 https://doi.org/10.24844/EM3703.03

Aprendizagem da grandeza massa: Uma abordagem exploratória

Learning about the mass magnitude: An exploratory approach

Marta Teixeira,[1] Maria de Lurdes Serrazina,[2] João Pedro da Ponte[3]

Resumo: Este artigo tem como objetivo conhecer a aprendizagem da grandeza massa feita por alunos do 4.º ano de escolaridade, através da resolução de um conjunto de tarefas exploratórias, que constituem uma sequência de tarefas. Estas tarefas são parte de uma sequência integrada num estudo mais alargado, que inclui uma experiência de ensino realizada no 4.º ano. O estudo segue uma abordagem qualitativa-interpretativa como investigação baseada em *design*. Os dados foram recolhidos por observação participante e compreenderam gravações vídeo, registos fotográficos, produções dos alunos e notas de campo. A análise de dados baseia-se na análise de conteúdo dos momentos de discussão coletiva. São analisadas as resoluções dos alunos e as ações do professor e da investigadora na condução daquele momento. Os resultados mostram a evolução do conhecimento conceptual e processual dos alunos sobre a grandeza massa e sua medida, bem como a capacidade de resolução de problemas envolvendo este conceito. As ações do professor e da investigadora contribuíram para esta aprendizagem.

Fecha de recepción: 25 de julio de 2024. **Fecha de aceptación:** 10 de junio de 2025.

[1] UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, martateixeira@edu.ulisboa.pt, https://orcid.org/0009-0003-2271-6405.

[2] Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa, lurdess@eselx.ipl.pt, https://orcid.org/0000-0003-3781-8108.

[3] UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, jpponte@ie.ulisboa.pt, https://orcid.org/0000-0001-6203-7616.

Palavras-chave: grandeza massa, processo de medição, resolução de problemas, tarefas exploratórias, aprendizagem.

Abstract: This article aims to know the learning about mass magnitude undertaken by grade 4 students, through the completion of a series of exploratory tasks that form a sequence of activities. These tasks are part of a sequence integrated into a broader study, which includes a teaching experiment carried out at this grade. The study follows a qualitative-interpretative approach as design-based research. Data was collected through participant observation and comprised video recordings, photographic records, student productions, and field notes. Data analysis is based on content analysis of whole class discussion moments. The students' strategies and the actions of the teacher and the researcher in guiding those moments are analyzed. The results show the evolution of students' conceptual and procedural knowledge about mass and its measurement as well as the problem-solving abilities involving this concept. The actions of the teacher and the researcher contributed to this learning.

Keywords: *mass magnitude, measurement process, problem-solving, exploratory tasks, learning.*

1. INTRODUÇÃO

No início da escolaridade, os alunos têm já algumas noções básicas sobre diferentes temas incluídos no currículo, em particular sobre Medida, adquiridos em contextos informais. A aprendizagem baseada nos conhecimentos intuitivos e nas experiências informais dos alunos com medição, facilita a compreensão dos atributos mensuráveis e o significado de medir (NCTM, 2007). Para MacDonald e Lowrie (2011), estes conhecimentos devem constituir a base da aprendizagem, mas, como são muitas vezes limitados e fragmentados, podem, em algumas situações, conduzir os alunos ao erro. Trata-se de conhecimentos genuínos, para Nunes e Bryant (1996), no sentido em que compreendem algumas relações envolvidas no conceito. Importa referir que, nos anos iniciais, a medição desempenha um papel fundamental em Matemática e em outras áreas curriculares, possibilitando o envolvimento dos alunos em atividades práticas que atribuem significado e aplicação ao trabalho realizado com os números, prosseguindo o desenvolvimento do conceito e da competência no processo de medição nos anos posteriores (Smith III y Barrett, 2017).

O presente estudo foi efetuado com alunos do 4.º ano de escolaridade, cuja turma enfrentou dois confinamentos por causa da Covid-19, motivo pelo qual o trabalho já realizado sobre a grandeza massa tinha sido apenas uma introdução ao conceito e às unidades de medida. O processo de medir foi trabalhado nesta experiência. A compreensão e desenvolvimento deste processo, implica que os alunos manuseiem materiais, façam comparações físicas e utilizem instrumentos de medida adequados. Sem essas experiências práticas é difícil uma compreensão sólida e aprofundada do processo (NCTM, 2007). Assim, este artigo tem por objetivo conhecer a aprendizagem da grandeza massa feita por alunos do 4.º ano, através da resolução de um conjunto de tarefas exploratórias que constituem uma sequência de tarefas.

2. QUADRO TEÓRICO: MASSA E PROCESSO DE MEDIÇÃO

A grandeza massa é frequentemente confundida com a grandeza peso, apesar de serem grandezas diferentes (McDonough *et al.*, 2013). A massa é uma grandeza escalar que representa a quantidade de matéria de um objeto, sendo usualmente medida em quilogramas e unidades derivadas, e mantém-se constante em qualquer local da Terra (Ponte y Serrazina, 2000). O peso é uma grandeza vetorial que representa a força de atração gravítica exercida sobre um objeto, sendo medida usualmente em newtons ou quilogramas-força, e varia de acordo com o lugar em que se encontra (Ponte y Serrazina, 2000). Breda *et al.* (2011) explicam que esta confusão é devida ao uso do termo "peso" para descrever tanto a massa como a força gravitacional, e ao uso de balanças como instrumento de medida de ambas as grandezas. É importante mencionar ainda que este estudo foi realizado com alunos do 4.º ano, onde esta distinção não é clara e, normalmente, os dois termos são usados como sinónimos, mas referindo-se à quantidade de matéria do objeto.

Vários autores referem que o ensino da medida é muitas vezes focado apenas no conhecimento processual (e.g., Smith III y Barrett, 2017). Contudo, a aprendizagem da medida envolve o uso e a compreensão de procedimentos, mas também a compreensão dos conceitos (Mwale y Jakobsen, 2022). Diversos estudos têm sido realizados sobre o desenvolvimento conceptual dos alunos na medição das grandezas comprimento e área, mas poucos têm abordado a grandeza massa, o que torna relevante os resultados de estudos sobre medição em geral (Cheeseman *et al.*, 2014; Mwale y Jakobsen, 2022).

Kamii (1995) considera que a construção da base conceptual ocorre através da exploração de objetos concretos e da realização de estimativas. Bragg e Outhred (2004) e Solomon *et al.* (2015) revelam que um número considerável de alunos, competentes no processo de medir, mostram dificuldades no conhecimento conceptual deste processo. Piaget *et al.* (1960) indicam três fases no processo de desenvolvimento do conceito de medida: 1) comparação percetiva direta entre dois objetos, através do olhar ou de algumas partes do corpo; 2) deslocamento dos objetos, aproximando-os para facilitar a comparação ou recorrendo a partes do corpo; e 3) utilização da propriedade transitiva, que envolve a conservação da grandeza ou da quantidade da grandeza, surgindo assim a noção de unidade. Para Ponte e Serrazina (2000) constituem aspetos básicos da medida: 1) comparação direta; 2) ordenação ou seriação; 3) comparação indireta; 4) transitividade; e 5) conservação. Para estes autores, a comparação direta é uma das primeiras atividades que apoia os alunos na compreensão da medição de atributos específicos de objetos, e pode ser concretizada através dos sentidos ou por deslocação de um dos objetos, levando à ordenação ou seriação de dois ou mais objetos. A comparação indireta envolve a comparação de dois objetos, ou acontecimentos, que não se podem justapor fisicamente e requer o domínio da propriedade transitiva. As atividades de comparação direta e indireta são essenciais, porque permitem que os alunos se concentrem nos atributos mensuráveis dos objetos e nos processos básicos de medição, sem necessidade de trabalhar com números ou unidades (Passelaigue y Munier, 2015; Ponte y Serrazina, 2000). Van den Heuvel-Panhuizen e Buys (2005) apontam três etapas no desenvolvimento do conceito de medida: 1) comparação e ordenação; 2) utilização de uma unidade de medida, natural ou padronizada; e 3) utilização de um instrumento de medida.

No processo de medição da massa, a comparação indireta é de grande importância. Breda *et al.* (2011) e Cheeseman *et al.* (2011) consideram que, nos primeiros anos, os alunos devem experienciar situações que envolvam comparação e ordenação de objetos quanto à massa, pois proporcionam o desenvolvimento intuitivo da grandeza (Breda *et al.*, 2011). No processo de desenvolvimento do conceito de massa, MacDonald (2010) apresenta quatro ideias construídas pelos alunos, tendo por base os seus conhecimentos prévios e as suas experiências, que é necessário desconstruir: 1) se é possível pegar num objeto é porque ele é leve; 2) quanto maior o objeto, mais pesado é, confundindo massa e volume; 3) se dentro de um objeto couberem outros objetos, é porque esse objeto é pesado, ideia relacionada com a anterior; 4) se um objeto flutua é porque é leve, confundindo densidade com massa.

Para McDonough *et al.* (2013), as ideias fundamentais da medida da massa incluem: 1) comparação, em conjunto com a conservação e o raciocínio transitivo; e 2) unidade, em conjunto com a quantificação e o uso de escalas.

A idade e a ordem pela qual estes conceitos devem ser trabalhados têm vindo a ser discutidas na literatura (Passelaigue y Munier, 2015; Sarama y Clements, 2009). Muitos investigadores concordam que a conservação é essencial para a conceção completa de medição (Stephan y Clements, 2003). Piaget *et al.* (1960) argumentam que a transitividade é impossível se os alunos não desenvolverem previamente a conservação. Outros autores consideram que os alunos devem raciocinar transitivamente para compreenderem a medição (e.g., Kamii y Clark, 1997). Embora os investigadores concordem que a conservação é essencial para um entendimento completo de medição, vários estudos indicam que os alunos não precisam necessariamente de desenvolver a transitividade e a conservação antes de aprenderem algumas ideias sobre medição (Stephan y Clements, 2003). Pelo seu lado, Sarama e Clements (2009), assim como MacDonald (2011) indicam que os aspetos aqui apresentados são a base da compreensão da medição e devem ser considerados na aprendizagem da medida de qualquer grandeza. Assim, os alunos devem desenvolvê-los de modo a obterem uma compreensão sólida sobre o processo de medição, independentemente da ordem pela qual são desenvolvidos, permitindo uma aprendizagem significativa sobre este processo.

Para o NCTM (2007), o processo de medição de qualquer grandeza é semelhante e compreende: 1) selecionar uma unidade de medida (u.m); 2) comparar a u.m. com a grandeza a medir; e 3) determinar o número de u.m. necessárias. Este número pode ser obtido pela iteração da u.m. e a contagem do número de iterações, ou por meio de um instrumento de medida (Smith III y Barrett, 2017). Apesar do processo inicial de medir envolver o uso de unidades discretas e materiais manipuláveis e se considerar que os alunos devem passar progressivamente das u.m. não padronizadas para as u.m. padronizadas e para o uso de instrumentos de medida (NCTM, 2007; Smith III y Barrett, 2017), os estudos de Cheeseman *et al.* (2014) indicam que é possível uma transição mais rápida dos alunos para o uso da u.m. padrão e dos respetivos instrumentos de medida, no que se refere à medição da massa. McDonough *et al.* (2013) referem que a medição da massa pode envolver operações mentais complexas, mas se forem proporcionadas experiências de aprendizagem ricas e adequadas, os alunos são capazes de pensar de forma construtiva sobre essas complexidades.

Segundo Cheeseman *et al.* (2014), é importante proporcionar aos alunos oportunidades de se envolverem em contextos interessantes e estimulantes, resolvendo tarefas relacionadas com as suas vivências e com um potencial matemático rico. Consideram ainda que os alunos devem ter experiências práticas envolvendo situações de medição da massa, opinião também partilhada pelo NCTM (2007), que acrescenta a diversidade de experiências informais antes do uso dos instrumentos de medida. A este respeito, Breda *et al.* (2011) consideram o uso de balanças essencial no desenvolvimento do processo de medição. Numa fase inicial, as balanças de dois pratos permitem a comparação de um objeto com outro de referência (comparação direta) ou com os próprios pesos da balança (correspondendo a massas marcadas) que funcionam como u.m. (comparação indireta). Posteriormente, a utilização de outras balanças, como as de cozinha ou de quarto, pode ser enriquecedor para os alunos, na medida em que permitem trabalhar com diferentes u.m., nomeadamente, gramas e quilogramas. Estes autores acrescentam, ainda, que os alunos devem ter contacto com diferentes escalas, seja através da leitura dos valores indicados pelos ponteiros ou da resolução de problemas com diferentes representações de escalas.

O ensino exploratório na aula de Matemática

No ensino exploratório, os alunos assumem um papel central e ativo na construção do seu próprio conhecimento (Ponte, 2005). Esta construção ocorre a partir do trabalho com tarefas para as quais, à partida, os alunos não dispõem de estratégias de resolução imediata, constituindo assim oportunidades privilegiadas para a compreensão e aprofundamento de conceitos, representações, procedimentos e outras ideias matemáticas (Ponte, 2017). Neste contexto, assumem especial relevância tarefas de exploração, investigação, projetos e problemas (Ponte, 2005), por proporcionarem ambientes de aprendizagem ricos e desafiantes que promovem a participação ativa dos alunos e favorecem a construção significativa do conhecimento.

Uma aula de ensino exploratório organiza-se, habitualmente, em três fases: 1) apresentação da tarefa; 2) realização da tarefa; e 3) discussão coletiva dos resultados e síntese final das aprendizagens (Stein *et al.*, 2008). Na primeira fase, o professor apresenta a tarefa à turma, assegurando que todos os alunos compreendem o que lhes é proposto. Define também as formas de trabalho no decorrer da aula. A segunda fase corresponde ao trabalho autónomo. Nesta fase, o professor circula pela sala, apoiando os alunos, esclarecendo questões e promovendo o envolvimento produtivo de todos na realização da tarefa. As suas intervenções devem ser ponderadas, de modo a não reduzir o grau de complexidade da tarefa (Stein *et al.*, 2008), nem uniformizar as estratégias de resolução, assegurando, assim, que a discussão coletiva seja produtiva. É ainda nesta fase que o professor, a partir da observação que faz do trabalho dos alunos, seleciona as estratégias que considera relevantes colocar à discussão e estabelece a sequência adequada para a sua apresentação (Stein *et al.*, 2008). A terceira fase centra-se na discussão coletiva destas estratégias, constituindo um momento privilegiado de reflexão, negociação de significados e construção de novo conhecimento (Ponte, 2005). Os alunos são convidados a explicar e justificar as suas estratégias, são explorados erros ou dificuldades sentidas e situações de desacordo, transformando-os em oportunidades de aprendizagem. O professor desempenha o papel de moderador da discussão, gerindo a sequência de intervenções e orientando o seu conteúdo (Ponte, 2005), de modo a assegurar a qualidade matemática das intervenções, promover a relação entre as ideias discutidas e incentivar a construção de conexões matemáticas. A aula termina com a síntese final das aprendizagens, realizada com a participação dos alunos, onde são sistematizados os conhecimentos desenvolvidos, ajudando os alunos a compreenderem e registarem as ideias trabalhadas e o modo como se articulam com os conhecimentos anteriores (Ponte *et al.*, 2012).

A preparação de uma aula de natureza exploratória inicia-se com a seleção criteriosa da tarefa a realizar que, tendo em conta o propósito matemático, deve ser rica e suscetível de gerar momentos de reflexão e discussão em grande grupo (Ponte, 2005). Após esta seleção, o professor procede à antecipação de possíveis estratégias de resolução dos alunos, prevendo também dificuldades que possam surgir e formas adequadas de agir. Com este trabalho, prepara-se para responder a perguntas que surjam e para decidir sobre a forma de estruturar as apresentações e gerir as discussões.

Em sala de aula, o professor leciona a aula com base na sua planificação, tendo sempre em conta o grau de complexidade da tarefa e a variedade de estratégias dos alunos. Compete-lhe gerir o tempo, bem como as interações e intervenções dos alunos, promovendo um ambiente de aprendizagem estimulante e desafiante, que favoreça discussões coletivas ricas e orientadas para a construção de conhecimento, contribuindo de forma efetiva para o desenvolvimento da aprendizagem (Canavarro, 2011; Stein *et al.*, 2008). Como referem Stein *et al.* (2008), o ensino exploratório é uma prática complexa e que muitos professores consideram desafiante. Contudo, tem grande potencial para promover uma aprendizagem mais profunda, autónoma e significativa, estimulando o pensamento matemático e o envolvimento dos alunos na aprendizagem.

3. METODOLOGIA

Os episódios apresentados neste artigo decorrem da realização de tarefas exploratórias (Canavarro, 2011) em sala de aula e fazem parte de uma sequência integrada num estudo mais amplo, o qual incluiu uma experiência de ensino, efetuada numa escola pública do distrito de Lisboa, Portugal, numa turma de 4.º ano com 18 alunos (com 9 e 10 anos). O estudo segue uma abordagem qualitativa, com paradigma interpretativo (Bogdan y Biklen, 1994), na modalidade de investigação baseada em *design* (Mendes *et al.*, 2016). A recolha de dados foi realizada através de observação participante e teve por base registos vídeos e fotográficos, produções dos alunos e notas de campo, para posterior análise retrospetiva aprofundada. A análise de dados fundamentou-se na análise de conteúdo das intervenções nos momentos de discussão coletiva. São também analisadas as estratégias de resolução utilizadas pelos alunos, assim como as ações do professor e da investigadora (primeira autora) nos momentos de discussão coletiva, como contributo à construção do conhecimento. A análise destas ações teve por base o modelo de Ponte *et al.* (2013) de análise das ações do professor na condução das discussões coletivas e que inclui: 1) convidar, iniciando a discussão coletiva, na qual o professor incentiva a participação dos alunos na partilha das suas estratégias, envolvendo-os na discussão; 2) apoiar/guiar, conduzindo os alunos na apresentação da informação; 3) informar/sugerir, dando informação ou validando respostas dos alunos; e 4) desafiar, incentivando os alunos a avançarem no conhecimento; e ainda o quadro de indicadores de Araman *et al.* (2019), com pequenas adaptações.

De acordo com a metodologia apresentada, o estudo foi desenvolvido em três fases: 1) preparação da experiência de ensino; 2) realização em sala de aula; e 3) análise retrospetiva. Na fase da preparação, realizada em colaboração com o professor da turma e tendo como foco o tema Medida, foram analisados documentos curriculares portugueses, nomeadamente as *Aprendizagens Essenciais* (Canavarro *et al.*, 2021; ME, 2018), e propostas curriculares internacionais (e.g., NSW, 2017). Procedeu-se ainda à análise do quadro teórico referente a grandezas e medida. Posteriormente, foi formulada uma conjetura, orientadora da experiência de ensino, que considera que os alunos desenvolvem a compreensão de grandeza, assim como do respetivo processo de medição, através de cinco níveis de desenvolvimento: 1) identificação do atributo a medir; 2) medição informal: comparação de dois objetos; 3) medição informal: iteração da u.m.; 4) medição com u.m. padronizadas; e 5) relação entre as u.m. padronizadas. Tendo por base esta conjetura, foi definida uma trajetória hipotética de aprendizagem para a grandeza massa. Todo este trabalho foi realizado pela investigadora, com o suporte dos outros autores. Tendo em conta a trajetória definida, em colaboração com o professor da turma, foi construída e planificada uma sequência de tarefas exploratórias, desafiantes e articuladas entre si, de modo a estabelecerem um percurso de aprendizagem coerente (Ponte, 2005). A construção das tarefas foi realizada pela investigadora, que depois as discutiu com o professor, fazendo-se a sua adequação à turma. Na fase de realização em sala de aula, todas as tarefas propostas foram acompanhadas pela investigadora, como observadora participante, e as aulas foram orientadas pelo professor. As intervenções da investigadora no desenrolar da discussão coletiva foram acordadas com o professor, por este, embora sendo um profissional experiente, não estar confortável com o ensino exploratório. A partir da reflexão conjunta, realizada no final de cada aula, a sequência de tarefas inicialmente definida era revista por ambos, analisando-se a necessidade de reajustamentos.

Dado o professor ter iniciado, anteriormente, o estudo da grandeza massa e trabalhado as u.m. padronizadas fora do âmbito desta experiência, demos continuidade a esse estudo, trabalhando o processo de medição, percorrendo todos os níveis de desenvolvimento previstos na conjetura. Assim, comparámos massas de objetos; medimos massas usando balanças de pratos e balanças digitais; resolvemos problemas envolvendo a comparação de massas com recurso a balanças de pratos; e desenvolvemos dois projetos (apresentamos apenas um, por limitações de espaço). Algumas tarefas e os projetos respeitavam a mais do que um nível de desenvolvimento. Optámos por não propor tarefas específicas para desenvolver o nível 1 (identificação do atributo a medir), dado o trabalho já iniciado pelo professor e por este nível estar presente em todas as tarefas, uma vez que os alunos tinham de identificar o atributo para as poderem resolver. Contudo, acordámos que a tarefa 1 poderia confirmar se os alunos já tinham atingido os objetivos deste nível e, consequentemente, prosseguirem na aprendizagem. As tarefas foram apresentadas aos alunos tendo em conta o seu grau de complexidade, pretendendo-se ainda que percorressem os vários níveis de desenvolvimento.

Foi também nossa intenção envolver os alunos em situações de aprendizagens ricas (Ponte, 2005), que contribuíssem para o desenvolvimento da aprendizagem da grandeza, nomeadamente a compreensão conceptual do processo de medição e a sua aplicação em contextos reais.

4. RESULTADOS

Para todas as tarefas realizadas, a forma de organização da aula foi a mesma. O professor começou por distribuir, a cada grupo, o material necessário à sua realização, nomeadamente o enunciado e o material físico a usar na sua concretização. Deu algum tempo para que os alunos lessem e se apropriassem da tarefa e esclareceu eventuais dúvidas. Estabeleceu ainda um tempo limite para o trabalho autónomo. Terminado este tempo, seguiu-se a discussão coletiva. De seguida, apresentamos as tarefas e alguns episódios de momentos de discussão coletiva. Os nomes apresentados são fictícios de modo a preservar o anonimato.

Tarefa 1: "Comparação de massas / o grama"

Esta tarefa foi concebida para trabalhar alguns objetivos dos níveis 2 (medição informal: comparação de 2 objetos) e 3 (medição informal: iteração da u.m.) da conjetura. Foi possível trabalhar a comparação direta, nomeadamente comparar massas de objetos utilizando uma balança de pratos, identificar objetos com a mesma massa e mostrar que objetos diferentes podem ter a mesma massa, consolidando assim o conceito de massa.

Duarte relatou a descoberta do seu grupo, após o convite do professor, relativamente à comparação da massa de diferentes objetos:

Duarte: Nós [...] usámos o frasco de vidro em comparação à caixa de clipes.

Professor: O que é que concluíram?

Duarte: Que o frasco de vidro é mais pesado.

[...]

Investigadora: Se o frasco é mais pesado... o que é que significa ser mais pesado?

Alunos: Tem mais massa.

Já o relato de Martinho, apresentou objetos diferentes.

> Martinho: A cola [grande] é mais pesada do que o frasco de vidro.
>
> [...]
>
> Professor: O que é que podemos concluir?
>
> Martinho: Que a cola tem mais massa do que o frasco de vidro.

Nestes excertos é percetível que os alunos associam o significado de *ser mais pesado* a *ter maior quantidade de massa*, embora Duarte apresente uma linguagem menos formal na sua justificação. As intervenções da investigadora e do professor apoiam/guiam os alunos na clarificação das suas respostas, de modo a tirarem conclusões.

Relativamente à identificação de objetos com a mesma massa, após o convite do professor, Martinho apresentou a descoberta do seu grupo:

> Martinho: Os clipes e a vela [juntos] têm a mesma massa que o frasco.

A descoberta relatada por Martinho foi obtida pela comparação objetos-objeto. Outros grupos usaram a comparação objeto-objeto. Nestes casos trata-se de comparação direta.

Para responder à questão “Como sabemos que os objetos têm a mesma massa?”, o grupo de Martinho faz referência à comparação de objetos (figura 1), mas não aprofunda este significado.

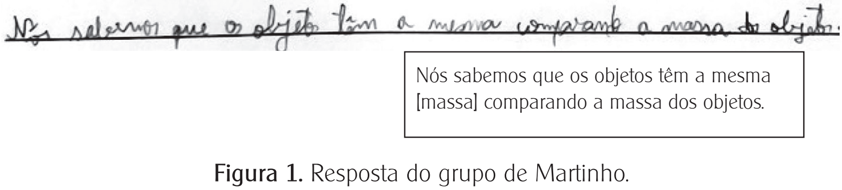
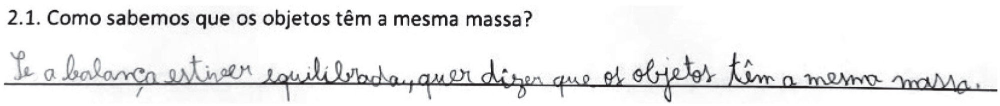


Figura 1. Resposta do grupo de Martinho.

Por sua vez, a resposta do grupo de Carlos (figura 2), evidencia compreensão na leitura e interpretação da balança de pratos.


2.1. Como sabemos que os objetos têm a mesma massa?

Se a balança estiver equilibrada, quer dizer que os objetos têm a mesma massa.

Se a balança estiver equilibrada quer dizer que os objetos têm a mesma massa.

Figura 2. Resposta do grupo de Carlos.

Como a tarefa foi subdivida, foi ainda possível trabalhar objetivos do nível 4 (medição com u.m. padronizadas) da conjetura, especificamente medir massas com menos de um quilograma (1 kg), usando o grama (g) como u.m., trabalhando assim o processo de medição.

Durante o trabalho autónomo pudemos constatar que os vários grupos mediram as massas dos objetos por tentativa e erro, colocando ou tirando pesos do prato da balança até que os pratos ficassem equilibrados, e adicionando a massa de todos os pesos. Na discussão coletiva discutiu-se o facto de objetos iguais apresentarem massas diferentes:

Investigadora:	Porque é que esta diferença se verifica? Porque é que uns [frascos] pesaram 65 gramas, outros 64 e outros 63?
Miguel:	As balanças são diferentes.
Investigadora:	E embora os frascos sejam iguais...
Santiago:	Podem ter massas diferentes.

Com as suas questões, a investigadora desafiou os alunos a apresentarem justificações para a diferença de massas entre frascos iguais. A justificação de Miguel evidencia o facto de o instrumento de medida não ser o mesmo nos vários grupos, embora não refira que o instrumento apresenta sempre um valor aproximado. A investigadora conduziu o pensamento dos alunos para uma nova justificação, levando Santiago a compreender e completar a sua afirmação.

Quanto à massa da caixa de clipes, após convite do professor, Duarte divulgou o valor medido pelo seu grupo:

Duarte:	1 vírgula 2 hectogramas.
Professor:	Assim? [registando simbolicamente no quadro]
Duarte:	Sim.
Professor:	Quantos gramas são?
Duarte:	Em gramas... fica... 50.

O valor da medição apresentado por Duarte suscitou dúvidas ao professor que, na ação de apoiar/guiar e de modo a clarificar a resposta do aluno, representou-o numericamente e solicitou a equivalência em gramas, para que o aluno relacionasse as duas u.m. padronizadas. Pela resposta de Duarte, o grupo parece ter confundido a representação decimal (1,2) com a representação fracionária ($\frac{1}{2}$), pelo que a investigadora continuou:

Investigadora:	Um hectograma quantos gramas são?
Duarte:	100.
Investigadora:	Tu escreveste 1 hectograma e 2...?
Duarte:	Não! Era meio hectograma! [...] 50 gramas... porque 1 hectograma são 100 gramas! [...] Não era assim [referindo-se ao registo]. Era 1, traço por baixo do 1 e o 2.

Como se percebe, o grupo pretendia representar *metade* na forma de fração. As intervenções da investigadora e do professor foram fundamentais para que Duarte identificasse o erro. O aluno mostrou ainda conhecimento da relação entre hectograma e grama.

Depois da discussão coletiva, seguiu-se a sistematização das aprendizagens deste dia:

Investigadora:	Como é que sabemos que os objetos têm a mesma massa?
Duarte:	Quando [...] os pratos da balança ficam equilibrados.
[...]	
Ricardo:	Temos de medir.

A investigadora guiou/apoiou os alunos para a sistematização do trabalho desenvolvido, focalizando o seu pensamento para um facto importante. A resposta de Duarte aponta para a interpretação do comportamento das balanças. Por sua vez, a resposta de Ricardo mostra evolução, pois o aluno já sugere o trabalho com medidas de massa.

Investigadora:	E outra conclusão?
Rui:	Nem todos os objetos [iguais] medem a mesma massa.
Professor:	Ou seja, a massa de um objeto é um valor...?
Rui:	Aproximado [...] porque as balanças são diferentes.

Na ação de apoiar/guiar, a investigadora e o professor conduziram o pensamento dos alunos para as aprendizagens realizadas. Rui referiu o facto de a medida da massa ser um valor aproximado dependente do instrumento de medida, mas nada foi mencionado sobre o olhar interpretativo do medidor, ou seja, sobre a forma como cada pessoa olha para a posição dos pratos da balança, que pode levar a diferentes leituras.

Todos os grupos conseguiram atingir os objetivos propostos em relação aos níveis de desenvolvimento a que a tarefa se dirigia, nomeadamente, conseguiram fazer comparações diretas, começando a usar uma linguagem mais formal, consolidando assim o conceito de massa, o que nos permitiu avançar nos níveis da conjetura.

Tarefa 2: "Qual a massa?"

Esta tarefa pretendeu trabalhar os objetivos do nível 4 (medição com u.m. padronizadas) usando como u.m. quilograma e grama. Os alunos pegaram no peso de 1 kg para avaliarem esta massa e, de seguida, distribuíram os objetos por três grupos: com massa maior do que 1 kg, com massa igual a 1 kg e com massa menor do que 1 kg. A convite do professor, o grupo de Duarte apresentou a sua distribuição (figura 3) e a respetiva justificação:

Figura 3. Distribuição dos objetos do grupo de Duarte.

Duarte:	Com massa menor do que 1 kg, nós pusemos os sumos [...] Nós achámos que eles [os 2 de 1 litro] eram quase da mesma altura do grande [referindo-se ao sumo de 1,5 litros]. Então, nós achámos que eles tinham... quase a mesma massa que o grande.
Professor:	A vossa distribuição [dos pacotes de sumo] teve a ver com...
Duarte:	Com o tamanho do pacote.

A justificação apresentada por Duarte parece basear-se em conhecimentos e experiências prévias: quanto maior o objeto, mais pesado é, confundindo massa e volume. A intervenção do professor pretendeu clarificar a resposta do aluno.

O grupo de Miguel distribuiu os objetos de forma diferente (figura 4):

Figura 4. Distribuição dos objetos do grupo de Miguel.

Miguel: Nós quando pegámos no peso... no kg, nós... depois... fomos ver os objetos. [...] Quando pegámos [...] nos sumos, nós achámos que eram iguais.

Professor: Turma?

Margarida: O sumo de manga é mais pesado do que os outros... porque tem um litro e meio.

Professor: E o que é que isso quer dizer?

Margarida: Que tem massa diferente.

Professor: Onde é que colocarias o pacote de um litro e meio?

Margarida: Na massa maior do que 1 kg.

O professor desafiou a turma a refletir sobre a distribuição de Miguel. Margarida não concordou, justificando com a capacidade do pacote de sumo de manga. Como os alunos ainda não tinham trabalhado as medidas de capacidade, Margarida recorreu aos seus conhecimentos informais, quer na leitura da capacidade do pacote, quer na relação entre estas medidas e as medidas de massa. As intervenções do professor, numa ação de apoiar/guiar, pretenderam ajudar Margarida a clarificar as suas ideias.

O grupo de Carlos considerou que os sumos tinham massa inferior a 1 kg. Martinho não concordou e argumentou:

Martinho: [O grupo] Deveria pôr os 2 sumos de 1 litro em [massa] igual e o de 1,5 litros, em mais do que 1 kg, porque [...] tem meio litro a mais do que os outros.

[...]

Investigadora: Achas que o Martinho tem razão? [questionando Carlos]

Carlos: Sim.

Investigadora: Porquê?

Carlos: Porque [...] se tem mais meio litro... tem mais massa... pode ter mais do que 1 kg.

Martinho recorreu também aos seus conhecimentos informais. Para o aluno, os pacotes de sumo de 1 litro deveriam ser colocados em massa igual a 1 kg, relacionando assim estas duas u.m. Acrescentou ainda que o pacote de 1,5 litros "tem meio litro a mais do que os outros" e Carlos concluiu que esse meio litro corresponde a mais massa, logo poderia ser incluído no grupo de objetos com massa superior a 1 kg. As intervenções da investigadora desafiaram Carlos a refletir sobre a afirmação de Martinho e a justificá-la.

Relativamente à distribuição das bolas, os grupos de Duarte (figura 3) e de Miguel (figura 4) consideraram que deveriam estar no conjunto dos objetos com massa superior a 1 kg:

Duarte: Nós, ao pegarmos na pequena, vimos que era mais pesada do que a grande. [...] Então, se a pequena era mais pesada e tinha massa maior do que um quilo, a grande também ia ter.

Miguel: Colocámos a bola pequena nos objetos com mais do que 1 kg. Depois pegámos na bola grande e vimos que era mais pesada do que a bola pequena, do que 1 kg.

Estes grupos usaram a comparação direta bola-bola e bola-u.m. e tiraram a sua conclusão por comparação indireta usando a propriedade transitiva.

O grupo de Carlos considerou que a bola pequena apresentava massa igual a 1 kg e a maior, massa superior a 1 kg:

Carlos: Quando pegámos na bola grande sentimos que era... que tinha mais massa do que 1 kg. Depois, pusemos em maiores do que 1 kg. Depois, pegámos na bola pequena e sentimos que não era tão pesada... como a bola grande... e pusemos na "massa igual a 1 kg".

Embora este grupo tenha distribuído as bolas de forma diferente, também usou a comparação direta bola grande-u.m. e bola-bola e a comparação indireta, usando a propriedade transitiva. A posterior medição da massa destes objetos com a balança digital permitiu que os alunos explorassem a relação entre quilograma e grama.

Todos os grupos atingiram os objetivos propostos, relativamente ao nível de desenvolvimento 4, nomeadamente, conseguiram comparar e medir massas superiores, iguais e inferiores a 1 quilograma e em gramas.

Tarefa 3: "Qual será a ficha falsa?"

Depois de trabalharmos com as balanças de pratos e digitais, propusemos uma situação problemática envolvendo a balança de pratos, voltando assim a trabalhar o nível 2 (medição informal: comparação de 2 objetos). Contudo, não se tratou de uma comparação simples, pois a tarefa envolvia um grau de complexidade maior que o das tarefas anteriores. De um conjunto com cinco fichas, sendo uma falsa e mais pesada do que as outras, e usando apenas duas pesagens, os alunos tinham de descobrir a falsa.

Os alunos revelaram dificuldades na compreensão do problema e na forma de representar a estratégia, por se tratar de uma representação estática, sendo os próprios a decidir que representação usar. Durante o trabalho autónomo pudemos perceber que o pedido do número de pesagens estava a ser um forte obstáculo à resolução e, para que os alunos não desistissem, decidimos pedir para que se concentrassem apenas na descoberta da ficha falsa, independentemente do número de pesagens que necessitassem de fazer.

Duarte apresentou a estratégia de resolução do seu grupo (figura 5).

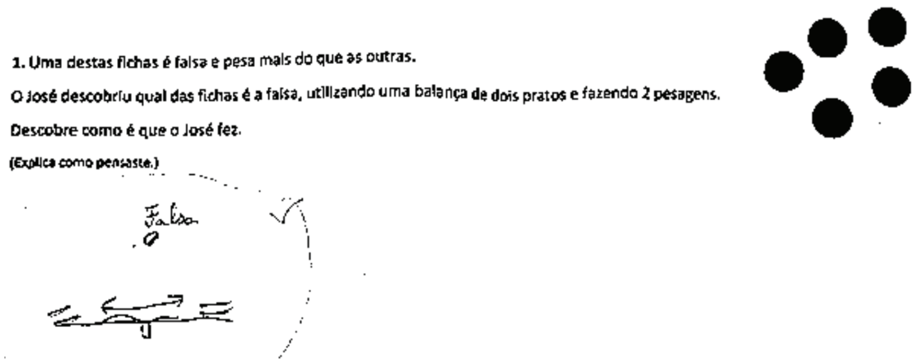


Figura 5. Tarefa 3 – grupo de Duarte.

Duarte: Nós simulámos uma balança com uma borracha e uma caneta [...]. Depois, nós pegámos em 4 fichas e pusemos 2 em cada lado da caneta [apontando]. [...] Nós concluímos que [...] a outra ficha que sobrava era a falsa.

O grupo necessitou de concretizar a situação, como observado no trabalho autónomo. Os alunos usaram quatro fichas, duas em cada "prato da balança". Esta comparação equilibrou os pratos, pelo que Duarte concluiu que a ficha falsa era a que sobrava. Quando desafiado pelo professor a justificar essa afirmação, Ricardo referiu que, se trocassem essa ficha por outra "esse prato ficava mais pesado", entendendo-se que desequilibraria a balança, o que mostraria que essa ficha seria a falsa. Com apenas uma pesagem o grupo descobriu a ficha falsa.

A estratégia do grupo de Martinho mostra duas pesagens (figura 6).

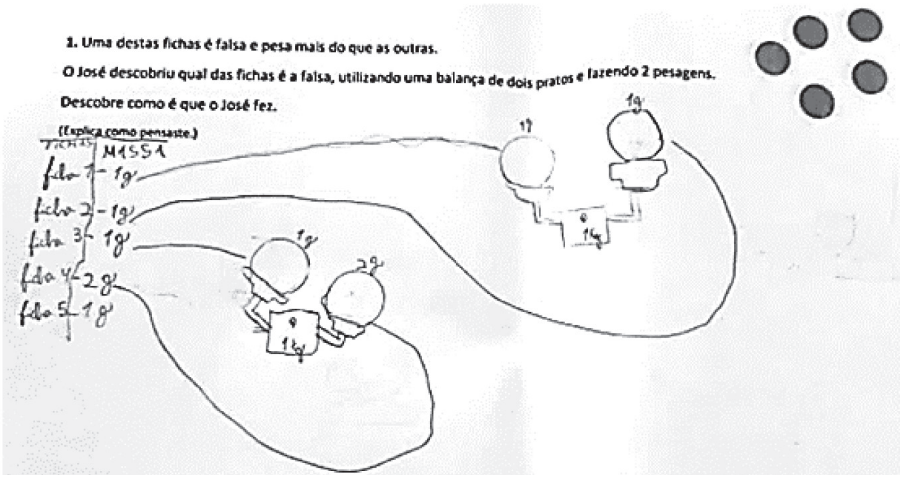


Figura 6. Tarefa 3 – grupo de Martinho.

Martinho: Nós, no início, imaginámos... não sabíamos o peso das fichas... então anotámos aqui [apontando para o registo, na projeção]... e pusemos uma ficha que era mais pesada do que as outras, que era a ficha falsa [ficha 4]. Depois simulámos como é que seria. Aqui [ilustração da direita], nós desenhámos a balança equilibrada com 2 fichas com o mesmo peso [uma em cada prato].

O grupo de Martinho não necessitou de concretizar a situação com material físico, mas precisou de atribuir massa às fichas, talvez como forma de organização. A atribuição de 1 e 2 gramas, demonstra perceção destas massas. A balança a que Martinho se refere como equilibrada, mostra uma ficha em cada prato e por cima de cada uma está registado 1 g, concluindo-se que ambas as fichas apresentam a mesma massa. No entanto, numa situação real, os pratos da balança estariam nivelados, mostrando a situação de equilíbrio, o que não se verifica nesta representação. Martinho continuou:

Martinho: Aqui [apontando para a ilustração da esquerda], a balança não estava equilibrada, porque havia uma ficha mais pesada do que a outra, que era a falsa. Depois as outras fichas eram verdadeiras. Nós não usámos esta ficha [5] [...] porque pensámos... "já encontrámos a falsa, não há mais nenhuma falsa.

Nesta ilustração também está desenhada uma ficha em cada prato da balança, numa está registado 1 g e na outra 2 g. Este registo mostra que se trata de fichas com massas diferentes, o que provoca o desequilíbrio da balança e identifica a ficha falsa, não havendo necessidade de usar a ficha que sobrava (5).

Professor: Grupos?

Rui: Como é que vocês sabiam que a ficha 4 tinha mais massa?

Simão: Nós simulámos como se fosse a ficha mais pesada.

Na sua intervenção, o professor desafiou os grupos a refletirem sobre a estratégia apresentada. A intervenção de Rui sugere que o aluno não compreendeu o propósito da atribuição da massa a cada ficha, o que Simão esclareceu na sua intervenção.

Embora este problema tivesse levantado dificuldades, com a sua simplificação, a maioria dos grupos conseguiu desenvolver um raciocínio mais elaborado, uma vez que tiveram de resolver um problema de nível de complexidade superior ao das tarefas anteriores.

Tarefa 4: Extensão do problema anterior

Esta tarefa também está incluída no nível 2 (medição informal: comparação de 2 objetos). Depois da discussão coletiva do problema anterior, pareceu-nos que as dificuldades relacionadas com a sua compreensão e a representação da estratégia foram ultrapassadas. Decidimos, então, propor uma extensão ao problema aumentando o grau de dificuldade, passando a ser usadas oito fichas, sendo uma falsa, e considerado o número de pesagens.

Como esperado, os grupos não apresentaram dificuldades. Apresentamos de seguida as estratégias usadas com três pesagens.

1) Utilização de quatro fichas na primeira pesagem (figura 7).

Figura 7. Tarefa 4 – 4 fichas e 3 pesagens – grupo de Rui.

Margarida:	Nós pegámos em 4 fichas e pusemos na balança [2 em cada prato].
Rui:	E vimos que a balança ficava equilibrada [apontando para a 1.º balança] [...] E já sabíamos que nenhuma [destas] ficha[s] era a falsa [...] E depois pegámos nas outras 4 fichas [que sobravam] e vimos que estas 2 desceram [apontando para o prato esquerdo da 2.º balança]. Ou seja, já sabíamos que uma destas fichas era a falsa. Depois pegámos nestas 2 e pusemos na balança [3.º balança]. E esta foi para baixo [referindo-se à ficha do prato esquerdo desta balança]. Ou seja, era a falsa.

Como explicado pelos alunos e evidenciado na figura 7, o grupo começou por usar quatro fichas na primeira pesagem, embora não tivesse representado as outras quatro fichas que sobravam. Desta pesagem, concluíram que nenhuma destas fichas seria a falsa, porque os pratos da balança ficaram equilibrados.

Usaram então as outras quatro fichas e com mais duas pesagens conseguiram descobrir a ficha falsa.

2) Utilização de oito fichas na primeira pesagem (figura 8).

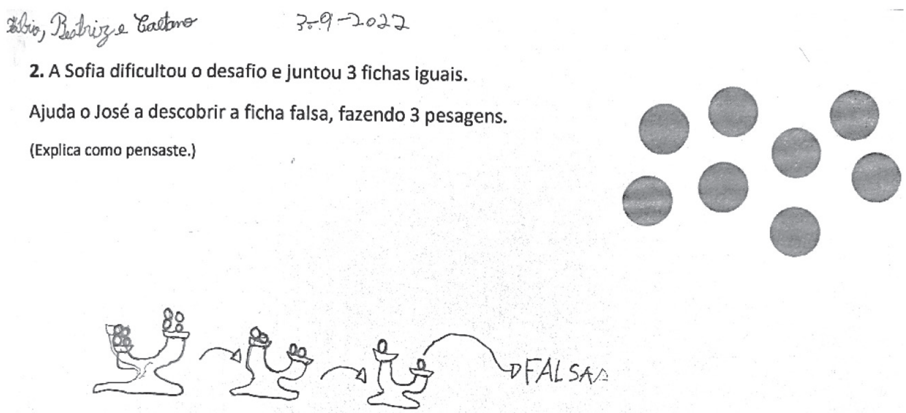


Figura 8. Tarefa 4 – 8 fichas e 3 pesagens – grupo de Carlos

Carlos:	Primeiro, pusemos 4 fichas em cada prato. Estas 4 fichas [prato esquerdo da 1.º balança] eram mais pesadas do que estas [prato direito, da mesma balança].
Investigadora:	E o que é que isso significa?
Carlos:	Que uma destas [apontando para o prato esquerdo] era a ficha falsa.

Ao indicar que o prato mais pesado estava mais para baixo, a investigadora apoiou/guiou Carlos de modo a clarificar o significado da sua afirmação. O aluno justificou pelo facto de conter a ficha falsa, querendo com isso significar que apresentava maior quantidade de massa. Carlos continuou:

Carlos: Depois dividimos estas fichas [prato esquerdo da 1.º balança], pusemos 2 em cada prato [2.º balança]. Depois, estas eram as mais pesadas [prato direito da mesma balança]. Então dividimos estas [referindo-se às mesmas fichas] e pusemos aqui [3.º balança], uma em cada prato. Esta era a mais pesada [prato direito da mesma balança]. Então esta era a falsa.

A partir da segunda balança ilustrada pelo grupo, a estratégia de Carlos foi a usada pelo grupo anterior. O professor desafiou os alunos para a reflexão, comparando as duas estratégias.

Com duas pesagens surgiram três estratégias diferentes.

1) Duas fichas na primeira pesagem (figura 9).

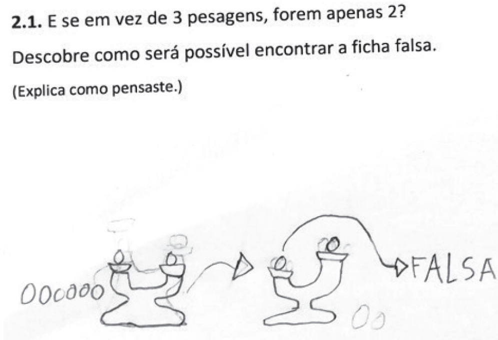


Figura 9. Tarefa 4 – 2 fichas e 2 pesagens – grupo de Carlos

Benedita relatou que o grupo começou por usar duas fichas, uma em cada prato, como podemos verificar na figura 9, na ilustração da esquerda, sobrando seis fichas. Como a balança ficou equilibrada "nenhuma destas fichas era a falsa". De seguida usaram outras duas fichas, das que tinham sobrado, colocando uma em cada prato da balança, como verificamos na ilustração da direita. Benedita referiu que a ficha do prato da esquerda, desta balança, era mais pesada, pelo que o grupo concluiu que se tratava da ficha falsa. Relativamente a esta estratégia, Santiago comentou que o grupo teve sorte ao descobrir a ficha falsa em apenas duas pesagens, porque "só utilizaram quatro fichas e deixaram as outras quatro fichas de fora. E a ficha falsa podia estar nas outras quatro fichas".

2) Quatro fichas na primeira pesagem (figura 10).

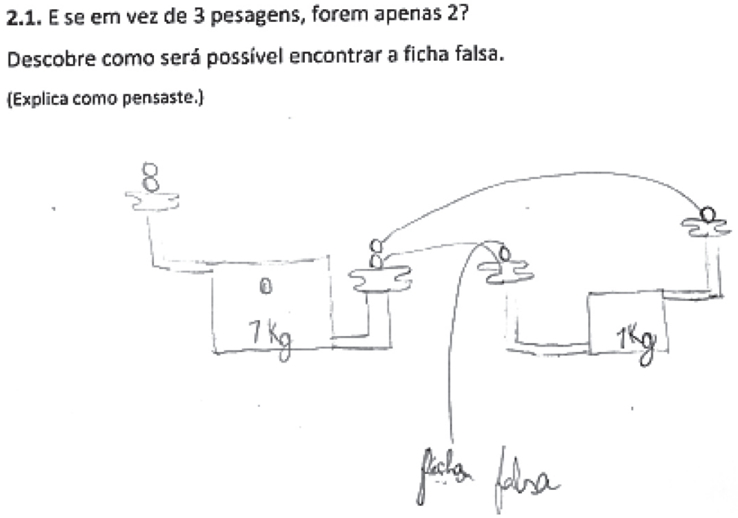


Figura 10. Tarefa 4 – 4 fichas e 2 pesagens – grupo de Martinho

Liliana relatou que o seu grupo começou por colocar duas fichas em cada prato da balança (figura 10, ilustração da esquerda). Ao contrário do grupo anterior, este grupo não registou as fichas que iam sobrando no decorrer das pesagens. A aluna referiu que, como as fichas do prato da direita eram mais pesadas, "pusemos [...] uma ficha em cada prato da balança [ilustração da direita] e vimos que esta [prato da esquerda] era a mais pesada. Então era a falsa." Quando o professor desafiou a turma a refletir sobre esta estratégia, Rui e Miguel apresentaram opiniões diferentes sobre ter sorte na descoberta da ficha falsa. Para Rui ter sorte significaria descobrir a ficha falsa na primeira pesagem. Para Miguel o grupo teve sorte, porque descobriu a ficha falsa com o número de pesagens exigido no enunciado e sem ter de usar as oito fichas "Se a falsa estivesse nas outras 4 [fichas que não usaram], não tinham tido sorte [...] e já não podiam fazer mais pesagens."

3) Seis fichas na primeira pesagem (figura 11).

O grupo de Santiago (figura 11) previu todas as situações que poderiam ocorrer usando inicialmente seis fichas, sendo esta a estratégia mais completa entre as que surgiram.

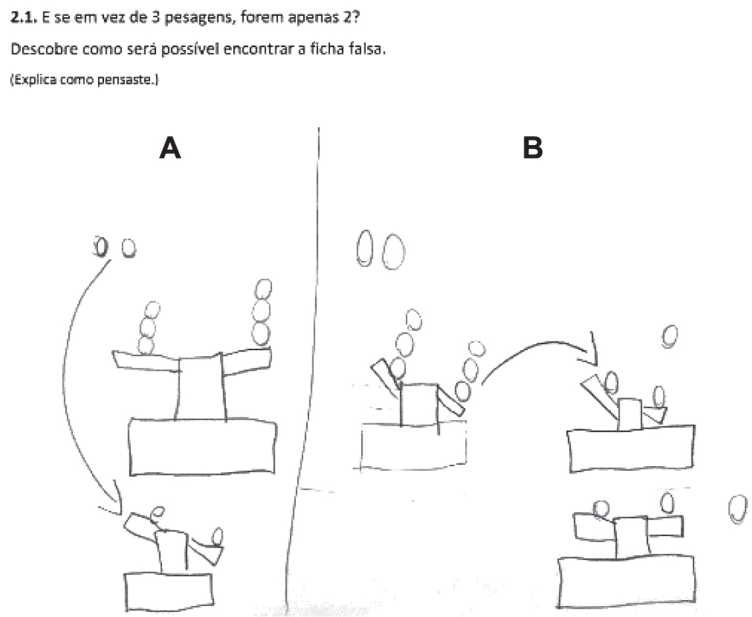


Figura 11. Tarefa 4 – 6 fichas e 2 pesagens – grupo de Santiago.

O grupo apresentou duas possibilidades, A e B, separadas por um traço (figura 11). Após o convite do professor, Santiago apresentou a possibilidade A:

Santiago: Nós, primeiro, começámos por meter 3 fichas de cada lado. E equilibrou a balança. Então, a falsa só podia ser uma destas [as 2 fichas que sobraram, representadas mais acima].

Depois fizemos outra pesagem com estas 2 fichas [colocando uma em cada prato, na 2.ª balança] e já sabíamos que esta era a falsa [apontando para a ficha do prato direito].

Como solicitado, com duas pesagens os alunos descobriram a ficha falsa. No entanto, o grupo pensou mais além. O que aconteceria se na primeira pesagem a balança não tivesse ficado equilibrada? A possibilidade B responde a esta questão.

Santiago: Nós pusemos 3 fichas de um lado e 3 do outro. Depois a balança desequilibrou. Então já sabíamos que nenhuma destas 2 fichas era a falsa [referindo-se às que sobravam]. [...] Então, a ficha falsa era uma destas [apontando, na 1.ª balança, para o prato direito]. Então, nós pegámos em 2 [destas 3 fichas] e metemos uma em cada prato [apontando para a 2.ª balança]. E depois esta ficha [do conjunto das 3 anteriores] ficou aqui de fora [ilustrada mais acima, desta 2.ª balança]. Se a balança desequilibrasse já sabíamos qual era a falsa [como foi o caso, apontando para a ficha do prato direto]. Se a balança equilibrasse, a ficha que estava de fora é que era a falsa [mostrando esta situação na 3.ª balança].

Nesta possibilidade os alunos previram ainda o que aconteceria, na segunda pesagem, caso a balança não tivesse ficado desequilibrada.

Dado que em B (figura 11) estão representadas três balanças, a investigadora resolveu questionar a turma:

Investigadora: Quantas pesagens fizeram?

[...]

Duarte: Estão ali 3 pesagens, mas eram 2 [...] porque eles fizeram como se encontrassem logo a ficha falsa e depois como se a ficha falsa fosse a ficha que não usaram.

Santiago: Estas eram as 2 possibilidades que poderia haver.

A investigadora, com uma ação de apoiar/guiar, questionou os alunos. A explicação de Duarte revela que o aluno compreendeu a situação e Santiago concluiu.

Nesta extensão ao problema anterior, todos os grupos conseguiram resolver o problema, respeitando o número de pesagens referidas no enunciado.

Tarefa 5: Projeto "Qual a massa da turma?"

Este projeto possibilitou trabalhar os níveis 4 (medição com u.m. padronizadas) e 5 (relação entre as u.m. padronizadas). Tratou-se de uma tarefa de aplicação dos conhecimentos adquiridos, num contexto real. A questão inicial "Qual a massa da turma?", lançada pelo professor, surgiu do interesse demonstrado pelos alunos, que em grande grupo discutiram o que seria necessário para poder responder. Rui sugeriu que deviam fazer uma estimativa e Martinho sugeriu que todos os alunos se deviam pesar. Embora a estimativa não respondesse à questão, foi decidido que estas seriam as etapas que iriam percorrer.

O professor desafiou os alunos a estimarem a massa total da turma. As estimativas ficaram longe do valor real, pois os alunos pareciam não ter noção de uma quantidade tão elevada de massa. Posteriormente, e à vez, cada aluno estimou a sua massa antes de fazer a medição.

Catarina:	28... quilogramas [referindo-se à estimativa da sua massa].
Investigadora:	Vamos ver...
Catarina:	28 vírgula 6 quilogramas [fazendo a leitura na balança].
Investigadora:	O que é que significa "vírgula 6 quilogramas"?
[...]	
Santiago:	Seiscentos gramas.
Investigadora:	Porquê?
Santiago:	Porque... 1 hectograma são... 100... gramas. 6 [hg] são 600 [g].

De notar que, para a sua própria massa, as estimativas de cada aluno foram muito próximas do valor real, como no caso de Catarina. A leitura que esta aluna fez da sua massa suscitou dúvidas à investigadora, pelo que na ação de apoiar/guiar solicitou o significado dessa leitura. Santiago respondeu, justificando com a relação entre as u.m..

Os valores obtidos com as pesagens individuais foram registados numa tabela coletiva, trabalhada depois pelos vários grupos. A partir da tabela, cada grupo elaborou um conjunto de questões, posteriormente trocadas entre os grupos e respondidas por cada um. Por exemplo, as questões elaboradas pelo grupo de Carlos relacionavam-se com o mais leve e o mais pesado e foram respondidas pelo grupo de Rui. Este grupo começou por comparar as massas registadas na tabela, ordenando os alunos do mais leve para o mais pesado, identificando assim os alunos da turma com menor e com maior massa.

As questões formuladas pelo grupo de Duarte foram respondidas pelo grupo de Martinho. Para responder à questão "Qual a diferença entre a massa da Margarida e a massa da Inês?", o professor convidou este grupo a apresentar a sua estratégia (figura 12).

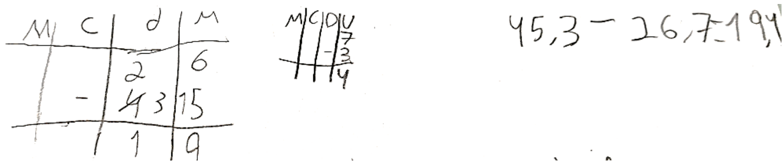


Figura 12. Tarefa 5 – grupo de Martinho

Martinho: Nós fomos à tabela e vimos as massas [...] da Inês e da Margarida. A Inês tem 45 quilos e 300 gramas... e a Margarida tem 26 quilos e 700 gramas.
Depois, nós fizemos [...] um algoritmo para os quilos... e deu 19. Depois, fizemos outro para [...] os hectogramas e deu 4. Depois, nós escrevemos que era 19 vírgula 4.

Martinho relatou a realização de dois algoritmos, um respeitante à parte inteira do número, onde foram trabalhados os quilogramas, e outro à parte decimal, onde trabalharam com os hectogramas (figura 12). Esta figura complementa a explicação do aluno, pois identifica a subtração como a operação usada. É também visível na representação da esquerda que o aditivo é menor do que o subtrativo. Percebemos ainda que os alunos realizaram o algoritmo da subtração por decomposição de 45, como se este valor estivesse no aditivo.

A discussão que se seguiu esteve relacionada com os erros cometidos, que foram identificados e corrigidos por todos. Para concluir, a investigadora desafiou o grupo a refletir sobre o significado do resultado do cálculo, 18,6 kg, obtido após a correção coletiva. Martinho, sem hesitar, referiu que "É a diferença de peso entre a Inês e a Margarida", mostrando compreensão do resultado.

Para responder à questão formulada pelo grupo de Mariana, "Quanta massa o Luís tem a mais do que a Benedita?", o grupo de Simão explicou assim:

Simão: Nós fomos à tabela... vimos a massa da Benedita e do Luís. "Benedita 27,5 kg" e "Luís 40,1 kg" [lendo] e vimos quanto é que o Luís tem a mais do que a Benedita. E são 14 quilogramas.

[...]

Martinho: Como é que vocês sabiam quanto é que o Luís tinha a mais do que a Benedita? [Na folha de registo apenas está escrita a resposta.]

Simão: Nós fomos contando do 27 até ao 40.

Simão não foi explícito quanto à forma como o grupo encontrou a diferença de massas e a questão de Martinho permitiu que clarificasse a estratégia. Percebemos que o grupo não usou o algoritmo nem recorreu ao cálculo mental, mas usou contagem envolvendo apenas a parte inteira dos números e o valor apresentado não é correto.

Na discussão que se seguiu, Rui sugeriu que o grupo deveria ter realizado uma adição para responder à questão. Duarte não concordou, uma vez que era pedido a diferença de massas, associando assim a subtração.

Professor:	Vamos lá recordar a pergunta. "Quanta massa o Luís tem a mais do que a Benedita?" [lendo a questão] Temos aqui duas ideias diferentes [...] O Rui diz que é para juntar tudo. O Duarte diz que é para subtrair.
[...]	
Santiago:	Eu também acho que é fazer uma [...] subtração.
Professor:	Porquê?
Santiago:	Porque quando nós queremos ver quanto é que tem a mais, nós temos de fazer uma subtração... para ver qual é o resultado.
[...]	
Investigadora:	E porque é que não pode ser uma adição?
Martinho:	Se juntarmos os 2 [valores] vai dar um resultado maior.
[...]	
Rui:	Tem de ser uma subtração.

Na ação de informar/sugerir, o professor releu a questão e redisse as sugestões de Rui e de Duarte, focalizando a atenção dos alunos, com a ação de apoiar/guiar, para as duas sugestões diferentes. Todo o discurso que se seguiu pretendeu esclarecer o pensamento dos alunos e Rui concluiu que a sua sugestão não estava correta.

Depois de apresentadas e discutidas as respostas às questões elaboradas pelos diferentes grupos, foi discutida em grande grupo uma estratégia para responder à questão inicial deste projeto "Qual a massa da turma?" Liliana sugeriu que cada grupo adicionasse a massa dos seus elementos "e depois somar [...] os resultados, [isto é] o total de cada grupo." Carlos acrescentou que desta forma "vai ser mais rápido do que se somarmos todos juntos", referindo-se à adição das massas dos 18 elementos da turma apenas num cálculo.

Depois da realização da estratégia sugerida por Liliana, os alunos chegaram à resposta:

Santiago:	627 quilogramas e 3 hectogramas.
Investigadora:	É mais ou é menos do que uma tonelada?
Santiago:	É menos.
Professor:	Porquê?
Alunos:	Porque uma tonelada são 1000 quilogramas.
Investigadora:	É mais ou menos do que meia tonelada?
Alunos	É mais.
Professor:	Quanto a mais?
Alunos:	127 quilogramas e 3 hectogramas.

Depois de descobrirem a massa da turma, a investigadora e o professor desafiaram os alunos a irem mais além. Com as questões que colocaram, os alunos puderam relacionar u.m., a tonelada e o quilograma, e calcularam massas.

Apesar das dificuldades, nomeadamente nos cálculos, todos os grupos conseguiram atingir os objetivos propostos em relação aos níveis de desenvolvimento 4 e 5 a que esta tarefa se propunha, nomeadamente, medir e calcular massas e relacionar as u.m..

5. DISCUSSÃO

Como referimos, este artigo tem como objetivo conhecer a aprendizagem da grandeza massa feita por alunos do 4.º ano através da resolução de um conjunto de tarefas exploratórias, que constituem uma sequência de tarefas.

Na tarefa 1 pudemos perceber que os alunos têm consciência do atributo massa, como esperado, validando a nossa decisão de não trabalhar tarefas específicas para o nível 1 de desenvolvimento, e apresentam conhecimentos informais sobre a leitura e interpretação de balanças de pratos, que serviram de base aos novos conhecimentos (MacDonald y Lowrie, 2011), facilitando a compreensão do significado de medir (NCTM, 2007). Relativamente à linguagem usada, alguns alunos apresentam uma linguagem mais formal do que outros, usando a expressão *ter mais massa*, como sinónimo de *ser mais pesado do que*, sendo esta última também referida na literatura (McDonough *et al*., 2013). Foi usada a comparação direta para comparar massas de diferentes objetos – comparação objeto-objeto e objeto-objetos.

Para responder à questão "Como é que sabemos que os objetos têm a mesma massa?" Ricardo sugeriu a medição da massa dos objetos, ao contrário dos colegas que ainda referiram a comparação.

Relativamente ao processo de medição usando o grama como u.m. e recorrendo a balanças de pratos, os alunos fizeram medições por tentativa e erro, colocando e tirando pesos até que os pratos da balança ficassem equilibrados, e adicionaram as massas dos diferentes pesos, determinando assim, a medida da massa dos objetos. A discussão coletiva permitiu debater o facto de objetos aparentemente iguais poderem apresentar massas diferentes. Foi ainda possível estabelecer relações entre diferentes u.m., nomeadamente entre o hg e o g, o que nos permitiu explorar o erro do grupo de Duarte, na representação de metade na forma de fração. As ações da investigadora e do professor foram fundamentais para que os alunos identificassem e corrigissem o erro.

A tarefa 2 permitiu aos alunos desenvolverem a perceção da massa de 1 kg e usarem a comparação direta e indireta, estando a propriedade transitiva muito associada a esta última (Ponte y Serrazina, 2000), na distribuição dos objetos. Este tipo de comparação revelou-se evidente nas interações dos grupos, que relacionaram a massa de diferentes objetos com a unidade de referência, 1 kg, e entre si, fazendo inferências através da manipulação e observação. As estratégias dos grupos pareceram basear-se nos seus conhecimentos e experiências prévias, refletindo ideias informais sobre a relação entre massa, volume e capacidade. Por exemplo, na estratégia apresentada por Duarte, o grupo confundiu massa e volume, assumindo que objetos maiores têm necessariamente massas maiores, erro já mencionado na literatura (MacDonald, 2010). Por outro lado, a distribuição feita pelos grupos de Miguel e de Carlos indica uma compreensão mais elaborada, ao relacionarem a capacidade dos pacotes de sumo com a respetiva massa, mesmo sem terem abordado formalmente a capacidade. A intervenção de Margarida vai nesse mesmo sentido, ao reconhecer que 1,5 litros é mais do que 1 litro, e conclui que a massa será maior. De modo semelhante, Martinho e Carlos consideram que "meio litro a mais" corresponde a "mais massa", revelando uma compreensão intuitiva da relação entre volume e massa. Estas observações mostram que os alunos mobilizaram conhecimentos relacionados com as suas experiências diárias. A comparação entre as massas das bolas constituiu outro aspeto relevante, em que o uso da propriedade transitiva se destacou como estratégia para justificar a ordenação das massas, quer por comparação com a unidade de referência, quer pela comparação entre os próprios objetos. Por fim, a medição das massas com recurso à balança digital foi um momento essencial da tarefa, permitindo aos alunos validar, ou refutar, as suas previsões e explorar a relação entre diferentes u.m.. As ações do professor e da investigadora, enquadradas pela abordagem exploratória, revelaram-se fundamentais na medida em que eles não forneceram respostas, mas desafiaram os alunos a explicitar, rever ou justificar as suas ideias, reforçando, assim, a importância da discussão coletiva como momento fundamental da aula de Matemática.

A tarefa 3 representou um grande desafio para os alunos, que não dispunham de nenhuma estratégia de resolução (Ponte, 2005), revelando-se cognitivamente muito exigente. As principais dificuldades prenderam-se com a compreensão do problema e a representação da estratégia, o que exigia não só conhecimentos conceptuais e processuais como capacidade de abstração. O facto de a representação não ser dinâmica dificultou ainda mais o trabalho. Face à complexidade da tarefa e às dificuldades manifestadas, foi necessário ajustar o seu nível de dificuldade para que os alunos não se desmotivassem e desistissem da sua resolução (Brodie, 2010). Assim, no decorrer da aula, foi retirada a condição de se realizarem apenas duas pesagens, mantendo-se o foco na identificação da ficha falsa, independentemente do número de pesagens realizadas, o que permitiu manter os alunos envolvidos. A estratégia do grupo de Duarte revelou a necessidade de concretizar a situação, usando materiais disponíveis para simular o funcionamento da balança. Isto mostra que, para estes alunos, o pensamento ainda se apoia fortemente no concreto, sendo fundamental garantir momentos de manipulação que sustentem a transição para formas mais abstratas de pensamento. A estratégia do grupo de Martinho foi mais simbólica e abstrata, ao atribuir massas às fichas e representar o equilíbrio ou desequilíbrio da balança, embora a representação não tenha sido totalmente precisa. Esta estratégia evidencia uma maior capacidade de abstração e organização do pensamento, ao antecipar possibilidades e explorar diferentes formas de pesagem. Destaca-se a importância da discussão coletiva, que permitiu uma melhor compreensão e clarificação do problema, assim como a partilha das estratégias.

A tarefa 4 foi uma extensão do problema anterior, que permitiu aumentar o seu grau de dificuldade, ao introduzir mais fichas e ao considerar o número de pesagens realizadas. Apesar da complexidade acrescida, os resultados mostram que os alunos não revelaram grandes dificuldades, conseguindo apresentar estratégias de resolução que respeitaram todas as condições do enunciado. Este sucesso parece estar relacionado com o trabalho realizado na tarefa anterior, em especial com a discussão coletiva. Como refere (Brodie, 2010), quando os alunos têm oportunidade de discutir ideias e estratégias em grupo, tornam-se mais aptos a enfrentar tarefas desafiantes. Algumas estratégias foram mais completas e estruturadas do que outras, nomeadamente a do grupo de Santiago, que não só identificou a ficha falsa com o número de pesagens permitido, como antecipou, de forma sistemática, todas as possibilidades que poderiam ocorrer, revelando um nível elevado de organização do pensamento e uma capacidade de antecipar e estruturar que vai além da tentativa e erro. A discussão coletiva permitiu a partilha de estratégias, possibilitando aos alunos desenvolver a capacidade de resolver problemas diferentes dos habituais, envolvendo uma maior complexidade.

A tarefa 5, o projeto "Qual a massa da turma?", possibilitou a aplicação do conceito de massa numa situação real, relacionada com as vivências dos alunos (Cheeseman *et al.*, 2014; NCTM, 2007). O projeto permitiu a participação ativa e o envolvimento dos alunos em todas as fases do seu desenvolvimento (Ponte, 2005). As estimativas que os alunos fizeram sobre a massa da turma ficaram longe do valor real, mostrando que não tinham noção de uma quantidade tão elevada de massa. Verificou-se o contrário nas estimativas das massas de cada um, por exemplo a de Catarina ficou apenas a seiscentos gramas do valor da sua massa real. Estas estimativas foram importantes para o desenvolvimento do conhecimento conceptual da grandeza (Kamii, 1995).

Além de trabalhar a grandeza massa, o projeto permitiu estabelecer conexões com outros temas da Matemática, nomeadamente com Números. O grupo de Mariana formulou questões relacionadas com os sentidos da subtração e o grupo de Simão, ao responder, mostrou dificuldades em trabalhar com números decimais e com o algoritmo da subtração. Mesmo trabalhando com números inteiros, os alunos apresentaram dificuldades na realização do algoritmo, parecendo ainda não compreender que o aditivo tem de ser maior do que o subtrativo. Foi também possível discutir o significado de *juntar* e da *diferença*, assim como o significado do resultado da subtração. Os alunos tiveram ainda oportunidade de relembrar o algoritmo da subtração, que surgiu contextualizado em situações reais. Em relação ao processo de medição, este projeto permitiu aos alunos aprender a medir massas, em contextos reais, com recurso a balanças digitais, possibilitando a aplicação dos conhecimentos adquiridos e a relacionar as u.m. padronizadas, desenvolvendo assim o conhecimento processual da grandeza.

Nas intervenções do professor e da investigadora nos momentos de discussão coletiva, estiveram presentes as ações propostas por Ponte *et al.* (2013), que se mostraram de grande importância na aprendizagem da grandeza massa e na sua aplicação a tarefas em contexto real.

6. CONCLUSÃO

As tarefas apresentadas são parte de uma sequência que criámos para construir um percurso significativo (Ponte, 2005) para a aprendizagem da grandeza massa. As tarefas exploratórias propostas permitiram a participação e o envolvimento ativo dos alunos, tornando-os agentes principais no desenvolvimento da sua aprendizagem, e proporcionaram experiências práticas sem as quais é difícil uma compreensão sólida e aprofundada do processo de medir (NCTM, 2007).

Embora os alunos já tivessem iniciado o estudo do conceito de massa, ainda não tinham tido oportunidade de o fazer de modo sistemático, nem trabalhar o respetivo processo de medição. Foram proporcionadas situações de comparação direta e indireta de objetos, estando a propriedade transitiva muito associada a esta última comparação (Ponte y Serrazina, 2000). Podemos concluir que os alunos desenvolveram o conhecimento processual, assim como o conhecimento conceptual sobre a grandeza massa e a sua medida, como sugerido na literatura (Mwale y Jakobsen, 2022), assim como a capacidade de resolução de problemas envolvendo o conceito. A aplicação prática deste conhecimento foi feita com a realização do projeto que, partindo de uma situação relacionada com as vivências dos alunos, permitiu estabelecer conexões dentro da Matemática. Dado que os objetivos propostos para os vários níveis de desenvolvimento foram atingidos por todos os grupos, podemos concluir que a generalidade dos alunos atingiu o nível 5 de desenvolvimento.

Este conjunto de tarefas permitiu ainda a discussão e o confronto de ideias, a construção de conceitos, a compreensão de procedimentos, a progressão no domínio da linguagem matemática, estabelecendo conexões entre diferentes processos de resolução, de representações e ainda entre temas matemáticos (Canavarro, 2011; Stein *et al.*, 2008).

Os momentos de discussão coletiva constituíram momentos de reflexão, discussão e análise, assumindo um papel crucial no desenvolvimento da aprendizagem. Como refere Ponte (2005) a aprendizagem resulta "da reflexão realizada pelo aluno a propósito da atividade que realizou" (p. 5). A discussão coletiva e as ações do professor e da investigadora, revestiram-se de grande importância para a construção coletiva do novo conhecimento. A abordagem exploratória proporcionou aos alunos oportunidades de aprendizagem onde os conhecimentos e procedimentos matemáticos surgiram com significado, favorecendo o desenvolvimento das capacidades transversais de resolução de problemas e comunicação matemática (Canavarro, 2011).

Como limitação deste estudo, reconhecemos que se trata de um percurso que não inicia o estudo da grandeza massa, mas que lhe dá continuidade, trabalhando o processo de medição. Sugerimos a realização de mais investigações sobre a grandeza massa, dada a escassez de estudos e a importância que esta grandeza tem nos currículos escolares.

Agradecimentos

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia, no âmbito do projeto 2021.04798.BD, com o identificador DOI https://doi.org/10.54499/2021.04798.BD, e no âmbito da UIDEF – Unidade de Investigação e Desenvolvimento em Educação e Formação, UIDB/04107/2020, https://doi.org/10.54499 /UIDB/04107/2020

REFERÊNCIAS

Araman, E. M. O., Serrazina, L., y Ponte, J. P. (2019). "Eu perguntei se o cinco não tem metade": ações de uma professora dos primeiros anos que apoiam o raciocínio matemático. *Educação Matemática Pesquisa*, *21*(2), 466–490. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2018v21i2p466-490

Bogdan, R., y Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto Editora.

Boulton-Lewis, G. (1987). Recent cognitive theories applied to sequential length measuring knowledge in young children. *British Journal of Educational Psychology*, *57*, 330–342. https://doi.org/10.1111/j.2044-8279.1987.tb00861.x

Bragg, P., y Outhred, L. (2004). A measure of rulers: The importance of units in a measure. En M.J. Hoines y A.B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 159–165). Bergen University College.

Breda, A., Serrazina, L., Menezes, L., Sousa, H., y Oliveira, P. (2011). Geometria e medida no ensino básico. En *Lisboa. Ministério da Educação, Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular*. ME, DGIDC.

Brodie, K. (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09742-8

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, *115*, 11–17.

Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M.J., Correia, P., Marques, P., y Espadeiro, G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico*. ME-DGE.

Cheeseman, J., McDonough, A., y Clarke, D. (2011). Investigating children's understanding of the measurement of mass. En J. Clark, B. Kissane, J. Mousley, T. Spencer, y S. Thornton (Eds.), *Proceedings of the 34th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia]* (pp. 174–182). AAMT y MERGA.

Cheeseman, J., McDonough, A., y Ferguson, S. (2014). Investigating young children's learning of mass measurement. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(2), 131–150. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0082-7

Kamii, C. (1995). Why is the use of a ruler so hard? *Paper Presented at the 17th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.*

Kamii, C., y Clark, F. (1997). Measurement of length: The need for a better approach to teaching. *School Science and Mathematics*, *97*, 116–121.

MacDonald, A. (2010). Heavy thinking: Young children's theorising about mass. *APMC*, *15*(4), 4–8.

MacDonald, A. (2011). Young children's representations of their developing measurement understandings. *Proceedings of the 34th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 482–490).

MacDonald, A., y Lowrie, T. (2011). Developing measurement concepts within context: Children's representations of length. *Mathematics Education Research Journal*, *23*(1), 27–42. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s13394-011-0002-7

McDonough, A., Cheeseman, J., y Ferguson, S. (2013). *Young children's emerging understandings of the measurement of mass*. https://doi.org/10.1177/183693911303800403

ME (2018). *Aprendizagens essenciais de Matemática*. ME, DGE.

Mendes, F., Brocardo, J., y Oliveria, H. (2016). Especificidades e desafios da design research : o exemplo de uma experiência de ensino no 1 . o ciclo. *Quadrante, 25*(2), 51–75. https://doi.org/10.48489/quadrante.22938

Mwale, L., y Jakobsen, A. (2022). An investigation of teacher 's practices when teaching mass measurement in grade 4 in Malawi. *Twelfth Congress of the European Soiety for Research in Mathematics Education (CERME 12).*

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. APM.

NSW (2017). *Teaching Measurement Stage 2-Stage 3*. Department of Education Learning and Teaching Directorate.

Nunes, T., y Bryant, P. (1996). *Children doing mathematics*. Blackwell Publishers.

Passelaigue, D., y Munier, V. (2015). Schoolteacher trainees' difficulties about the concepts of attribute and measurement. *Educational Studies in Mathematics*, *89*(3), 307–336. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9610-6

Piaget, J., Inhelder, B., y Szeminska, A. (1960). *The Child's Conception of Geometry*. Routledge.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. *O Professor e o Desenvolvimento Curricular*, *1*, 11–34.

Ponte, J. P. (2017). Discussões coletivas no ensino-aprendizagem da Matemática. *A prática dos professores: Planificação e discussão na sala de aula.*, 33–56.

Ponte, J P., Mata-Pereira, J., y Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante*, *22 (2)*, 55–81. https://doi.org/10.48489/quadrante.22894

Ponte, J. P., Nunes, C. C., y Quaresma, M. (2012). Explorar, investigar, interagir na aula de Matemática: Elementos fundamentais para a aprendizagem. En A. C. Silva, M. Carvalho, y R. G. Rêgo (Eds.), *Ensinar Matemática: Formação, investigação e práticas docentes,* (pp. 49–74). Cuiabá: UFMT.

Ponte, J. P., y Serrazina, M. L. (2000). *Didática da matemática do 1.o ciclo*. Universidade Aberta.

Sarama, J., y Clements, D. H. (2009). Geometric measurement, Part 2. En J. Sarama y D. H. Clements (Eds.), *Early childhood mathematics education research* (pp. 293–316). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203883785-11

Smith III, J. P., y Barrett, J. (2017). The learning and teaching of measurement: Coordinating quantity and number. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 355–385). NCTM.

Solomon, T. L., Vasilyeva, M., Huttenlocher, J., y Levine, S. C. (2015). Minding the gap: Children's difficulty conceptualizing spatial intervals as linear measurement units. *Developmental Psychology*, *51*(11), 1564–1573. https://doi.org/10.1037/a0039707

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., y Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313–340. https://doi.org/10.1080/10986060802229675

Stephan, M., y Clements, D. H. (2003). Linear and area measurement in prekindergarten to grade 2. En D. H. Clements (Ed.), *Learning and Teaching Measurement* (pp. 3–16). NCTM.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., y Buys, K. (2005). *Young children learn measurement and geometry. A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for the lower grades in primary school (TAL Project)*. Utrecht University, Freudenthal Institute. https://doi.org/10.1163/9789087903985

Autor de correspondencia
Marta Teixeira
Dirección: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa,
Alameda da Universidade
1649-013 Lisboa, Portugal
martateixeira@edu.ulisboa.pt