de conceptos matemáticos. Estudios como los de Trigueros y Martínez-Planell (2010), Martínez-Planell y Trigueros (2012, 2019) con las funciones de dos variables, han demostrado la utilidad de combinar ambas perspectivas para comprender la relación entre la visualización gráfica y las estructuras cognitivas. Sin embargo, aunque estos trabajos abren camino para una integración más profunda, su objetivo principal ha sido el análisis de datos específicos, más que el desarrollo de un marco teórico unificado. En línea con esta necesidad, Hernández *et al.* (2023) resaltan la importancia de explicitar las estructuras mentales subyacentes a cada representación semiótica e incluirlas en el modelo de análisis de la teoría APOE, la descomposición genética.

Los estudios analizados, aunque exploran la relación entre las teorías APOE y de Registros de Representación Semiótica, no logran integrarlas de manera sistemática. Como resultado, las caracterizaciones del conocimiento se limitan a las estructuras mentales propuestas por la teoría APOE, dejando de lado las transformaciones semióticas. Esto impide una exploración profunda de la interrelación entre los planos semiótico y cognitivo, dado que carecemos de un modelo teórico que permita analizar ambas perspectivas de manera conjunta.

La construcción de un enfoque integrado es fundamental para superar las limitaciones actuales y lograr una comprensión más profunda de los procesos de aprendizaje matemático. Para esto, es necesario realizar un análisis comparativo exhaustivo de ambos enfoques, considerando sus fundamentos epistemológicos, metodologías, implicaciones pedagógicas y modelos de análisis. Este análisis

permitirá identificar tanto las convergencias como las divergencias entre ambas teorías, sentando las bases para la construcción de un marco teórico unificado. El Networking of Theories se presenta como una metodología especialmente prometedora para esta tarea, ya que permite articular de manera sistemática las relaciones entre diferentes teorías y construir modelos integrativos que superen las limitaciones de los enfoques individuales.

Este proyecto forma parte de una investigación más amplia en la que pretendemos dar respuesta a la siguiente pregunta de investigación: ¿En qué medida el desarrollo de lazos entre los marcos teóricos APOE y registros de representación semiótica contribuye a enriquecer el marco teórico de ambas?

En este trabajo, nos centramos en las estrategias de *comparación* y *contrastación* para responder: ¿Qué diferencias y similitudes se encuentran en el análisis de estas teorías?

Para dar respuesta a la segunda pregunta de investigación se plantea el siguiente objetivo: identificar las diferencias y similitudes de ambas teorías como parte de las estrategias para explorar la viabilidad de su integración.

RED DE TRABAJO ENTRE TEORÍAS (NETWORKING OF THEORIES)

En este trabajo se adopta la metodología propuesta por el Networking of Theories para estudiar la posible red de trabajo entre la teoría APOE y de Registros de Representación Semiótica, en particular, para la etapa de la *comparación* y la *contrastación*.

A lo largo de distintas publicaciones Prediger *et al.* (2008); Bikner-Ahsbahr y Prediger (2009) se refieren al Networking of Theories, como: “el conjunto de prácticas de investigación que tienen como objetivo crear un diálogo y establecer relaciones entre partes de enfoques teóricos respetando la identidad de dichos enfoques”.

Para sistematizar y reflejar la manera en que se lleva a cabo el diálogo entre diferentes enfoques teóricos, el Networking of Theories proporciona un panorama de estrategias de trabajo en red a distintos niveles de profundidad. Su propuesta parte de dos posturas radicales, por un lado, el desconocimiento de otras teorías al momento de abordar una problemática y en el otro extremo una unificación global de las teorías.

Adoptando como punto de partida la premisa de que las teorías no están aisladas, sino que pueden aprender unas de otras, la atención se centra en

estrategias intermedias para encontrar conexiones, en la medida de lo posible, entre distintos enfoques teóricos. Todas estas estrategias intermedias se denominan estrategias de trabajo en red y su finalidad radica en respetar, por un lado, el pluralismo y/o modularidad de los enfoques teóricos autónomos, pero que, por otro lado, se preocupan por reducir la multiplicidad inconexa de enfoques teóricos en la ciencia (Prediger *et al.*, 2008, p. 170).

Con base en lo expuesto, las estrategias del trabajo en red se ordenan en función del grado de integración de las teorías respectivas y se estructuran por medio de las siguientes parejas: comprendiendo y haciendo comprensible; comparando y contrastando; combinando y coordinando; e integrando localmente y sintetizando (figura 1).

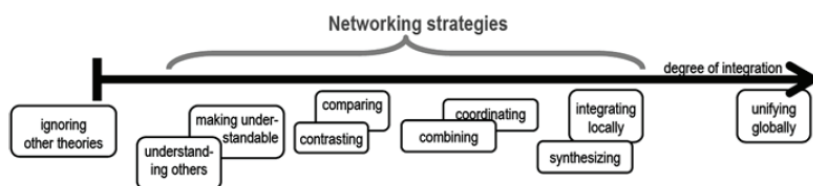


Figura 1. Un panorama de estrategias para conectar enfoques teóricos
(Tomado de Prediger *et al.*, 2008)

De acuerdo con esto, se comienza con el trabajo de *comprender* y *hacer comprensible* los enfoques con los que se pretende trabajar. Para ello es necesario entender los constructos clave, los principios, las preguntas, la metodología y la forma en que se ofrecen los resultados desde los diversos enfoques que se pretenden considerar. Esta primera estrategia de trabajo en red resulta fundamental si se quiere lograr una sinergia congruente entre los diversos enfoques.

El siguiente par de estrategias de trabajo en red es *comparar* y *contrastar* enfoques teóricos. La primera se refiere a similitudes y diferencias de forma general, por su parte, contrastar se centra más en extraer diferencias típicas entre los enfoques analizados. En síntesis, esta estrategia se utiliza principalmente para generar una mejor comprensión de las características de las teorías que se pretende utilizar (Bikner-Ahsbahr y Prediger, 2014).

En otra etapa, las estrategias de *combinación* y *coordinación* se utilizan para comprender un fenómeno o un conjunto de datos. De esta manera la combinación alude a la visión multifacética, pero no necesariamente compatible, que se

adquiere si se observa o analiza un fenómeno desde diversos marcos teóricos y la coordinación refiere a la construcción de un nuevo marco conceptual a la luz de la comprensión de estos enfoques (Bikner-Ahsbahr y Prediger, 2014).

Finalmente, se explican las estrategias de *síntesis* e *integración local*. De acuerdo con Bikner-Ahsbahr y Prediger (2014), la síntesis refiere a la situación en la que las teorías estudiadas dan origen a un nuevo marco teórico como consecuencia de la definición de conceptos a la luz de las teorías integradas. Sin embargo, esta integración a menudo no es simétrica o de alcances mayores, por lo que se enfatiza el término “local”.

En la práctica, la aplicación de estas estrategias resulta más complicada y regularmente no se sigue una estructura lineal entre pares de estrategias. Usualmente se aplica más de una estrategia a la vez ya que el grado de integración depende de las relaciones concretas encontradas (Bikner-Ahsbahr y Prediger, 2014). A pesar de lo anterior, este marco proporciona una sistematización útil para abordar el problema de la integración de marcos teóricos.

METODOLOGÍA

Esta investigación es de corte teórico-cualitativa, se basa en la metodología del Networking of Theories y reporta únicamente los resultados de la etapa de *comparación* y *contrastación*. Aunque, es importante aclarar que también se implementaron las estrategias de *comprender* y *hacer comprensibles las teorías*.

En este contexto en la etapa inicial se trabajó en el compendio y análisis de las investigaciones de corte teórico de cada una de las teorías consideradas en este trabajo, mismas que permitieron estudiar y comprender sus aproximaciones teóricas en cuanto a la manera en que buscan caracterizar sus objetos de estudio, la forma en que conciben el conocimiento matemático, sus elementos epistemológicos, cómo se formulan preguntas de investigación en estos enfoques, etc.

En una siguiente etapa se identificó la metodología de cada teoría, así como sus modelos de análisis y se revisó gran cantidad de investigaciones de corte pragmático, en el sentido de explorar cómo se usa dicha teoría en el estudio de fenómenos específicos. Esto permitió comprender de mejor manera la relación entre los constructos y modelos de análisis de cada marco teórico.

En la etapa de las estrategias *comparar* y *contrastar* se consideraron los siguientes elementos: antecedentes, epistemología, metodología, relación con la enseñanza y la comprensión de las relaciones entre conceptos matemáticos.

Estos son componentes importantes en ambas teorías (Asiala *et al.*, 1997; Duval 1995), los cuales se compararon usando matrices en las que se organizó cada idea con sus citas específicas.

Aunque las estrategias de trabajo en red parecen ir en progresión lineal en realidad el trabajo entre una etapa y otra fue cíclico en el sentido de que a mayor profundidad y comprensión se necesitó volver sobre los primeros análisis en un camino de ida y vuelta entre cada una de las estrategias mencionadas.

RESULTADOS

Para esta presentación, se asume un conocimiento previo de las teorías analizadas. El lector puede encontrar en: Arnon *et al.*, (2014) y Duval (1995, 2017) referencias básicas sobre estas teorías.

COMPARACIÓN Y CONTRASTACIÓN

De acuerdo con Bikner-Ahsbahr y Prediger (2014), *comparar* se refiere a comprender similitudes y diferencias sobre los componentes teóricos y *contrastar* se centra más en extraer diferencias representativas. Partiendo de esta definición, se discuten los siguientes elementos claves entre las teorías APOE y TRRS (ver tabla 1): antecedentes, epistemología, metodología, relación con la enseñanza y la comprensión de las relaciones entre conceptos matemáticos.

Tabla 1. Elementos de comparación y contrastación

Elementos de comparación/ contrastación	Teoría APOE	TRRS
Antecedentes teóricos (orígenes de las teorías)	Epistemología genética de Piaget	Vygotsky, Piaget, Bruner, Peirce y Saussure
Epistemología (naturaleza del conocimiento)	Relación sujeto-objeto	Relación objeto-representación
Metodología (se examina si las teorías cuentan con ella y cómo se implementa)	Sistematizada	No sistematizada

Relación con la enseñanza	Forma parte de la teoría en su ciclo de investigación (ciclo ACE)	No es explícita
Comprensión de las relaciones entre conceptos matemáticos	Ofrece elementos para modelar este tipo de relaciones (Esquema)	No es explícita en cómo esto debería llevarse a cabo.

ANTECEDENTES TEÓRICOS

La teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos, Esquemas) es un marco teórico que busca comprender cómo los estudiantes construyen activamente el conocimiento matemático. Basada en la psicología cognitiva y el constructivismo, esta teoría propone que el conocimiento matemático no es algo que se recibe de forma pasiva, sino que se construye a través de la interacción del estudiante con los objetos matemáticos y las acciones que realiza sobre ellos. Piaget, con su concepto de abstracción reflexiva, influyó significativamente en el desarrollo de la teoría (Amon *et al.*, 2014), al destacar cómo los estudiantes transforman acciones en procesos mentales y, finalmente, en objetos matemáticos.

La teoría APOE se centra en resolver la problemática de las dificultades que experimentan los estudiantes al aprender matemáticas, especialmente cuando memorizan procedimientos sin comprender los conceptos subyacentes. Al analizar cómo se construyen las ideas matemáticas en la mente de los estudiantes y los obstáculos que enfrentan, la teoría APOE busca diseñar actividades de aprendizaje que promuevan una comprensión más profunda. Los constructos de esta teoría proporcionan un marco para analizar las dificultades de los estudiantes y diseñar tareas que faciliten la transición de una comprensión más superficial a una más profunda.

La teoría APOE busca responder a preguntas como: ¿Cómo se construyen las ideas matemáticas en la mente de los estudiantes?, ¿Qué dificultades enfrentan los estudiantes al aprender conceptos matemáticos?, ¿Cómo podemos diseñar actividades de aprendizaje que promuevan una comprensión más profunda?

La Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) ofrece un marco conceptual sólido para analizar cómo los estudiantes construyen su conocimiento matemático a través de diferentes representaciones. Al basarse en las investigaciones de Peirce y Saussure sobre la semiosis, la TRRS destaca el papel fundamental que juegan los signos y los sistemas de signos en el pensamiento matemático. Esta teoría se inscribe en una larga tradición de investigación sobre

la representación mental y el aprendizaje y, se nutre de las ideas de autores como Vygotsky, Piaget y Bruner. Sin embargo, su enfoque reivindica el papel de la semiosis en el funcionamiento del pensamiento y los considera indisociables (Duval, 2017).

La TRRS afirma que los objetos matemáticos, al ser abstractos, requieren de diversas representaciones (gráficas, algebraicas, tabulares, etc.) para ser comunicados y manipulados. La comprensión profunda de un concepto matemático implica la capacidad de coordinar diferentes registros de representación, es decir, de establecer conexiones entre distintas representaciones y de utilizarlas de manera flexible para resolver problemas.

Al analizar cómo los estudiantes interactúan con diferentes representaciones, la TRRS busca responder a preguntas clave como: ¿Cómo influyen las diferentes representaciones en el aprendizaje matemático? ¿Cuáles son las dificultades que enfrentan los estudiantes al pasar de un registro a otro? Al responder a estas preguntas, la TRRS ofrece herramientas valiosas para diseñar actividades de enseñanza que promuevan la flexibilidad en el uso de diferentes representaciones y, en última instancia, una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos.

Lo anterior, exhibe la naturaleza constructivista de la teoría APOE y semiocognitiva (Duval, 2017) en el caso de la TRRS. A pesar de estas diferencias, ambas teorías convergen en la idea de que el conocimiento matemático no se transmite de manera pasiva, sino que se construye activamente a través de la interacción del estudiante con los objetos matemáticos y las representaciones que utiliza.

EPISTEMOLOGÍA

La teoría APOE acentúa el papel de la construcción del conocimiento a través de la noción de abstracción reflexiva y considera al individuo y al objeto de conocimiento como una unidad que no puede separarse. Desde esta perspectiva el conocimiento se construye por medio de estructuras y mecanismos mentales que la teoría define. Por otra parte, la TRRS postula que la actividad matemática consiste en la semiosis y no en la abstracción (Duval, 2017). Su enfoque centra su análisis en la dualidad objeto-representación al caracterizar el tipo de transformaciones semióticas propias de la actividad matemática.

Desde esta postura, un primer contraste refiere a que en la TRRS el individuo no asume un rol explícito en el desarrollo teórico. Situación que puede ilustrarse al notar que la teoría focaliza su análisis en las posibilidades que ofrece un

sistema semiótico en la actividad matemática. Lo anterior no significa que el individuo no tome parte del desarrollo, sino que su consideración se da en un plano diferente en este enfoque teórico, a pesar de reconocer el papel cognitivo en la comprensión.

Ahora se comparará el posicionamiento de cada teoría acerca del conocimiento. En la teoría APOE, el conocimiento matemático de un individuo es entendido como: “su tendencia a responder a las situaciones de problemas matemáticos percibidos al reflexionar sobre los problemas y sus soluciones en un contexto social y al construir o reconstruir acciones, procesos y objetos matemáticos y organizarlos en esquemas para usarlos al tratar con las situaciones” (Asiala, *et al.*, 1997). Tratándose de la TRRS no se pone de manifiesto una declaración en cuanto a lo que se entiende por conocimiento matemático, pero sostiene que “el quid está en si se considera o no la SEMIOSIS...este posicionamiento plantea la necesidad de una distinción epistemológica entre los objetos según sus modos cognitivos de acceso” (Duval, 2017).

Esta comparación permite, por un lado, reafirmar lo mencionado sobre el papel del sujeto en ambos marcos teóricos y, por el otro, enfatizar la noción del objeto matemático que cada teoría considera. De esta manera, para la teoría APOE, el objeto matemático es el resultado de una relación inseparable entre el objeto definido matemáticamente y el individuo que lo construye (Arnon *et al.*, 2014). En la TRRS, el objeto matemático se considera el invariante de una multitud de representaciones semióticas que surge cuando dos o más representaciones semióticas son reconocidas como representantes del mismo objeto (Duval, 2017).

En este contexto, otro contraste importante es que estos enfoques teóricos abordan su trabajo desde una relación dual, sujeto-objeto en el caso de la teoría APOE y objeto-representación en la TRRS.

La idea anterior es clave, ya que permite contrastar esta forma de interpretación. Por ejemplo, en la teoría APOE, las estructuras y mecanismos mentales permiten profundizar en el porqué de las dificultades, en tanto que en la TRRS se asume que estas dificultades se explican por la problemática para cambiar el registro de representación.

En otro aspecto, de manera general, se establece el contraste de acuerdo con el tipo de información del fenómeno cognitivo en el que se enfocan. La teoría APOE se cuestiona qué es lo que construye el aprendiz o, en otras palabras, ¿cuál es la naturaleza de las construcciones del sujeto?, destacando el énfasis en la actividad de los individuos cuando resuelven un problema y cómo ponen en juego aquello que han aprendido en nuevas situaciones. En este aspecto, la

TRRS se cuestiona la relación entre diferentes sistemas semióticos a través de las transformaciones en y entre registros de representación semiótica. En línea con Duval (2017, pág. 27) el análisis semiocognitivo de la actividad matemática en términos de registros describe la manera específica de trabajar en matemáticas.

METODOLOGÍA

Bajo el contexto anterior, se abre otro punto de comparación que consiste en examinar la metodología que cada enfoque teórico pone a disposición para el trabajo investigativo. Este elemento resulta sumamente importante, ya que su consistencia permite poner en práctica la teoría de forma sistemática.

La teoría APOE, ofrece una metodología de investigación explícita basada en un ciclo de investigación de tres componentes: análisis teórico, diseño e implementación de la instrucción, recopilación y análisis de datos. Para la intervención en el aula la teoría propone un ciclo de enseñanza denominado ciclo ACE. El ciclo de investigación se repite hasta que los datos muestren que los estudiantes realizan las construcciones mentales que la descomposición genética hipotetiza.

El análisis teórico inicial, primera etapa del ciclo, del concepto que se desea abordar y en el cual se explora lo que significa entender el concepto matemático y cómo un individuo puede construirlo, conduce a la propuesta de una descomposición genética preliminar. En la siguiente fase se procede al diseño instruccional que busca que los individuos construyan las estructuras mentales identificadas en el análisis teórico del concepto. Finalmente, los datos que se obtienen del tratamiento instruccional, como consecuencia de su aplicación, son analizados en el contexto de la teoría APOE y, en su caso, utilizados para reiniciar el ciclo antes descrito con el propósito de refinar la descomposición genética, si es necesario, y reformular la instrucción en relación con los cambios en la descomposición genética.

Tratándose de la TRRS, esta no ofrece una metodología explícita que permita implementar de forma sistemática sus constructos. Lo que ofrece son una serie de consideraciones en investigaciones con un enfoque semiótico (Duval, 2008). Al respecto, esta teoría plantea que deben distinguirse dos cuestiones. Por un lado, la identificación de variables que determinan el desarrollo de la comprensión en matemáticas y por el otro el análisis e interpretación de las producciones de los estudiantes (sin importar el medio por el cual se recojan). Señala que esta distinción es vital por tratarse de un modelo del funcionamiento cognitivo.

Siguiendo con esto, Duval (2008) menciona que un estudio de tipo semiótico puede realizarse en tres etapas que consideren lo siguiente: una necesidad inicial de identificar las variables que denotan comprensión conceptual basada en una red de registros que abarque sus reglas de formación, características de los tratamientos y conversiones y sus relaciones; dividir las producciones de los estudiantes en segmentos de lo que el estudiante hace o no entre los diferentes registros; finalmente, analizar las producciones en busca de relaciones que puedan asociarse con la evolución de la comprensión o no.

A partir de esto, pueden exhibirse diferencias significativas en el trabajo metodológico en ambos enfoques teóricos. Un primer elemento que considerar es enfatizar la metodología explícita que ofrece la teoría APOE en contraste con una metodología sugerida que ofrece la TRRS.

De manera más detallada, la TRRS hipotetiza, en una de sus etapas, la conformación de una red entre registros de representaciones, pero no proporciona una forma sistematizada de llevar a cabo esta tarea. En consecuencia, su implementación queda relegada a la interpretación que cada usuario, de la teoría, determine.

Por el contrario, la teoría APOE coloca por delante en todo momento su modelo de análisis (la descomposición genética), lo cual dota al investigador de una herramienta objetiva y sistematizada al momento de implementar la teoría en la práctica.

RELACIÓN CON LA ENSEÑANZA

La situación anterior, abre otro punto de contraste, ya que la teoría APOE está relacionada estrechamente con la enseñanza, situación enfatizada en su ciclo de investigación, al considerar la intervención en el aula como uno de sus elementos. Por el contrario, la TRRS busca explicar el porqué de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes, razón por la cual puede considerarse “resuelta” en el sentido de que su formulación ofrece una respuesta a esta cuestión. Esta condición hace que se restrinja a sugerir posibles formas de trabajar con las transformaciones semióticas en el aula, pero no a describir de forma detallada y particularizada cuál sería el camino para lograr el aprendizaje.

Otro punto que refuerza la idea anterior es que bajo el enfoque de la TRRS usualmente no se reporta o describe si la red entre registros siempre es funcional, es susceptible de mejoras o modificaciones.

Las cuestiones anteriores pueden relacionarse con la falta de una metodología explícita, pero también, obedecer a una naturaleza distinta de lo que la teoría se cuestiona y en la cual se observa que su génesis no está directamente relacionada con la enseñanza, aunque se preocupa por los problemas del aprendizaje. Esto puede dar idea de por qué su desarrollo metodológico es de otra índole.

COMPRENSIÓN DE LAS RELACIONES ENTRE CONCEPTOS MATEMÁTICOS

Una vertiente más por considerar es que muchos de los conceptos en matemáticas se relacionan entre sí, por medio de temas, problemáticas o como parte de estructuras más generales. Estas relaciones son abordadas, desde la teoría APOE, a partir de la noción de *Esquema*, la cual permite dar cuenta del estado de construcción de relaciones entre conceptos matemáticos que pueden asociarse con niveles que caracterizan su evolución.

Al respecto puede destacarse que en el caso de la TRRS no se explicita cómo puede explorarse el trabajo a nivel de estas relaciones.

DISCUSIÓN

En esta sección se presentan cuatro elementos que nos permiten concluir que la búsqueda de una integración de estas teorías en un nuevo marco teórico es viable, en el sentido de que sus principios pueden articularse de forma coherente en un marco de referencia que permita definir problemas a la luz de una nueva lente.

ELEMENTO EPISTEMOLÓGICO

Un fundamento sólido para proponer la integración de ambos marcos teóricos es que el análisis epistemológico muestra que los dos enfoques enfatizan el papel cognitivo en su génesis. Aunque con una clara diferencia en su aproximación a los fenómenos de estudio.

Retomando el énfasis del sujeto en la teoría APOE y un rol no explícito, de este, en el caso de la TRRS. Al tomar en cuenta esta observación para el nuevo marco teórico pretendido podríamos ampliar la caracterización acerca de la

complejidad de las transformaciones semióticas y resolver preguntas como ¿qué se necesita para que los individuos puedan realizar transformaciones semióticas?

De manera específica, el énfasis epistemológico de la teoría APOE en la relación indisociable del sujeto y el objeto de conocimiento puede aportar al marco pretendido una forma de tomar en consideración que la razón de las dificultades de los individuos trasciende las características semióticas y redimensiona el papel del sujeto.

Por otro lado, si se considera el principio de la TRRS de que la actividad matemática precisa de los registros de representación semiótica. Esta caracterización puede aprovecharse para que el nuevo marco de referencia tenga la posibilidad de considerar el papel fundamental de los registros y de las transformaciones semióticas en la actividad matemática.

Es importante mencionar que en diversas investigaciones fundamentadas en la teoría APOE se ha incluido, de alguna manera, el papel de las distintas representaciones de un concepto. Sin embargo, inicialmente, las descomposiciones genéticas no describían las Acciones o Procesos necesarios en la construcción de un concepto en términos de los diferentes registros semióticos.

Al generarse un nuevo enfoque teórico que en su génesis considere el papel de los registros de representación semiótica se puede extender la referencia al objeto construido en sus distintas representaciones y además profundizar en sus explicaciones. Por ejemplo, en la TRRS se reconoce que la demanda cognitiva necesaria para realizar las transformaciones semióticas en cada registro es diferente, pero no se caracteriza esta complejidad. De manera que el marco propuesto, al integrar los mecanismos cognitivos de la teoría APOE y al redimensionar su papel en los diferentes registros agregaría nuevos matices en la interpretación de los problemas sobre el aprendizaje de los objetos matemáticos.

ELEMENTO METODOLÓGICO

Otro elemento para considerar es lo que el modelo de análisis de cada teoría podría aportar al nuevo marco teórico posible. Desde la teoría APOE, la descomposición genética (modelo de análisis) hipotetiza la manera en que se da la construcción de conceptos matemáticos y, dado que los objetos matemáticos son inaccesibles físicamente, la descripción requiere del uso de, al menos, un registro de representación. Con base en ello, la descomposición genética puede ampliar su riqueza al incorporar explícitamente la descripción de la construcción

del concepto matemático en los distintos registros de representación y las transformaciones entre ellos.

En este contexto, cabe señalar que las teorías analizadas no se contraponen, dado que no se modifica la forma en que se caracteriza el modelo del pensamiento, sino que se podría extender y especificar la referencia al objeto que se desea construir.

ELEMENTO EDUCATIVO (ENSEÑANZA)

Otro punto importante es ser consciente de que la TRRS no ofrece una metodología para la enseñanza. Esto motiva más la pertinencia de proponer un nuevo marco de referencia que haga claros estos elementos, mismos que permitirían sistematizar la implementación de los principios de la TRRS.

Por lo tanto, creemos que no es necesario partir de planteamientos nuevos, sino que puede aprovecharse la metodología de enseñanza de la teoría APOE para que, en combinación con las nociones tomadas de la TRRS, se incluya una metodología de enseñanza que involucre el papel de los registros de representación semiótica de forma sistemática.

EL ELEMENTO ASOCIADO A LAS RELACIONES ENTRE CONCEPTOS MATEMÁTICOS

El nuevo enfoque teórico pretendido podría integrar las ideas del estudio de evolución de un *Esquema*, propuesto en la teoría APOE, para profundizar y especificar las relaciones semióticas entre conceptos matemáticos.

Integrar este elemento a la lente de la TRRS podría dilucidar aún más las relaciones entre conceptos o temas a través de los diferentes registros semióticos.

CONCLUSIÓN

Subrayamos que los elementos aquí discutidos son el resultado de la implementación parcial de la metodología del Networking of Theories. Esto permitió el análisis que nos permitió aportar elementos que sustentan la idea de que una integración de la teoría APOE y la teoría de Registros de Representación Semiótica en un nuevo marco teórico es viable y consistente.

El nuevo enfoque teórico integraría principios medulares de dos teorías ampliamente reconocidas en la educación matemática para abordar el estudio

de problemas específicos dentro del área y contribuiría a enriquecer los elementos de estos enfoques.

Adicionalmente, se destaca que este trabajo contribuye a mostrar de manera más detallada cómo se desarrollaron los dos primeros pares de estrategias sugeridas por el marco de referencia.

Con fundamento en lo anterior, se pretende avanzar con las siguientes etapas del Networking of Theories. En particular se trabajará en la construcción y propuesta del nuevo enfoque teórico a la luz de los elementos aquí mostrados.

REFERENCIAS

- Alberto, R., Bakker, A., Aalst, O. W.-v, Boon, P., y Drijvers, P. (2019). Networking theories in design research: an embodied instrumentation case study in trigonometry. En U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, y M. Veldhuis, M. (Eds.). *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3088–3095).
- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E. D., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*.
- Artigue, M., y Bosch, M. (2014). Reflection on Networking Through the Praxeological Lens. En A. Bikner-Ahsbabs, y S. Prediger (Eds.), *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education* (pp. 249–265). Springer.
- Artigue, M., y Mariotti, M. A. (2014). Networking theoretical frames: The ReMath enterprise. *Educational studies in mathematics*, 85, 329–355.
- Artigue, M. (2019). Reflecting on a Theoretical Approach from a Networking Perspective: The Case of the Documentational Approach to Didactics. En L. Trouche, G. Gueudet, y B. Pepin (Eds.), *The 'Resource' Approach to Mathematics Education* (pp. 89–118). Springer.
- Asiala, M., Brown, A., Devries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., y Thomas, K. (1997). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld, y E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education II* (pp. 1–32). American Mathematical Society.
- Bach, C. C., Pedersen, M. K., Gregersen, R. M., y Jankvist, U. T. (2021). On the notion of "background and foreground" in networking of theories. En Y. Liljekvist, L. B. Boistrup, J. Häggström, L. Mattsson, O. Olande, y H. Palmér (Eds.), *Sustainable mathematics education in a digitalized world: Proceedings of MADIF 12 The twelfth research seminar of the Swedish Society for Research in Mathematics Education* (pp. 163–172).

- Bakker, A., Cai, J., y Zenger, L. (2021). Future themes of mathematics education research: An international survey before and during the pandemic. *Educational Studies in Mathematics*, 107(1), 1-24.
- Bikner-Ahsbahs, A., y Prediger, S. (2009). Networking of theories—an approach for exploiting the diversity of theoretical approaches. En *Theories of mathematics education: Seeking new frontiers* (pp. 483-506). Springer Berlin Heidelberg.
- Bikner-Ahsbahs, A., y Prediger, S. (Eds.). (2014). *Networking of theories as a research practice in mathematics education*. Springer International Publishing.
- Bikner-Ahsbahs, A. (2022). Adaptive teaching of covariational reasoning: Networking “the way of being” on two layers. *The Journal of Mathematical Behavior*, 67.
- Bingolbali, E., Demir, G. y Monaghan, J. D. (2021). Knowledge of Sets: a Didactic Phenomenon. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 19(6), 1187–1208.
- Dreyfus, T., Sabena, C., Kidron, I., y Arzarello, F. (2014). The Epistemic Role of Gestures: A Case Study on Networking of APC and AiC. En A. Bikner-Ahsbahs y S. Prediger. (Eds.), *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education* (pp. 127–151). Springer.
- Drijvers, P., Godino, J. D., Font, V., y Trouche, L. (2013). One episode, two lenses. *Educational Studies in Mathematics*, 82(1), 23–49.
- Duval, R. (1995). *Semiosis y pensamiento humano. Registro semiótico y aprendizajes intelectuales*. Traducción Vega M. (2001). Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. Grupo de Educación Matemática.
- Duval, R. (2008). Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. *Semiotics in mathematics education*, 39-61.
- Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking-The registers of semiotic representations*. Cham: Springer International Publishing.
- Fetzer, M. (2013). Counting on Objects in Mathematical Learning Processes. Network Theory and Networking Theories. En B. Ubuz, C. Haser, y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2800–2809).
- Font, V., Trigueros, M., Badillo, E., y Rubio, N. (2016). Mathematical objects through the lens of two different theoretical perspectives: APOS and OSA. *Educational Studies in Mathematics*, 91(1), 107-122.
- Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, A., Estepa, A., Lacasta, E., y Wilhelmi, M. (2013). Didactic engineering as design-based research in mathematics education. En *Proceedings of the eight Congress of the European society for research in mathematics education* (pp. 2810-2819).

- Godino, J. D. (2022). Emergencia, estado actual y perspectivas del enfoque ontosemiótico en educación matemática. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática*, 2(2), 1-24.
- Goldin, G. A. (2003). Developing complex understandings: On the relation of mathematics education research to mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 54(2-3), 171-202.
- Hernández, L. A., Trigueros, M., Ruiz, H., y Juárez, E. D. L. (2023). La concepción dinámica del límite de una función desde APOE y los registros semióticos. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*.
- Kidron, I. (2016). Epistemology and networking theories. *Educational Studies in Mathematics*, 91(2), 149-163.
- Kidron, I. (2019). Comparing a priori analyses. En U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen, y M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3029-3037).
- Krainer, K. (2003). Teams, communities & networks. *Journal of mathematics teacher education*, 6(2), 93-105.
- Ledezma, C., Font, V., y Sala, G. (2023). Analysing the mathematical activity in a modelling process from the cognitive and onto-semiotic perspectives. *Mathematics Education Research Journal*, 35(4), 715-741.
- Lesh, R., y Sriraman, B. (2005). Mathematics education as a design science. *ZDM*, 37, 490-505.
- Lester, F. K. (2005). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education. *ZDM*, 37, 457-467.
- Maracci, M. (2008). Combining different theoretical perspectives for analyzing students' difficulties in vector spaces theory. *ZDM Mathematics Education*, 40(2), 265-276.
- Martínez-Planell, R., y Trigueros, M. (2012). Students' understanding of the general notion of a function of two variables. *Educational Studies in Mathematics*, 81, 365-384.
- Martínez-Planell, R., y Trigueros, M. (2019). Using cycles of research in APOS: The case of functions of two variables. *The Journal of Mathematical Behavior*, 55, 100687.
- Noddings, N. (1996). Equity and mathematics: Not a simple issue. *Journal for research in mathematics education*, 27(5), 609-615.
- Prediger, S. (2008). How are theoretical approaches expressed in research practices? A report on an experience in comparing theoretical approaches with respect to the construction of research problems. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 40 (2), 277-286.
- Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A., y Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. *ZDM*, 40, 165-178.

- Rasmussen, C., Marrongelle, K., y Borba, M. C. (2014). Research on calculus: what do we know and where do we need to go? *ZDM*, 46, 507-515.
- Rodríguez-Nieto, C. A., Font Moll, V., Borji, V., y Rodríguez-Vásquez, F. M. (2022). Mathematical connections from a networking of theories between extended theory of mathematical connections and onto-semiotic approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(9), 2364-2390.
- Sabena, C., Arzarello, F., Bikner-Ahsbabs, A., y Schäfer, I. (2014). The Epistemological Gap: A Case Study on Networking of APC and IDS. En A. Bikner-Ahsbabs, y S. Prediger (Eds.), *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education* (pp. 179-200). Springer.
- Sriraman, B., y English, L. (2010). Surveying theories and philosophies of mathematics education. In *Theories of mathematics education: Seeking new frontiers* (pp. 7-32). Springer Berlin Heidelberg.
- Tabach, M., y Nachlieli, T. (2011). Combining theories to analyze classroom discourse: a method to study learning process. En M. Pytlak, T. Rowland, y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2524-2532).
- Trigueros, M., Bosch, M., y Gascón, J. (2011). Tres modalidades de diálogo entre APOS y TAD. *Un panorama de la TAD*, 10, 77-116.
- Trigueros, M., y Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics*, 73(1), 3-19.
- Wedege, T. (2010). Combining and Coordinating theoretical perspectives in mathematics education research. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, y F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1565-1574).

Autor de correspondencia

JOSÉ DAVID MORANTE RODRÍGUEZ

Dirección: Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel, Edificio FM1-101B, Ciudad Universitaria, C.P. 72570 Puebla, México.
morantert@gmail.com

Teléfono: +52 (222) 2295500 ext. 7552