

Análisis comparativo en la evaluación en geometría: PISA y pruebas propuestas por docentes

Comparative analysis in geometry assessment: PISA and tests proposed by teachers

María Isabel Elvas Fernández,¹ Rafael Ramírez Uclés²

Resumen: Este estudio compara las tareas de evaluación propuestas por PISA, en el contenido espacio y forma, con las propuestas por docentes en el aula para evaluar el conocimiento geométrico de 122 estudiantes de 15 años que cursan primer año de bachillerato uruguayo. La investigación tiene un enfoque cualitativo de carácter descriptivo. El análisis aborda las competencias matemáticas y componentes del sentido espacial como expectativas de aprendizaje y el rendimiento obtenido por el alumnado. Los resultados muestran semejanzas en las competencias matemáticas de comunicar y representar, en el proceso cognitivo de comprender, en el manejo de conceptos geométricos y en la habilidad de percepción de las relaciones espaciales. El alto rendimiento en las tareas de PISA garantiza alto resultado en las tareas de aula, pero no al revés, ya que el buen rendimiento en las tareas de aula no implica un alto resultado en las tareas de PISA. El bajo rendimiento en el aula conlleva bajo resultado en PISA.

Fecha de recepción: 27 de julio de 2024. **Fecha de aceptación:** 4 de noviembre de 2025

¹ Universidad de Granada, Facultad de Ciencias de la Educación, Departamento de Didáctica de la Matemática, Campus de Cartuja, isabelelvas@correo.ugr.es, <https://orcid.org/0000-0003-1502-0381>

² Universidad de Granada, Facultad de Ciencias de la Educación, Departamento de Didáctica de la Matemática, Campus de Cartuja, rramirez@ugr.es, <https://orcid.org/0000-0002-8462-5897>

Palabras clave: *Expectativas de aprendizaje, Competencias, Habilidades de visualización, Sentido espacial, Tareas.*

Abstract: This study compares the assessment tasks proposed by PISA in the space and shape content with those proposed by teachers in the classroom to assess the geometric knowledge of 122 15-year-old students who are in the first year of high school in Uruguay. The research has a qualitative approach of a descriptive nature. The analysis addresses mathematical competencies and components of spatial sense such as learning expectations and the performance obtained by students. The results show similarities in the mathematical skills of communicating and representing, in the cognitive process of understanding, in the management of geometric concepts and in the ability to perceive spatial relationships. High performance in PISA tasks guarantees high results in classroom tasks, but not the other way around, high performance in classroom tasks does not imply high results in PISA tasks; and low performance in the classroom leads to low results in PISA.

Keywords: *Learning expectations, Competences, Visualization skills, Spatial sense, Task.*

1. INTRODUCCIÓN

Distintas investigaciones consideran necesario el pensamiento espacial para desempeñarse en el mundo moderno y tecnológico en el que vivimos y, proponen incorporarlo dentro del currículo (Diezmann y Lowrie, 2009), además enfatizan la alfabetización espacial y el desarrollo de las habilidades espaciales como fundamentos para los trabajos en ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas (Novitasari *et al.*, 2021). Las expectativas de aprendizaje en tanto objetivos y competencias, obran como herramientas organizadoras del currículo, fundamentan el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas vinculadas al sentido espacial (Lupiáñez, 2009). Algunas investigaciones encuentran beneficioso el uso de la visualización y el desarrollo de las habilidades espaciales en la mejora del desempeño en matemática (Presmeg, 2006). Se reconoce un trabajo continuo, desde la investigación, en relación con el razonamiento espacial, la medición y la visualización en geometría, el conocimiento del estudiantado

vinculado a las definiciones y comprensión de figuras geométricas, a las relaciones de inclusión e identificación de formas y a problemas de interpretación involucrados en la resolución de tareas geométricas (Jones y Tzekaki, 2016).

Los informes de PISA, en los que Uruguay comienza a participar desde 2003, muestran una baja puntuación promedio en matemáticas en las últimas tres mediciones, 418 en 2015 y 2018 y 409 puntos en 2022. En el contenido espacio y forma obtiene la mejor puntuación promedio en relación con los resultados en otras áreas. De los seis niveles de puntuación definidos en forma creciente, el promedio uruguayo accede al nivel 1 de desempeño (ANEP, 2023).

Este trabajo forma parte de una investigación más amplia que abarca las características de las tareas, el sentido espacial, las habilidades de visualización, las expectativas de aprendizaje y el rendimiento del estudiantado, donde se busca establecer relaciones entre estas variables, con el fin de determinar diferencias y semejanzas entre las dos tipologías de tareas, de aula y de PISA. En este artículo en particular, se pretende aportar información sobre las expectativas de aprendizaje relativas al sentido espacial requeridas a estudiantes de 15 años que cursan primero en bachillerato de Uruguay, en tareas de evaluación propuestas por docentes en el aula y tareas de PISA. Para ello, se proponen categorías para describir las expectativas de aprendizaje relativas al sentido espacial en las tareas de PISA, en el contenido espacio y forma, y en las tareas de evaluación propuestas por cuatro docentes de una institución privada de Montevideo, cuando evalúan el aprendizaje de los lugares geométricos como contenido curricular correspondiente a geometría.

Se abordan dos preguntas principales: ¿Qué expectativas de aprendizaje, en cuanto a competencias, procesos cognitivos y componentes del sentido espacial, se evidencian en las tareas propuestas en evaluaciones de PISA en el contenido espacio y forma y por el profesorado en el aula en una evaluación de geometría? ¿Qué rendimiento manifiestan los y las estudiantes al resolver dichas tareas de evaluación de PISA y de aula?

En la investigación presentada en este artículo se consideran algunas demandas provenientes de la investigación. Por un lado, identificar las expectativas de aprendizaje relativas al sentido espacial, lo que permite obtener información más precisa para diseñar, implementar y evaluar procesos formativos vinculados con el conocimiento geométrico y para ayudar a los docentes a establecer conexiones entre registros visuales y simbólicos de las mismas nociones matemáticas (Presmeg, 2006). Por otro, contribuir a la mejora de la interacción y coherencia entre los dos tipos de evaluación, a gran escala y en el aula, interna y externa, para ayudar al éxito de los aprendizajes de los estudiantes (Suurtamm *et al.*, 2016).

2. ANTECEDENTES

Para la mejora de los aprendizajes, las investigaciones revelan que la formulación de expectativas de aprendizaje brinda ventajas potenciales en la enseñanza de las matemáticas y, a la hora de perfeccionar la capacidad de los estudiantes para reflexionar críticamente, para justificar la validez científica de sus ideas y determinar la importancia del aprendizaje realizado durante los cursos (De Long *et al.*, 2005).

En distintos países y contextos se han realizado investigaciones que buscan establecer un vínculo entre las expectativas de aprendizaje y el rendimiento en matemáticas. En Australia, Sullivan *et al.* (2010) analizan la implementación de una tarea matemática por tres docentes diferentes y afirman que las expectativas de aprendizaje definidas por cada docente influyen positivamente en el éxito de la evaluación del tema trabajado. En Chile, Martínez (2015) investiga a través de las pruebas del sistema nacional de evaluación de la calidad del aprendizaje para matemáticas en octavo año de la enseñanza básica, y concluye que las altas expectativas de aprendizaje de los docentes sobre las posibilidades de los estudiantes, generan mejores resultados en las pruebas y al revés, las expectativas bajas perjudican el logro educativo.

El estudio de Chen *et al.* (2009) analiza las expectativas de aprendizaje relacionadas con la medición que involucra área y volumen en primaria, en los grados 1 a 8 de varios estados de EE. UU. y países asiáticos de alto rendimiento en TIMSS, incluidos Singapur, Taiwán y Japón. Los resultados indican que el contenido de matemáticas, la ubicación de grado y el nivel cognitivo de las expectativas de aprendizaje relacionados con temas de medición seleccionados varían marcadamente entre estados y países. La variabilidad en las expectativas de aprendizaje da como resultado diferencias en las oportunidades de aprender. Son varios los factores que pueden contribuir a un mayor rendimiento en matemáticas e influir en lo que aprende el estudiantado: las expectativas de aprendizaje, el profesorado que imparte la instrucción y la forma en la que organiza el tema.

El interés de las investigaciones en el campo de las capacidades espaciales por el desarrollo del razonamiento espacial surge, no solo por ser un componente importante de la acción y el pensamiento humanos, sino por su estrecha relación con el pensamiento y el conocimiento geométrico. Las continuas investigaciones relacionadas con el sentido espacial manifiestan la complejidad de acciones e interacciones involucradas al resolver tareas que lo implican (Ortiz y Sandoval, 2018). Algunos trabajos consideran necesaria la inteligencia espacial

para la resolución de problemas (Riastuti *et al.*, 2017). Los estudios referidos a la educación de la geometría han abarcado el razonamiento y pensamiento espacial y, en particular, la visualización es un aspecto que ha recibido atención (Jones y Tzekaki, 2016) y se ha señalado su relación positiva con la resolución de problemas (Stylianou, 2001). Además, los resultados indican un bajo desarrollo de habilidades relacionadas con la orientación espacial, las relaciones y transformaciones espaciales, así como la comprensión de las dimensiones y la posición (Jones y Tzekaki, 2016).

3. MARCO TEÓRICO

Se estructura a partir de las variadas denominaciones de las investigaciones sobre las expectativas de aprendizaje: metas, competencias, objetivos, demandas y resultados. Se busca ponerlas en diálogo y examinarlas desde diversos niveles del currículo, las competencias educativas y los procesos cognitivos acerca de un contenido determinado, a través de la demanda formulada en tareas concretas. Se presentan las competencias y los procesos cognitivos en educación matemática, el concepto de sentido espacial y sus componentes, y la actuación de los estudiantes en la resolución de tareas de PISA y de aula.

3.1. EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE Y SUS CONCEPCIONES

Las expectativas de aprendizaje en cualquier disciplina se definen como “aquellas capacidades, competencias, conocimientos, saberes, aptitudes, habilidades, técnicas, destrezas, hábitos, valores y actitudes que, según diferentes instancias del currículo, se espera que logren, adquieran, desarrollen y utilicen los estudiantes” (Lupiáñez, 2009, p. 77).

Las expectativas de aprendizaje en matemáticas “expresan determinados usos reconocibles y deseados del conocimiento matemático, que se pueden observar o inferir a partir de las actuaciones de los estudiantes ante las tareas” (Lupiáñez, 2009, p. 77). Estos conocimientos habilitan a la persona que los domina a tener un conjunto de puntos de vista que le permiten una descripción general y juicio de las relaciones entre las matemáticas y las condiciones y oportunidades en la naturaleza, la sociedad y la cultura (Niss y Højgaard, 2011).

Estas expectativas se concretan en el desarrollo y logro de capacidades vinculadas con los conocimientos que se espera que adquieran los estudiantes durante su

etapa formativa obligatoria. La capacidad, se muestra en la destreza y aptitud con que actúan y pueden usar sus conocimientos para realizar tareas y resolver problemas en diferentes situaciones y contextos (Flores y Lupiáñez, 2016).

Parece que hubiera acuerdo en que hay dos niveles en las expectativas de aprendizaje: un nivel más general del aprendizaje de las matemáticas, a largo plazo, donde se habla de metas y competencias matemáticas; otro nivel más específico, a corto plazo, en relación con lecciones, contenidos matemáticos o cursos, en el que se habla de objetivos educativos (De Long *et al.*, 2005).

En las expectativas de aprendizaje a largo plazo, Rico y Lupiáñez (2008) hablan de competencias, las sitúan en una perspectiva amplia y comprensiva, que en matemáticas se refiere a “procesos cognitivos que el alumno es capaz de llevar a cabo a partir de conocimientos y destrezas” (p.71) que orientan la formación a largo plazo.

En relación con las expectativas de aprendizaje como objetivos educativos, estas describen los resultados de la instrucción de algún contenido de una materia y lo que deben hacer con ese contenido, pueden, además, ser un medio para determinar la congruencia de objetivos, actividades y evaluaciones educativas en una unidad, curso o plan de estudios (Krathwohl, 2002).

3.2. EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE Y COMPETENCIAS EDUCATIVAS

Los estudios de las últimas décadas manifiestan que el término competencia tiene asociado una variedad de definiciones y un significado poco preciso. Una persona que posee competencia dentro de un campo es alguien capaz de dominar los aspectos esenciales de ese campo de manera efectiva e incisiva y con una visión general y certeza de juicio (Niss y Højgaard, 2011). Desde el enfoque funcional, la “competencia se define como la habilidad para enfrentar con éxito demandas complejas en un contexto determinado” (Rychen, 2008, p.10).

La OCDE (2017) considera al individuo competente en matemáticas cuando es capaz de interpretar y formular matemáticas en diversidad de contextos, incluyendo “el razonamiento matemático y el uso de conceptos, procedimientos, hechos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos” (p.67). Una competencia matemática es una disposición bien informada para actuar apropiadamente en situaciones que involucren un cierto tipo de desafío matemático (Niss y Højgaard, 2011).

En este estudio, se consideran siete competencias matemáticas que se definen en la tabla 1: comunicar; matematizar; representar; razonar y argumentar;

idear estrategias para la resolución de problemas; utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas; y usar herramientas matemáticas. Son distintas e independientes, pero pueden estar relacionadas entre sí o, no tan claramente definidas para que no haya superposición. Cada una de las competencias matemáticas permite llevar a cabo ciertos tipos de actividades matemáticas basándose en conocimientos fácticos y habilidades concretas (Niss y Højgaard, 2011; OCDE, 2017).

Tabla 1. Competencias matemáticas (Niss y Højgaard, 2011; OCDE, 2017)

Comunicar.	Leer, decodificar e interpretar declaraciones, preguntas, tareas u objetos, para comprender, aclarar y formular un problema. Resumir y presentar resultados o presentar a otros la solución, y una explicación o justificación.
Matematizar.	Transformar un problema definido en el mundo real a una forma estrictamente matemática, o interpretar o evaluar un resultado o un modelo matemáticos en relación con el problema original.
Representar.	Seleccionar, interpretar, traducir y utilizar una variedad de representaciones para capturar una situación, interactuar con un problema o presentar un trabajo. Las representaciones incluyen gráficos, diagramas, tablas, imágenes, ecuaciones, fórmulas y materiales concretos.
Razonar y argumentar.	Procesos de pensamiento con raíces lógicas que exploran y vinculan elementos del problema para hacer inferencias, verificar una justificación dada o proporcionarla.
Idear estrategias para la resolución de problemas.	Seleccionar o idear un plan o estrategia para utilizar las matemáticas para resolver problemas derivados de una tarea o contexto, y guiar su implementación.
Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas.	Comprender, interpretar, manipular y hacer uso de expresiones simbólicas dentro de un contexto matemático. Comprender y utilizar construcciones formales basadas en definiciones, reglas y sistemas formales, y utilizar algoritmos.
Usar herramientas matemáticas.	Herramientas físicas, como instrumentos de medición, calculadoras y herramientas informáticas. Saber utilizarlas y conocer sus limitaciones.

Por su parte, Krathwohl (2002) habla de los objetivos educativos que ayudan a clasificar metas, objetivos o estándares educativos. Los objetivos más importantes de la educación, implican procesos que van desde comprender hasta hacer síntesis. Por lo tanto, los procesos cognitivos están constituidos por seis categorías que se definen en la tabla 2: recordar, comprender, aplicar, analizar, evaluar y crear.

Tabla 2. Procesos cognitivos (Krathwohl, 2002)

Recordar.	Recuperar conocimientos relevantes de la memoria a largo plazo que se puede traducir como identificar o reconocer.
Comprender.	Determinar el significado de las instrucciones tradicionales incluidos orales, escritos y gráficos, que se puede dividir en interpretar, ejemplificar, clasificar, resumir, inferir, comparar y explicar.
Aplicar.	Realizar o utilizar un procedimiento en una determinada situación que se traduce en ejecutar o implementar.
Analizar.	Desintegrar el material en las partes que lo constituyen y detectar cómo las partes se relacionan entre sí, a una estructura o a un propósito general, que se traduce en diferenciar organizar o atribuir.
Evaluar.	Emitir juicios basados en criterios y estándares, que se traduce en comprobar y criticar.
Crear.	Junta elementos para formar un todo coherente o hacer un producto original que implica, generar, planificar y producir.

3.3. EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE Y EL SENTIDO ESPACIAL

El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000) resalta la noción de sentido espacial; propone que los estudiantes desarrollen el sentido espacial y la capacidad de usar propiedades y características de formas geométricas y, desarrollar argumentos matemáticos sobre relaciones geométricas para resolver problemas. Así, el concepto de sentido espacial sugiere un enfoque funcional de la geometría aplicada a la resolución de problemas de la vida cotidiana.

Flores *et al.* (2015) explican el sentido espacial como un modo intuitivo de “entender el plano y el espacio, para identificar cuerpos, formas y relaciones entre ellos, que implica manejar relaciones y conceptos de geometría de forma no convencional, incluyendo la habilidad para reconocer, visualizar, representar y transformar formas geométricas” (p.129-130). Además, conciben el manejo de

conceptos geométricos constituido por tres componentes: elementos geométricos (conceptos geométricos y propiedades de las formas); relaciones geométricas; ubicación y movimientos (orientación). La componente elementos geométricos hace referencia a los conceptos geométricos y propiedades de las formas, implica conocer formas y figuras que, supone identificarlas, definirlas, caracterizarlas y construirlas. Establecer y reconocer relaciones geométricas supone apreciar cualidades de las formas y los cuerpos geométricos. La ubicación, los movimientos y la orientación requieren de la capacidad para situar los elementos en el espacio y en el plano, identificar regularidades y elementos invariantes para realizar movimientos y, comprender la disposición de los elementos en el espacio.

Estos autores agregan la visualización como una componente transversal que establece conexiones entre las tres anteriores y da fortaleza al sentido espacial (figura 1). Definen la visualización como “un amplio conjunto de imágenes, capacidades y habilidades necesarias y útiles para elaborar, analizar, transformar y comunicar información relativa a las posiciones entre figuras, objetos y modelos geométricos” (Flores *et al.*, 2015, p. 133).

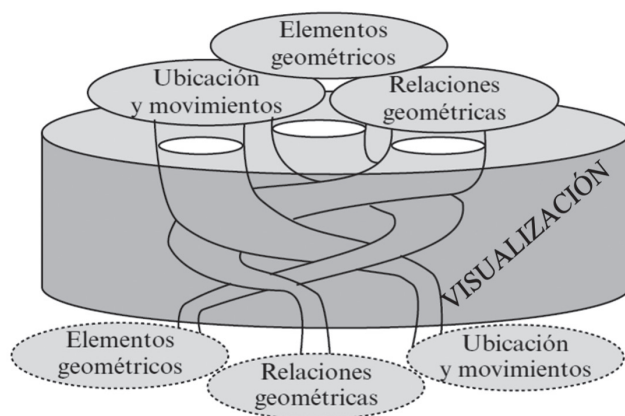


Figura 1. Esquema de las componentes del sentido espacial (Flores *et al.*, 2015, p.134).

En relación con la visualización, utilizan el marco teórico de Gutiérrez (1996) que, la concibe integrada por cuatro elementos: las imágenes mentales, los procesos de visualización, las representaciones externas y las habilidades de visualización. Este trabajo se centra en estas últimas al adquirir un papel relevante en la resolución de una tarea matemática (Gutiérrez, 2006).

Las habilidades espaciales se definen como una colección de habilidades que cambian o apoyan la percepción del espacio, que se representan en términos reales o mentalmente usando el conocimiento espacial (Mizzi, 2017). Se consideran siete habilidades de visualización que intervienen en la percepción espacial, en el proceso de manipulación y generación de imágenes: coordinación ojo-motor, percepción figura-contexto, conservación de la percepción, percepción de la posición en el espacio, percepción de las relaciones espaciales, discriminación visual y, memoria visual (Del Grande, 1990).

La coordinación ojo-motor involucra coordinar la visión con el movimiento del cuerpo. La habilidad percepción figura-contexto, supone apreciar cambios en la percepción de las figuras contra fondos complejos y permite identificar un componente en una situación. La conservación de la percepción implica reconocer un objeto pese a sufrir variaciones de posición y tamaño. La percepción de la posición en el espacio determina un objeto en relación con otros objetos o con el observador. La percepción de las relaciones espaciales implica ver dos o más cualidades que caracterizan objetos relacionados con uno mismo o entre sí. La discriminación visual permite identificar similitudes y diferencias entre objetos. La memoria visual significa recordar con precisión objetos que ya no están a la vista y relacionar sus características con otros objetos que están o no a la vista.

3.4. EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE Y RESULTADOS DE APRENDIZAJE

Las expectativas de aprendizaje en matemáticas desde el punto de vista de los contenidos, se plantean a través de las tareas y, se manifiestan por medio de los logros y las actuaciones de los estudiantes (Rico y Lupiáñez, 2008).

Uno de los contenidos propuestos por PISA, espacio y forma, supone la comprensión de un conjunto de conceptos y habilidades básicos. Ser competente en matemáticas implica una variedad de actividades como comprender la perspectiva, crear y leer mapas, transformar formas, interpretar vistas de escenas tridimensionales desde varias perspectivas y construir representaciones de formas, que se ponen de manifiesto en las diversas tareas propuestas en cada medición (OCDE, 2017).

Las expectativas de aprendizaje se expresan como capacidades y se evidencian a través de conductas observables en la realización de tareas relativas a un tema específico con una complejidad determinada, o al conocimiento matemático que se espera hayan adquirido en el transcurso de una etapa escolar

(Lupiáñez, 2009). Se manifiestan a través de las tareas por medio de las actuaciones y los logros de los estudiantes (Rico y Lupiáñez, 2008).

Este estudio se centra en los resultados esperados de una etapa en los contenidos geométricos, a través de las tareas de PISA en el contenido espacio y forma, y de una unidad temática en relación con la geometría como son los lugares geométricos.

4. METODOLOGÍA

La investigación tiene un enfoque cualitativo de carácter descriptivo, busca comprender las expectativas de aprendizaje en la enseñanza de la geometría, las esperadas en la resolución de las tareas de PISA en el contenido espacio y forma y en las tareas propuestas por docentes en el aula para evaluar los lugares geométricos. Además, se espera comprender la manifestación del sentido espacial de 122 estudiantes de 15 años cuando resuelven ambas tipologías de tareas de evaluación.

4.1. SELECCIÓN DE LAS TAREAS

La selección de las tareas de evaluación implica dos procesos diferentes, el referido a la recolección de las tareas liberadas por PISA y la recolección y selección de las tareas de aula.

4.1.1. Tareas de PISA

De las tareas de evaluación liberadas por PISA se seleccionaron las correspondientes a PISA 2012, porque permanecieron como referencia y preparación para la última medición del 2022. Se eligieron las referidas a la competencia matemática, en particular, al contenido espacio y forma. Se descartan las tareas en soporte digital porque los enlaces encontrados no permiten su acceso (Instituto Nacional de Evaluación Educativa [INEE], s.f.).

Las tareas seleccionadas fueron siete que se refieren al contenido espacio y forma, y constituyen 13 preguntas que se nombran con las iniciales de su título y número de pregunta (ver anexo 1): compra de un apartamento (CA), heladería (preguntas H1, H2 y H3), vertido de petróleo (VP), la noria (preguntas N1 y N2), una construcción con dados (CD), garaje (preguntas G1 y G2) y puerta giratoria (preguntas PG1, PG2 y PG3).

4.1.2. Tareas de aula

Para la selección de las tareas de aula, se determina el curso de primero de bachillerato porque se encuentran la mayoría de los estudiantes con 15 años, corte etario de la evaluación de PISA. Se seleccionan las tareas de evaluación del único contenido curricular de geometría, por tanto, son tareas que evalúan el aprendizaje de los lugares geométricos (CES, 2010).

Dado que el interés del estudio está en el sentido espacial, se tiene acceso a seis pruebas de evaluación referidas a lugares geométricos, propuestas durante el año lectivo 2022 por cuatro profesores de secundaria de una institución privada de Montevideo. Dos profesores con dos grupos a cargo, y los otros dos con un grupo, forman un total de seis grupos en el nivel. Las pruebas tienen la misma estructura y similitud de exigencias en las tareas. Cada prueba está constituida por tres tareas. Se seleccionan dos pruebas de evaluación propuestas por dos profesores con uno y dos grupos a cargo, y constituyen seis tareas de aula que se codifican con A_i , desde A_1 hasta A_6 (ver anexo 2).

4.2. RECOLECCIÓN DE DATOS

Para examinar los componentes del sentido espacial, se realiza la resolución amplia y detallada de cada una de las 13 tareas, siete de PISA y seis de aula. Se consideran todas las posibles estrategias de resolución y en cada estrategia se examinan todos los pasos. Las siete tareas de PISA con sus 13 preguntas se analizan de manera separada por dos expertos y se acuerdan las diferencias para establecer las categorías a priori. Las seis tareas de aula las resuelven dos docentes y se consensuan los procedimientos de resolución. A partir de esas respuestas, los dos expertos triangulan los componentes del sentido espacial.

En relación con el estudiantado, por una parte, se aplican las tareas de PISA a estudiantes de una institución privada de Montevideo. Se determina que las siete tareas de PISA se resuelven en 80 minutos, dos horas de clase que no siempre pueden ser consecutivas. Se dividen las tareas en dos cuestionarios para su aplicación a los seis grupos, un total de 155 estudiantes de 15 años. Por otra parte, se recopilan las calificaciones obtenidas por dichos estudiantes en las pruebas de geometría propuestas por el profesorado. El rango de las calificaciones para bachillerato en 2022, en Uruguay es de 1 a 12.

Se consideran las resoluciones de estudiantes que cumplen con asistir a las dos sesiones de cuestionarios y a la prueba de geometría. Son 122 estudiantes los que participan en todas las instancias, que se codifican como Ei, desde E1 hasta E122.

4.3. DETERMINACIÓN DE LAS CATEGORÍAS DE ANÁLISIS

El trabajo de determinación de las categorías de análisis busca ajustarse a los objetivos planteados en este estudio. Para la creación de categorías, es necesario tener en cuenta que sean: pertinentes, adaptadas a los objetivos y contenidos; y exclusivas, un mismo elemento del contenido no puede ser clasificado en categorías diferentes (López, 2002).

En la tabla 3 se presentan los aspectos que atiende el análisis: las expectativas de aprendizaje como competencias educativas y componentes del sentido espacial. Para cada aspecto se establecen categorías y subcategorías descritas y definidas en el marco teórico. Así, el sentido espacial queda descrito a partir de cinco categorías para el manejo de conceptos geométricos y siete para las habilidades de visualización.

Tabla 3. Categorías y subcategorías

	Categorías	Subcategorías
Competencias educativas	Competencias matemáticas (Niss y Højgaard, 2011; OCDE, 2017)	Comunicar; matematizar; representar; razonar y argumentar; idear estrategias para la resolución de problemas; utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas; usar herramientas matemáticas.
	Procesos cognitivos (Krathwohl, 2002)	Recordar, comprender, aplicar, analizar, evaluar y crear.
Sentido espacial	Manejo de conceptos geométricos (Flores et al, 2015)	Conceptos de las figuras, propiedades de las formas, relaciones geométricas, ubicación y movimientos, y orientación.
	Habilidades de visualización (Del Grande, 1990)	Coordinación ojo-motor, percepción figura-contexto, conservación de la percepción, percepción de la posición en el espacio, percepción de las relaciones espaciales, discriminación visual, y memoria visual.

Para los resultados de aprendizaje se consideran las resoluciones de 122 estudiantes que son analizadas a través del acierto en sus respuestas. Los resultados, en las tareas de PISA atienden la cantidad de respuestas correctas y en las tareas de aula se considera la calificación obtenida por el estudiante en la prueba de evaluación propuesta por los docentes.

4.4. DESCRIPCIÓN DEL ANÁLISIS

El análisis se realiza a partir de las resoluciones de las 13 tareas que forman parte de esta investigación. Las siete tareas de PISA están constituidas por trece preguntas que se analizan de forma independiente, en adelante cada pregunta se considera como tarea. Mientras que cada una de las seis tareas de aula responden a una única consigna, por tal motivo se analiza la tarea en su conjunto. Así, se tienen en total 19 tareas para analizar. Los análisis fueron puestos en consideración, recibieron agregados y correcciones del intercambio entre los autores.

4.4.1. Análisis de las expectativas de aprendizaje en las competencias educativas

El análisis relativo a las expectativas de aprendizaje como competencias educativas considera la resolución de expertos de las tareas de PISA y la resolución de los docentes de las tareas de aula. Para todas las tareas se confecciona una tabla con las competencias educativas en sus dos categorías, competencias matemáticas y procesos cognitivos. Las tablas se completan con las subcategorías a partir de las evidencias que hay de ellas en cada tarea.

4.4.2. Análisis de las expectativas de aprendizaje en el sentido espacial

Para todas las tareas se confecciona una tabla con los componentes del sentido espacial, en sus dos categorías y correspondientes subcategorías (Elvas *et al*, 2022). En la tabla 4, se presenta como ejemplo el análisis del sentido espacial en la tarea G2.

Tabla 4. Componentes del sentido espacial en la tarea G2

Componentes del sentido espacial		Tarea G2
Manejo de conceptos geométricos	Conceptos	Aplicar el concepto de triángulo rectángulo, de rectángulo y de altura. Medida indirecta de la longitud. Medida directa del área.
	Propiedades de las formas	Aplicar el teorema de Pitágoras y el área del rectángulo.
	Relaciones geométricas	Lados opuestos de un rectángulo son paralelos. Lados consecutivos de un rectángulo son perpendiculares. La altura es perpendicular a la horizontal. El lado del rectángulo del tejado es la hipotenusa de un triángulo rectángulo determinado por dos medidas que no corresponden a ningún objeto físico (la mitad de la anchura del tejado y su altura)
	Ubicación y movimientos	–
	Orientación	Identificar que el rectángulo superior de la vista lateral no representa el tamaño real del techo. Localizar los elementos del rectángulo (del techo) en las diferentes perspectivas.
Habilidades de visualización	Coordinación ojo-motor	–
	Percepción figura-contexto	Identificar medidas que corresponden a objetos, como el largo del garaje se corresponde con el largo del techo. Identificar distancias entre objetos, como los que determinan el triángulo rectángulo que tiene por hipotenusa al lado del tejado.
	Conservación de la percepción	Percibir la inclinación (el ancho y el largo en el techo), aunque no se vea en una de las vistas.
	Percepción de la posición en el espacio	Comprender las relaciones entre las medidas proporcionadas en las dos vistas, frontal y lateral para conformar el rectángulo que representa al techo.
	Percepción de las relaciones espaciales	Identificar y determinar el largo y el ancho real del techo a partir de las vistas frontal y lateral.
	Discriminación visual	Diferenciar la altura del ancho techo. Reconocer elementos comunes en las dos perspectivas.
	Memoria visual	–

4.4.3. Análisis del rendimiento del estudiantado en las tareas

Para el rendimiento en las pruebas de geometría que evalúan los lugares geométricos, propuestas por los docentes en el aula, se accede a las calificaciones que obtienen los 122 estudiantes. Se dividen en tres grupos: bajo, medio y alto según el rendimiento obtenido. La división se realiza según el criterio de evaluación que la institución educativa privada propone: bajo, calificación menor o igual a 4 que significa menos del 50 % de la prueba realizada con acierto, el rendimiento es considerado insuficiente; medio, del 5 al 8 donde se encuentran los estudiantes que realizan entre 50 y el 74 % de la prueba con acierto, el rendimiento va desde apenas aceptable hasta bueno; y alto, del 9 al 12, donde se encuentran los estudiantes que realizan entre 75 y el 100 % con acierto, cuyo rendimiento va desde muy bueno a excelente (tabla 5).

Tabla 5. Grupos de estudiantes según el rendimiento en las tareas de aula

	Rango total	Bajo	Medio	Alto
Calificaciones en pruebas de geometría	[1,12]	[1,4]	[5,8]	[9,12]
Cantidad de estudiantes	122	28	52	42

Para las tareas de PISA se construyen tablas que reúnen la información de la respuesta de 122 estudiantes de 15 años a cada una de las 13 tareas. Las respuestas se clasifican y codifican en: “bien resuelta” (B), llega a la respuesta esperada a través de alguna de las posibles estrategias de resolución; “mal resuelta” (M), no llega a la respuesta esperada; “con error” (ce), cuando el estudiante manifiesta errores en su proceso de resolución; “sin terminar” (st), cuando encauza la resolución, pero no alcanza una respuesta; y “sin hacer” (sh), cuando no hay registro de resolución ni respuesta.

En el estudio que se presenta en este artículo, se consideran las respuestas correctas. El rango de respuestas correctas es de 0 a 13, que se clasifica en los mismos tres niveles establecidos para el rendimiento: bajo, menos del 50 % de respuestas correctas; medio, entre 50 y el 74 %; y alto, más del 75 % de respuestas correctas (tabla 6).

Tabla 6. Grupos de estudiantes según las respuestas correctas en las tareas de PISA

	Rango total	Bajo	Medio	Alto
Respuestas correctas	[0,13]	[0,6]	[7,9]	[10,13]
Cantidad de estudiantes	122	85	29	8

5. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Para la presentación de los resultados, se confeccionan tablas que sintetizan la información para cada categoría con sus correspondientes subcategorías, que fueron definidas en el marco teórico, esta vez agrupándolas de acuerdo con su procedencia, es decir, las tareas de PISA con sus 13 preguntas y las seis tareas de aula.

Con los análisis agrupados se confeccionan tablas que sintetizan la información: la tabla 7 acerca de las competencias educativas, en sus dos categorías; y la tabla 8 relativa a los componentes del sentido espacial en sus dos categorías. En ellas se señala ausencia o presencia en la resolución de la subcategoría analizada.

Además, se busca establecer relaciones entre las expectativas de aprendizaje y el rendimiento de los estudiantes. Para presentar los resultados obtenidos por los 122 estudiantes en las tareas de PISA y de aula, se consideran las respuestas correctas y las calificaciones alcanzadas.

5.1. EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE EN TAREAS DE PISA Y DE AULA

En este apartado se establecen relaciones entre las tareas de PISA y de aula, se siguen los dos niveles que se presentan en los resultados, las competencias educativas y los componentes del sentido espacial.

5.1.1. Competencias educativas

En la tabla 7 se encuentra la información sintetizada acerca de las competencias educativas como procesos cognitivos y competencias matemáticas en las tareas de PISA y de aula.

5.1.1.1. Competencias matemáticas

Tareas de PISA. Todas las tareas requieren dos de las competencias matemáticas: comunicar y representar. Comunicar, refiere a comprender el enunciado, el significado de la tarea indicada, por ejemplo, cuando el estudiante señala las cuatro longitudes en el apartamento, o cuando plantea la suma de tres segmentos para encontrar la longitud de la parte externa del mostrador, entre otros. Mientras que representar, refiere a traducir las representaciones brindadas en un mapa, por ejemplo, traducir que un conjunto está compuesto por un círculo que contiene un cuadrado y cuatro pequeños rectángulos representa una mesa y cuatro sillas, situarlo en la zona de mesas según las condiciones establecidas, e identificar el área que ocupa cada conjunto en la zona de mesas.

Otras dos competencias son mayormente requeridas en las tareas de PISA, usar herramientas matemáticas y matematizar, en ese orden. La herramienta que se usa es la calculadora a la hora de los cálculos que se necesitan realizar en todas las actividades, menos en el garaje y en la compra de un apartamento. Mientras que matematizar las situaciones de la vida real significa, por ejemplo, interpretar el mundo real ofrecido en la vista frontal y lateral del tejado y construir un nuevo modelo matemático en relación con el problema original de calcular la superficie total del tejado.

Entre seis y ocho tareas, requieren también utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas, idear estrategias para la resolución de problemas, y razonar y argumentar.

Tareas de aula. Todas las tareas de aula requieren cuatro de las competencias: comunicar, representar, razonar y argumentar, y utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas. Comunicar, refiere a presentar resultados, por ejemplo, escribir en palabras del estudiante una proposición dada en lenguaje simbólico. Representar, refiere a decodificar la información dada en el mapa, por ejemplo, interpretar un punto como intersección de una mediatriz y una bisectriz, o asociar que dos semirrectas son los lados de un ángulo. Razonar y argumentar, implica vincular elementos para inferir y justificar declaraciones, por ejemplo, las actividades A2 y A4 que requieren justificar las proposiciones indicando si son verdaderas o falsas a partir de la información brindada en el enunciado. Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas, requiere comprender y utilizar proposiciones en lenguaje simbólico basadas en definiciones, por ejemplo, $d(A, G) < d(G, C)$; $d(H, A) > 4 > d(A, G)$; $A = \{P \in \pi/d(P, \overline{BA}) \leq d(P, \overline{BC})\}$.

Solo cuatro tareas requieren usar las herramientas matemáticas de regla y compás, mientras que no es requerida en la solución de las tareas de aula la competencia de idear estrategias para la resolución.

Las semejanzas entre las tareas de PISA y de aula se manifiestan en que todas las tareas requieren de dos competencias: comunicar y representar. Las diferencias se establecen en que las tareas PISA requieren idear estrategias para la resolución y las de aula no, todas las tareas de aula demandan razonar y argumentar, y utilizar lenguaje simbólico mientras que las tareas de PISA que las exigen son solo seis u ocho.

5.1.1.2. Procesos cognitivos

Tareas de PISA. Todas las tareas requieren en su resolución del proceso cognitivo comprender, que implica interpretar el significado de las consignas escritas en palabras y en gráficos del enunciado, los ejemplos corresponden a los indicados en las competencias, comunicar y representar antes descritas.

Otros procesos cognitivos requeridos en nueve o diez de las tareas de PISA son recordar, aplicar y evaluar. Se demanda recordar el teorema de Pitágoras, el cálculo de áreas de polígonos, la longitud de la circunferencia o el ángulo llano entre otros. Es necesario aplicar, por ejemplo, la suma de segmentos para obtener la longitud total, la suma o resta de áreas para obtener la solicitada, el teorema de Pitágoras para obtener la longitud de un segmento, y la composición o descomposición de figuras. Algunas tareas exigen evaluar si el resultado obtenido es coherente con la situación planteada.

Menos de la mitad de las tareas requieren analizar, por ejemplo, mediante la determinación de la superficie total del suelo de la tienda, excluidos el área de servicio y mostrador, las condiciones que se establecen para ubicar los conjuntos de mesas en el área de mesas, o los datos de la vista frontal y lateral del garaje para identificar largo y ancho del tejado, entre otros. Solo G2 requiere crear el rectángulo que representa el tejado que no está dado en el enunciado a partir de sus dimensiones.

Tareas de aula. Todas las tareas exigen en su resolución cuatro procesos cognitivos: recordar, comprender, analizar y evaluar. Recordar, implica recuperar conocimientos relevantes, por ejemplo, la definición de circunferencia, mediatriz, bisectriz y unión de paralelas como lugares geométricos. Comprender, supone interpretar el significado del enunciado: en las consignas escritas, los ejemplos se corresponden con los indicados en la competencia de comunicar antes

descrita; y en los gráficos, por ejemplo, un punto exterior o interior a una circunferencia requiere inferir que la distancia con el centro es mayor o menor que el radio. Analizar, implica desintegrar en partes una proposición, por ejemplo, para poder afirmar si es verdadera o falsa. Evaluar, supone emitir juicios, por ejemplo, integrar las partes de la proposición y afirmar su verdad o falsedad.

Cuatro de las tareas de aula requieren crear, armar un producto, como por ejemplo, la A3 y A6, donde se debe representar gráficamente una proposición dada en lenguaje simbólico. Mientras que aplicar es requerida en solo dos tareas, A1 y A4, e implica el trazado de los cuatro lugares geométricos: circunferencia, mediatriz, bisectriz y unión de paralelas.

El proceso cognitivo exigido en todas las tareas tanto de PISA como de aula es comprender que se vincula directamente con las dos competencias en común, comunicar y representar. Se diferencian en el proceso cognitivo de crear, las tareas de aula intersecan lugares geométricos para determinar los puntos que cumplen con algunas condiciones, mientras que G2 es la única tarea de PISA que lo requiere. Las tareas de PISA necesitan aplicar procedimientos matemáticos para resolver las situaciones de la vida real, a diferencia de las tareas de aula, que parten de situaciones matemáticas y solo dos de ellas, A1 y A4, requieren ejecutar un procedimiento conocido como es la construcción de lugares geométricos. Otra diferencia es que las tareas de aula no requieren de idear estrategias para la resolución de problemas.

Tabla 7. Competencias educativas en tareas de PISA y de aula

Competencias educativas		H 1	H 2	H 3	N 1	N 2	G 1	G 2	P G1	P G2	P G3	C A	V P	C D	A 1	A 2	A 3	A 4	A 5	A 6
Competencias matemáticas	Comunicar	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Matematizar	x	x	x	x	x		x	x	x	x		x							
	Representar	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Razonar y argumentar					x	x		x		x	x		x	x	x	x	x	x	x
	Idear estrategias para la resolución de problemas	x	x	x	x			x		x			x							
	Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas	x	x		x	x		x	x	x			x		x	x	x	x	x	x
	Usar herramientas matemáticas	x	x	x	x	x		x	x	x	x		x	x	x		x	x		x
Procesos cognitivos	Recordar	x	x	x		x		x	x	x		x	x		x	x	x	x	x	x
	Comprender	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Aplicar	x	x			x		x	x	x	x		x	x	x			x		
	Analizar			x	x	x		x					x	x		x	x	x	x	x
	Evaluar	x	x	x	x		x	x	x	x	x		x		x	x	x	x	x	x
	Crear							x							x		x	x		x

5.1.2. Componentes del sentido espacial

En la tabla 8 se encuentra la información sintetizada acerca de los componentes del sentido espacial, manejo de conceptos geométricos y habilidades de visualización, en las tareas de PISA y de aula.

5.1.2.1. Manejo de conceptos geométricos

Tareas de PISA. Todas las tareas requieren en su resolución conocer conceptos geométricos tales como: triángulo, rectángulo, paralelogramo, trapecio, ángulo, circunferencia, distancia, medida directa e indirecta de longitud y de área entre otros.

Todas menos PG3 necesitan del empleo de las propiedades de las formas, tales como la aplicación del teorema de Pitágoras y de áreas de polígonos, la longitud como, suma o resta de longitudes, conservación de la distancia en los movimientos, composición y descomposición de áreas. A la vez, están implicadas

relaciones geométricas tales como: paralelismo entre lados y caras; perpendicularidad entre segmentos, lados consecutivos y caras; distancia entre puntos de un segmento horizontal, vertical u oblicuo y entre objetos; amplitud de un sector de circunferencia, ángulos completos y obtusos, entre otras.

La mayoría, 10 de las 13 preguntas, requieren: la ubicación y los movimientos en todas salvo G2, VP y CD; y la orientación en todas, salvo N2, PG1 y PG3.

Tareas de aula. Todas las tareas requieren en su resolución conocer conceptos geométricos tales como: circunferencia, mediatriz, bisectriz y unión de paralelas como lugar geométrico; distancia y medida, semiplano y ángulo entre otros. A la vez, requieren del empleo de las propiedades de las formas tales como: puntos interiores, exteriores y en la circunferencia están a una distancia del centro menor, mayor o igual que el radio; puntos de la bisectriz de un ángulo equidistan de los lados del ángulo; puntos de la mediatriz equidistan de los extremos del segmento; y puntos de la unión de paralelas que distan una distancia fija de una recta.

En todas las tareas están implicadas también las relaciones geométricas, tales como: la distancia del centro de la circunferencia a un punto interior es menor que a un punto exterior; dos puntos como intersección de una recta y una circunferencia; un punto como intersección de una mediatriz y una bisectriz; los puntos que cumplen con dos condiciones: estar una distancia constante de un punto fijo y de una recta, entre otras. Asimismo, son requeridas la ubicación y los movimientos, por ejemplo, para la posición de puntos en relación con una circunferencia, (interiores, exteriores o pertenecientes a ella); que todos los puntos que equidistan de dos puntos fijos están alineados; o que todos los puntos que equidistan de los lados de un ángulo están alineados.

Todas las tareas, de PISA y de aula, requieren conocer conceptos geométricos. La mayoría hacen uso de las propiedades, de las relaciones geométricas, de la ubicación y los movimientos para obtener la solución. En menor medida se hace uso de la orientación en las tareas de PISA y establece la diferencia con las tareas de aula que solo una la requiere.

5.1.2.2. Habilidades de visualización

Tareas de PISA. Las habilidades visuales más requeridas para resolver las tareas de PISA son cinco: percepción de las relaciones espaciales, conservación de la percepción, percepción de la posición en el espacio, percepción figura-contexto y, discriminación visual, aparecen entre ocho y once de las preguntas para su

resolución. Mientras que la coordinación ojo-motor y la memoria visual son utilizadas en tres y cuatro preguntas respectivamente, H1, H2, H3 y CA.

Se puede afirmar que no hay una habilidad de visualización que sea necesaria para la resolución de todas las tareas. Asimismo, la coordinación ojo-motor y memoria visual son poco requeridas, aparecen en una o dos tareas, en la heladería y en la compra de un apartamento.

Tareas de aula. Todas las tareas requieren en su resolución la percepción de las relaciones espaciales, por ejemplo, percibir la igualdad de distancias, los puntos que cumplen con equidistar de los extremos de un segmento y pertenecer a la circunferencia; o puntos que cumplen con estar 3 cm de un punto fijo y 2 cm de una recta.

Hay dos habilidades visuales mayormente requeridas para resolver las tareas de aula: la coordinación ojo-motor y discriminación visual, aparecen en cuatro y cinco de las tareas. La percepción figura-contexto, conservación de la percepción y percepción de la posición en el espacio son utilizadas en una y dos de las tareas, mientras que la memoria visual no es requerida.

Se puede afirmar que hay cuatro aspectos del manejo de conceptos geométricos: conocer conceptos; las propiedades de las formas; las relaciones geométricas, y la ubicación y los movimientos; y una habilidad de visualización, percepción de las relaciones espaciales, que son requeridas para la resolución de todas las tareas, de PISA y evaluaciones de aula. Se diferencian en que las tareas de PISA precisan de la conservación de la percepción, la percepción de la posición en el espacio y en menor medida la percepción figura-contexto; y las tareas de aula requieren de la coordinación ojo-motor y discriminación visual, necesarias para construir e identificar, en particular cuando se trabaja con regla y compás. Las tareas de PISA utilizan la memoria visual en la resolución, no así las tareas de aula.

Tabla 8. Componentes del sentido espacial en las tareas de PISA y de aula

Componentes del sentido espacial		H1	H2	H3	N1	N2	G1	G2	P	G1	P	G2	P	CA	VP	CD	A1	A2	A3	A4	A5	A6
Manejo de conceptos geométricos	Conceptos	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Propiedades de las formas	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Relaciones geométricas	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Ubicación y movimientos	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Habilidades de visualización	Orientación	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Coordinación ojo-motor	x	x	x													x		x	x		x
	Percepción figura-contexto	x	x	x		x	x	x						x	x	x	x		x			
	Conservación de la percepción	x	x	x		x	x	x	x	x				x	x	x	x					
	Percepción de la posición en el espacio	x		x		x	x	x	x	x	x			x		x	x	x			x	
	Percepción de las relaciones espaciales	x	x	x	x	x	x	x			x			x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Discriminación visual	x	x	x			x	x		x				x	x		x		x	x	x	x
	Memoria visual	x	x	x										x								

5.2. RENDIMIENTO DE LOS ESTUDIANTES EN LAS TAREAS DE PISA Y DE AULA

Tareas de PISA. La tabla 6 contiene la información sintetizada acerca de las tareas bien resueltas. Permite afirmar que menos del 70 % de los estudiantes alcanza a realizar correctamente hasta 6 de las 13 tareas de PISA, que 24 % logra realizar entre 7 y 9 tareas con acierto y que tan solo 6 % logra realizar más de 10 tareas con acierto. Solo un estudiante logra responder las 13 con acierto. Las tareas respondidas con acierto por más del 83 % de los estudiantes son dos: G1 y CD; entre 50 y 64 % de los estudiantes respondieron con acierto a: CA, PG1 y PG3, y N1. Mientras que menos del 5 % respondieron con acierto a PG2 y VP.

Tareas de aula. La tabla 5 contiene la información sintetizada acerca de las calificaciones obtenidas por los estudiantes al realizar la prueba de geometría propuestas por los docentes en el aula. Permite afirmar que 23 % de los estudiantes alcanza a realizar menos de la mitad de la prueba con acierto, y que 34 % logra resolver con acierto más de las $\frac{3}{4}$ partes de la prueba, mientras que 43 % logra resolver con acierto más de la mitad y menos de las $\frac{3}{4}$ partes de la prueba.

Para el análisis comparativo en el rendimiento se examina el grupo alto-alto, estudiantes que responden en forma correcta más de nueve tareas de PISA y con calificación mayor a 8 en la evaluación de los docentes, y el grupo bajo-bajo, estudiantes que obtienen hasta seis respuestas correctas en las tareas de PISA y con calificación entre 1 y 4 en la evaluación de los docentes. En estos grupos se encuentran los estudiantes que han tenido alto o bajo rendimiento en las dos evaluaciones.

Grupo alto-alto. De los ocho estudiantes que logran resolver con acierto más de 9 tareas de PISA, seis de ellos obtienen una calificación mayor a 8, los otros dos tienen un 7. Mientras que de los 42 estudiantes que obtiene una calificación mayor a 8, pertenecientes al grupo de rendimiento alto en las tareas de aula, 23 de ellos (54 %) logran responder correctamente menos de la mitad, menos de 7, de las tareas de PISA, por lo que pertenecen al grupo bajo de las tareas de PISA (tabla 9).

Tabla 9. Grupo alto-alto

		Tareas de aula			Total
		Bajo	Medio	Alto	
Tareas de PISA	Bajo			23	8
	Medio			13	
	Alto	-	2	6	
	Total			42	

Grupo bajo-bajo. De los 85 estudiantes que responden con acierto menos de 7 tareas de PISA, como ya se dijo, 23 obtiene una calificación mayor a 8 y 24 obtienen una calificación menor a 5. Mientras que de los 28 estudiantes pertenecientes al grupo de rendimiento bajo en las tareas de aula, con calificación menor a 5, 4 de ellos logran responder correctamente 7 tareas de PISA, pertenecen al grupo medio, y todos los demás pertenecen al grupo bajo de las tareas de PISA (tabla 10).

Tabla 10. Grupo bajo-bajo

		Tareas de aula			Total
		Bajo	Medio	Alto	
Tareas de PISA	Bajo	24	38	23	85
	Medio	4			
	Alto	-			
	Total	28			

Se puede afirmar que la mayoría de los estudiantes que logran un número alto de respuestas correctas en las tareas de PISA, logran también un buen rendimiento en las pruebas de evaluación propuestas por los docentes en el aula. Solo unos pocos de los que logran buen rendimiento en las tareas de aula obtienen un número alto de respuestas correctas en PISA. Los estudiantes que obtienen bajos resultados en las pruebas de aula logran resolver con acierto muy pocas tareas de PISA. Además, los estudiantes con muy pocas tareas de PISA resueltas con acierto logran un rendimiento variado en las tareas de aula.

6. CONCLUSIONES

Este trabajo hace aportes en relación con las demandas de investigación. Se contribuye en la mejora de la coherencia entre la evaluación a gran escala y en el aula. Por un lado, se ha conseguido categorizar y clasificar las expectativas de aprendizaje como competencias educativas y componentes del sentido espacial en las tareas de evaluación de PISA 2012 y de docentes en el aula. Por otro, se han establecido relaciones entre los resultados de aprendizaje encontrados en los estudiantes al resolver las tareas de evaluación en geometría.

Se han establecido unos indicadores de análisis que han permitido identificar las expectativas de aprendizaje a través de las competencias matemáticas y los procesos cognitivos, las habilidades de visualización y el manejo de conceptos geométricos desarrollados por los estudiantes que permiten una mejora en la configuración de las condiciones de aprendizaje (De Long *et al.*, 2005). Se ha conseguido operativizar el análisis de las competencias matemáticas y los procesos cognitivos, las habilidades de visualización y el manejo de conceptos geométricos, lo que permite obtener información más precisa en relación con las capacidades espaciales, el desarrollo del conocimiento geométrico y su relación con la resolución de problemas para, entre otros, tomar decisiones pedagógico didácticas que favorezcan la práctica docente y la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje (Jones y Tzekaki, 2016; Ortiz y Sandoval, 2018; Rastuti *et al.*, 2017). Los indicadores de análisis y la identificación de las expectativas de aprendizaje permiten establecer relaciones entre el rendimiento en la evaluación de los conocimientos geométricos en el aula y en las tareas de PISA que favorece la coherencia entre ambas evaluaciones y puede resultar de ayuda para éxito de los aprendizajes de los estudiantes (Suurtamm *et al.*, 2016). El alto rendimiento en las tareas de PISA ha garantizado un alto resultado en las tareas de aula, pero no al revés, ya que el buen rendimiento en las tareas de aula no ha implicado un alto resultado en las tareas de PISA. El bajo rendimiento en el aula ha conllevado bajo resultado en PISA.

De acuerdo con los resultados, una semejanza en todas las tareas es que requieren de dos competencias matemáticas, comunicar y representar, directamente vinculadas con comprender, proceso cognitivo exigido también en todas ellas. Estas competencias matemáticas y proceso cognitivo se relacionan con el acceso a la información brindada y solicitada en las tareas, y a la explicitación de las respuestas que evidencian el alcance de la actividad matemática en la que el estudiante está involucrado, cuando resuelve tareas de evaluación en

geometría. Asimismo, se evidencian algunas diferencias, ya que las tareas de aula requieren para su resolución de dos competencias asociadas a la argumentación y la utilización del lenguaje simbólico, no necesarias en las tareas de PISA. De igual modo sucede con el proceso cognitivo de crear, exigido en las tareas de aula y no así en las tareas de PISA (Niss y Højgaard, 2011; OECD, 2017). De los resultados se desprende que, tanto las tareas de PISA como las de aula buscan evaluar el aprendizaje del manejo de conceptos geométricos en todos sus aspectos, salvo en la orientación que establece la diferencia de las tareas PISA sobre las de aula (Flores *et al.*, 2015).

En relación con el sentido espacial, en los resultados se determina que las habilidades de visualización manifiestan mayores diferencias que semejanzas entre las tareas de PISA y las de aula. Todas las tareas requieren de la percepción de las relaciones espaciales. Sin embargo, las diferencias se establecen porque las tareas de PISA precisan de la conservación de la percepción y la percepción de la posición en el espacio, mientras que las tareas de aula requieren de la coordinación ojo-motor y discriminación visual.

Se puede afirmar que en todas las tareas son mayores las demandas del manejo de conceptos geométricos que de las habilidades de visualización. La evaluación de los docentes busca desarrollar los conceptos, relaciones geométricas, la ubicación, los movimientos, además de las habilidades de la percepción de las relaciones espaciales y de la posición en el espacio, si bien no es posible establecer el grado de desarrollo real en los estudiantes.

La conducta observable a través de la realización de las tareas relativas a un tema específico o al conocimiento geométrico de una etapa (Lupiáñez, 2009), permite inferir en esta investigación que, obtener buenos resultados en las tareas de PISA parece garantizar buen rendimiento en el curso, pero no al revés en tanto que hubo altos rendimientos en las tareas de aula con bajos resultados en PISA. Asimismo, obtener bajo rendimiento en el curso, en general implica tener bajos resultados en las tareas de PISA que miden los contenidos de una etapa, pero no sucede al revés en tanto que hubo bajos resultados en PISA con muy buen rendimiento en las pruebas de aula (Rico y Lupiáñez, 2008).

Se puede concluir que los buenos resultados en PISA y el buen rendimiento en el aula implican, mayor demanda del manejo de conceptos geométricos que de las habilidades de visualización; y el desarrollo de las competencias matemáticas, comunicar y representar, así como del proceso cognitivo de aprender (Niss y Højgaard, 2011).

Algunas limitaciones que se identifican en el estudio: la muestra de tareas, solo las liberadas por PISA sin poder acceder a las tareas interactivas; y la muestra de estudiantes, por estar centrado en una sola institución educativa. Para que los resultados tengan mayor sustento se podría extender la investigación a más estudiantes que abarquen realidades diversas, incluir los procesos de enseñanza y los objetivos específicos de los docentes que aporten información sobre posibles causas de que el estudiante promedio uruguayo alcance el nivel uno de desempeño, por debajo del nivel básico de competencia educativa definido por PISA. Sin embargo, se reconoce como aporte la categorización en las competencias educativas, en el sentido espacial y el análisis que permite trabajar con muestras mayores, con respuestas de estudiantes y comparar con otros países para brindar elementos objetivos en diseño de tareas de aula y estandarizadas, diseño de unidades para la formación del profesorado y para los desarrolladores de currículos.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo forma parte de una de las líneas del proyecto PID2020-117395RB-I00 financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación. Además, obtiene financiación de la ANEP. CES. Exp.2023-25-3-008641. Resol. N°1310.

REFERENCIAS

- ANEP. (2023). *Uruguay en PISA 2022. Volumen 4. Logros en matemática: marco conceptual, resultados y contexto curricular*. ANEP.
- CES. (2010). *Programa de matemática primer año. Bachillerato, reformulación 2006, ajuste 2010*. ANEP. <https://www.ces.edu.uy/index.php/propuesta-educativa/20207>
- Chen, J., Reys, B., y Reys, R. (2009). Analysis of the learning expectations related to grade 1-8 measurement in some countries. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 7, 1013-1031. <https://doi.org/10.1007/s10763-008-9148-5>
- Del Grande, J. (1990). Spatial sense. En NCTM, *The arithmetic teacher*, 37(6), 14-20. <https://doi.org/10.5951/AT.37.6.0014>

- De Long, M., Winter, D., y Yackel, C. (2005). Student learning objectives and mathematics teaching. *PRIMUS*, 15(3), 226-258. <https://doi.org/10.1080/10511970508984119>
- Diezmann, C. y Lowrie, T. (2009). Primary students' spatial visualization and spatial orientation: an evidence base for instruction. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis, (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 2, (pp. 417-424). PME.
- Elvas, I., Ramírez, R. y Flores, P. (2022). Habilidades de visualización en las evaluaciones escritas en secundaria. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 249-257). SEIEM.
- Flores, P., Ramírez, R. y del Río, A. (2015). Sentido Espacial. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* (pp. 127-146). Pirámide.
- Flores, P. y Lupiáñez, J. L. (2016). Expectativas de aprendizaje escolar. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria*, (pp. 125-140). Pirámide.
- Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. En L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol.1 (pp. 3-19). PME.
- Gutiérrez, A. (2006): La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. En P. Flores, F. Ruiz y M. De la Fuente (Eds.), *Geometría para el siglo XXI* (pp. 13-58). Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- INEE (s.f). *PISA 2012. Items liberados*. Recuperado el 31 de agosto de 2025, de <https://www.educacionfpydeportes.gob.es/inee/evaluaciones-internacionales/pisa/pisa-2012.html>
- Jones, K., y Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. En Á. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp.109-149). Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_4
- Krathwohl, D. (2002). A revision of Bloom's taxonomy: An overview. *Theory into practice*, 41 (4), 212 – 254. https://doi.org/10.1207/s15430421tip4104_2
- López, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *XXI Revista de Educación*, 4, 167-179.
- Lupiáñez, J. L. (2009). Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria (Tesis doctoral). Universidad de Granada. <http://hdl.handle.net/10481/2726>

- Martínez, F. (2015). El rol de las expectativas docentes en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática (Tesis doctoral). Universidad de Chile.
- Mizzi, A. (2017). *The Relationship between Language and Spatial Ability*. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-20632-1>
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.
- Niss, M. y Højgaard, T. (Eds.) (2011). *Competencies and mathematical learning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. Roskilde University, Department of science, systems and models, IMFUFA.
- Novitasari, D., Nasrullah, A., Triutami, T.W., Apsari, R.A. y Silviana, D. (2021). High level of visual-spatial intelligence's students in solving PISA geometry problems. *Journal of Physics: Conference Series* 895 (1), 1-9. IOP Publishing. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1778/1/012003>
- OCDE (2017). *PISA 2015. Assessment and analytical framework: science, reading, mathematical, financial literacy and collaborative problem solving*. OCDE Publishing.
- Ortiz, A. y Sandoval, I. (2018). Representaciones de cuerpos geométricos: una experiencia con profesores de primaria de Latinoamérica. En L. J. Rodríguez-Muñoz, L. Muñoz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 427-436). SEIEM.
- Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En Á. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future*, (pp.205-236). Sense Publishers. https://doi.org/10.1163/9789087901127_009
- Riastuti, N., Mardiyana, M. y Pramudya, I. (2017). Students' errors in geometry viewed from spatial intelligence. *Journal of Physics: Conference Series* 895 (1), 1-6. IOP Publishing. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/895/1/012029>
- Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Alianza.
- Rychen, D.S. (2008). *Investigación internacional sobre competencias básicas para la vida*. USAID, Programa estándares e investigación educativa.
- Shimizu, Y., Vithal, R., Arzanello, F., Ruiz, A., Cuoco, A., Bosch, M., Gholam, S., Morony, W. y Zhu, Y. (2018). Discussion document. En Y. Shimizu y R. Vithal (Eds.), *Proceedings the 24th ICMI study* (pp. 571-588). University of Tsukuba.
- Sullivan, P., Clarke, D., Clarke, B. y O'Shea, H. (2010). Exploring the relationship between task, teacher actions, and student learning. *PNA*, 4(4), 133-142. <https://doi.org/10.30827/pna.v4i4.6163>

- Suurtamm, C., Thompson, D. R., Kim, R. Y., Moreno, L. D., Sayac, N., Schukajlow, S., Silver, E., Ufer, S. y Vos, P. (2016). *Assessment in mathematics education: large-scale assessment and classroom assessment* (pp. 27-33). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-32394-7>
- Stylianou, D. (2001). On the reluctance to visualize in mathematics: Is the picture changing? En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp.225-232). PME.

Autor de correspondencia

María Isabel Elvas Fernández.

Dirección postal: Durazno 1125 Apto 801. Barrio Sur. Montevideo. Uruguay.
Código Postal: 11100
isabelelvas@correo.ugr.es

ANEXOS

Los anexos correspondientes a este manuscrito, proporcionados por los autores, pueden consultarse en los materiales complementarios del número 37(3) de *Educación Matemática*, disponibles en el sitio web de la revista <https://www.revista-educacion-matematica.org.mx/revista/>