 https://doi.org/10.24844/EM3703.09

El trapecio sin fórmula. Situación didáctica para profesores en formación

The trapezium with no formula. Didactical situation for pre-service teachers

Ismael Cuevas-Morales,[1] Apolo Castañeda,[2] Santiago Palmas[3]

Resumen: Este artículo reporta parte de los resultados de una investigación desarrollada con estudiantes de la Licenciatura en Educación Primaria, centrada en los procesos de adaptación independiente dentro del marco de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD). El estudio se enfocó en el diseño y organización de una situación didáctica orientada a favorecer la autonomía del profesorado en formación, así como en el análisis de las interacciones entre este y el milieu diseñado. La metodología incluyó un análisis a priori de la situación, fundamentado en condiciones derivadas de la TSD, y un análisis a posteriori de las estrategias de resolución desplegadas por los participantes. Entre los hallazgos sobresale el tránsito de los dibujos a esquemas interpretados como "pruebas", en el sentido de Eschenburg (2022), como punto crucial en la evolución de la situación. Asimismo, se concluye que las condiciones establecidas en el análisis a priori desde la TSD fueron cruciales para el diseño de la situación didáctica, pues orientaron las posibilidades de adaptación independiente y enmarcaron la emergencia de estrategias de resolución.

Fecha de recepción: 16 de junio de 2023. **Fecha de aceptación:** 9 de agosto de 2025.

[1] Benemérita Escuela Normal Veracruzana "Enrique C. Rébsamen", México, ismaelbenv@gmail.com

[2] Instituto Politécnico Nacional, CICATA Legaria, Programa de Matemática Educativa, México, acastane@ipn.mx, https://orcid.org/0000-0002-7284-8081.

[3] Departamento de Estudios Culturales, Universidad Autónoma Metropolitana, México, s.palmas@correo.ler.uam.mx, https://orcid.org/0000-0003-1175-5938.

Palabras clave: *Teoría de Situaciones Didácticas, formación docente, geometría, adaptación independiente, representaciones matemáticas.*

Abstract: This article reports part of the results of a study conducted with students of the Primary Education Degree, focused on the processes of independent adaptation within the framework of the Theory of Didactic Situations (TDS). The study focused on the design and organization of a didactic situation aimed at fostering the autonomy of preservice teachers, as well as on the analysis of the interactions between them and the designed milieu. The methodology included an a priori analysis of the situation, based on conditions derived from the TDS, and an a posteriori analysis of the resolution strategies deployed by the participants. Among the findings, the transition from drawings to schemes interpreted as "proofs" in the sense of Eschenburg (2022), stands out as a crucial point in the evolution of the situation. Likewise, it is concluded that the conditions established in the a priori analysis from the TDS were crucial for the design of the didactic situation, since they guided the possibilities of independent adaptation and framed the emergence of resolution strategies.

Keywords: *Theory of Didactic Situations, teacher education, geometry, independent adaptation, mathematical representations.*

INTRODUCCIÓN

La enseñanza y el aprendizaje de la geometría pueden contribuir al desarrollo del pensamiento lógico, la percepción espacial, el razonamiento deductivo y la resolución de problemas, entre otras habilidades fundamentales (García y López, 2008). Además, dado que conceptos matemáticos de distintas ramas pueden representarse y explicarse mediante recursos geométricos, la geometría adquiere un lugar estratégico en la formación docente (Pasani, 2019).

No obstante, diversas investigaciones han mostrado que los futuros docentes tienden a privilegiar enfoques procedimentales en la enseñanza de la geometría, lo que se relaciona con mayores niveles de ansiedad matemática en comparación con quienes perciben la geometría como una oportunidad para mejorar la capacidad de pensar y razonar (Gutiérrez-Rubio *et al.*, 2018). En particular, se han identificado problemáticas persistentes: dificultades para reconocer figuras en orientaciones no convencionales (Clements y Battista, 1992), errores de clasificación al relacionar diferentes conjuntos de figuras, como no reconocer que el cuadrado pertenece al conjunto de los rectángulos (Hershkowitz, 1990), escasa familiaridad con cuerpos geométricos y sus representaciones (Gutiérrez, 1996), así como limitaciones para establecer vínculos entre distintas representaciones semióticas (Duval, 2006). Esto es un aspecto especialmente crítico ya que el conocimiento disciplinar insuficiente, que lleva a algunos futuros docentes a evitar los temas que no dominan, restringiendo así las oportunidades de aprendizaje de sus alumnos (Barrantes y Blanco, 2004).

Desde esta perspectiva, se vuelve necesario generar experiencias en las que el profesorado en formación construya sus propias relaciones geométricas y explore las de sus pares, de manera que pueda establecer vínculos significativos con los objetos matemáticos presentes en su práctica profesional. Es en este marco que se sitúa la propuesta de la situación didáctica presentada en este artículo, cuyo propósito es favorecer procesos de adaptación independiente y promover la autonomía de los profesores en formación en el análisis de un problema geométrico.

MARCO DE REFERENCIA

Realidad, ideas y conceptos matemáticos

Eschenburg (2022), dice que originalmente la geometría es el estudio del espacio y forma, afirmando que las ideas y lenguaje desarrollados en esta área pueden ser transferidos y aplicados más allá del espacio visible a otras áreas del conocimiento. Concibe a la geometría como una cuidadosa reflexión matemática, enfocada al conjunto de ideas derivadas de la percepción espacial. Desde su perspectiva, la intuición geométrica se refiere a percibir las formas espaciales presentes en la realidad y sus relaciones explícitas e implícitas. Las formas, sin embargo, no se toman simplemente de la realidad, también son idealizadas y transformadas en sentido platónico. De esta manera en la geometría euclidiana, la relación entre idea y formalización matemática, se realiza a través de una definición que debe representar puntualmente la idea en palabras (figura 1).

Figura 1. Relación entre realidad, idea y formalización matemática. Imagen tomada de Eschenburg (2022, p. 2).

La "idea" se cimienta entonces en un cierto marco conceptual, volviéndose susceptible de un razonamiento posterior a través de la lógica. Este proceso tiene una naturaleza compleja, ya que, a pesar de tener familiaridad con la “idea”, la cimentación conceptual es necesaria para asegurar la construcción de conocimiento, dado que las apariencias por sí solas pueden ser engañosas.

Durante la exploración de algunas "ideas" geométricas existen diversos escenarios donde la intuición no es suficiente para visibilizar algunas relaciones, por lo que la necesidad de una definición precisa cobra relevancia. Durante esta construcción, los trazos pueden ayudar a mostrar nuevas perspectivas de un problema o concepto, ayudando a hacer evidentes relaciones que puedan eventualmente aceptarse como obvias. Eschenburg (2022) llama "prueba", a esos trazos hechos en la realidad (izquierda de la figura 1) que tratan de esquematizar estructuras ideales, en los casos más simples, con ayuda de algunas líneas auxiliares. Ejemplo de lo anterior puede ser la determinación de la suma de los ángulos internos de un triángulo al añadir líneas paralelas (figura 2).

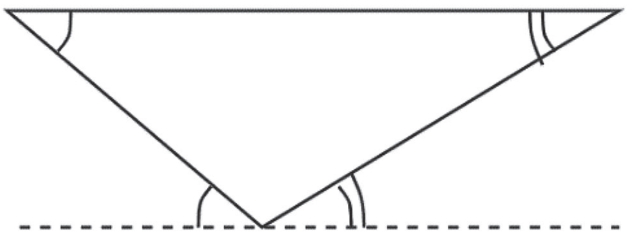


Figura 2. Determinación de la medida de los ángulos de un triángulo mediante paralelas. Imagen tomada de Eschenburg (2022, p. 3).

Así, el proceso de tránsito de "idea" a concepto matemático con ayuda de "pruebas" se puede considerar como formalización. En ese sentido, Angulo *et al.* (2020) señalan que un pensamiento donde predominan las imágenes da paso a la construcción de conceptos empíricos basados en características observables del objeto matemático. Con base en estas construcciones, mediante un razonamiento lógico y abstracto, se realizan generalizaciones a través de las cuales los conceptos se pueden definir formalmente a partir de la identificación de sus rasgos esenciales. En contraparte, una definición memorizada sin que exista una idea o concepto matemático en el sentido antes discutido, podría ser más difícil de manipular mentalmente. Por lo que un entendimiento intuitivo es un punto de partida para la construcción de un concepto geométrico que pueda ser posteriormente manipulado.

Teoría de situaciones didácticas (TSD)

Por lo anterior, organizar intervenciones que puedan fomentar procesos de construcción de conceptos geométricos a partir de "ideas" en escuelas formadoras de docentes se considera relevante. Para ello, basándose en la TSD, se organizó una intervención de tal manera que fue posible observar cómo los profesores en formación explicitan "ideas" que puedan transitar hacia un estatus de conceptualización a través de "pruebas" durante diferentes interacciones. Se consideró la TSD ya que Brousseau (2007) señala que una situación es “un modelo de interacción entre un sujeto y un medio determinado” (p.17), en la que, mediante la interacción, los sujetos buscan alcanzar un cierto estado favorable en el *milieu* (medio), para lo cual, su principal recurso son una serie de decisiones que dependen de un determinado conocimiento. Ese estado favorable, en este documento, se interpreta como la construcción de un concepto geométrico a partir de interacciones basadas en "ideas" que puedan ser manipuladas de manera cada vez más abstracta, por ejemplo, a través de "pruebas".

Por ello, la organización de la intervención se propone a través de la distinción propuesta por la TSD en tres tipos particulares de situación. Esta distinción depende de la interacción de los sujetos con el *milieu* y la forma en la que suelen manifestar (los sujetos) los conocimientos: la *situación de acción* incluye intercambios de información sin lenguaje o codificación aparente, estas interacciones suelen reflejarse como acciones y decisiones individuales; La *situación de formulación*, hace referencia a intercambios de información codificadas en algún lenguaje, se suele observar estas interacciones como mensajes; la *situación de validación* hace referencia a los intercambios de juicios, los cuales se pueden observar en opiniones que pueden articular múltiples enunciados y que juegan el papel de hipótesis (Brousseau, 2007). Con base en la tipificación anterior y respecto a una dimensión cognitiva, Artigue *et al.* (2014), sugieren distinguir dos tipos de procesos: la adaptación independiente y la aculturación. La adaptación independiente se acota al papel del medio en una situación a-didáctica, mientras que la aculturación, observa el papel de las interacciones bajo la responsabilidad del docente en una situación didáctica.

Las nociones de situación a-didáctica y *milieu*, están ligadas a la visión del aprendizaje como proceso de adaptación y la intención de optimizar dichos procesos. Es decir, elucidar o crear situaciones para que el conocimiento matemático objetivo emerja de la interacción entre los estudiantes y el *milieu*. Así en una situación a-didáctica, los estudiantes aceptan la responsabilidad de enfrentar el problema y el docente se restringe de interferir o sugerir el conocimiento objetivo haciendo que el proceso de adaptación sea posible. En ese sentido el *milieu* es el sistema con el que los estudiantes interactúan durante una situación a-didáctica y el rol principal del docente o investigador es su organización. Además de la situación a-didáctica, la TSD integra interacciones bajo la responsabilidad del profesor, la devolución e institucionalización. A través de estas nociones, busca conectar los procesos de adaptación con los de aculturación. Mediante la devolución, el profesor hace que los estudiantes acepten y mantengan la responsabilidad de enfrentar la situación, gestionando las condiciones de aprendizaje sin revelar las intenciones didácticas. Durante la institucionalización, el profesor ayuda al estudiantado a conectar el conocimiento que ha sido construido derivado de la situación a-didáctica con el conocimiento cultural e institucional objetivo. Lo anterior restaura las intenciones didácticas haciendo la aculturación posible, derivando en una situación didáctica (Artigue *et al.*, 2014).

De los procesos planteados por la TSD, este artículo se centra exclusivamente en el de adaptación independiente. En consecuencia, el análisis se enfoca en el papel del docente en el diseño y organización del *milieu* con la intención de favorecer la máxima autonomía del profesorado en formación, así como en las interacciones que dichos estudiantes establecieron con ese *milieu* durante la implementación. La metodología que se presenta a continuación aborda precisamente cómo se diseñó la situación con este propósito y en qué medida las interacciones observadas reflejaron el nivel de autonomía previsto.

METODOLOGÍA

En esta sección se presenta la situación propuesta durante una sesión del curso de geometría para profesores en formación, junto con el análisis realizado antes de su implementación y el reporte de las estrategias que emergieron en el trabajo del estudiantado. La intervención, organizada según lo descrito en el apartado teórico, se llevó a cabo en una escuela normal pública formadora de docentes de educación primaria, con la participación de 26 estudiantes que cursaban el cuarto semestre de la Licenciatura en Educación Primaria. El procedimiento metodológico se estructuró en dos fases: un análisis *a priori* y un análisis *a posteriori*. El primero constituyó un espacio de estudio del *milieu*, en el que se valoró cómo los elementos del medio (enunciado del problema, recursos materiales y condiciones de trabajo) podían incidir en la adaptación independiente del profesorado en formación, identificando tanto su potencial adidáctico como sus posibles limitaciones.

El segundo análisis, de carácter *a posteriori*, se orientó a clasificar las estrategias desplegadas durante la implementación e identificar los factores que favorecieron o dificultaron la resolución. En este marco, el *milieu* estuvo conformado por el problema geométrico del trapecio, los recursos disponibles (papel, instrumentos de geometría y consignas), así como las relaciones que los estudiantes establecieron con estos. Los datos considerados incluyeron las producciones escritas del profesorado en formación, los registros de sus interacciones durante la sesión y las notas de observación tomadas por el docente-investigador. La retroalimentación emergió principalmente de la interacción entre el estudiantado y dicho *milieu*, favoreciendo la autonomía en la construcción de estrategias, mientras que la intervención docente se restringió a sostener el desarrollo de la situación sin dirigirlo hacia una solución específica.

La situación geométrica

El diseño de la situación se pensó para que el profesorado en formación de una escuela formadora de docentes en México, pusiera en juego la construcción del objeto geométrico con base en sus ideas. La intervención se propuso en el curso Geometría. Su aprendizaje y enseñanza bajo el marco del plan de estudios 2018 de la Licenciatura en Educación Primaria. De acuerdo con la tipificación de situaciones didácticas propuesta por Brousseau (2007) descrita anteriormente, se organizó la intervención de la siguiente manera:

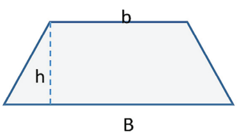
1) Situación de Acción (SA): Con el objetivo de que el profesorado en formación se familiarizara con la tarea presentada, se les pidió plantear alguna primera solución de forma individual. Se esperaba que algunos planteamientos que surgieran durante este espacio, pudieran ser puntos de discusión en las siguientes situaciones, facilitando la interacción (10-15 minutos).
2) Situación de Formulación (SF): En grupos pequeños, de 3 a 4 miembros, se les solicitó socializar sus razonamientos y primeras respuestas. Además, se les pidió que anotaran o dibujaran tanto los detalles de los procedimientos que habían utilizado (hayan sido exitosos o no) como sus primeras conclusiones. Con esto se esperaba que el profesorado en formación comunicara sus procesos resolutivos, planteando estrategias alternativas de solución. (15-25 minutos).
3) Situación de Validación (SV): Se les pidió a los equipos que esquematizaran y compartieran sus conclusiones mediante una pequeña presentación. Con ello se esperaba que el profesorado en formación pudiera organizar la información que considerara relevante durante la construcción de su resultado (hasta 5 minutos de presentación para cada equipo, más una etapa de retroalimentación de los otros equipos).

A continuación, se muestra la situación tal como se les presentó a los profesores en formación:

Trapecio isósceles

La siguiente figura es un trapecio isósceles:

Usualmente, la fórmula para calcular su área se representa con la siguiente expresión:



$$A = \frac{B + b}{2}\,h$$

Ahora, imagínate que no conoces dicha expresión, y que eres un matemático que está buscando calcular el área de uno de estos trapecios, pero tú solo conoces las fórmulas para calcular el área de triángulos, cuadrados y rectángulos.

¿Tú cómo calcularías el área de esta figura a partir de la base menor (b), base mayor (B) y altura (h)?

¿Podrías escribir tu propia fórmula para calcular el área del trapecio isósceles?

¿Tu fórmula para calcular el área del trapecio isósceles y la fórmula convencional son las mismas?

Recuerda anotar, en donde gustes, tanto el camino que seguiste al buscar la respuesta a las anteriores preguntas, como también tus respuestas.

Análisis previo a la intervención

Tal como se mencionó, se retomaron las condiciones mencionadas por Artigue *et al.* (2014), como base de este análisis. Las condiciones de análisis a-didáctico proponen una reflexión organizada en torno a la posible interacción del profesorado en formación y el *milieu*, para que pudiera ayudar a prever elementos relevantes de la intervención, a esto se le llamó análisis del potencial a-didáctico. A continuación, se enuncian las nueve condiciones con su respectiva reflexión *a priori.*

a) El conocimiento matemático objetivo, debe constituir al método de solución del problema.

En un primer momento el conocimiento matemático objetivo de esta situación está relacionado al cálculo de áreas de un trapecio isósceles. Y tiene como premisa generar un algoritmo que permita el cálculo de su área para después compararlo con el algoritmo convencional.

De manera general, el área de un trapecio es igual a la semisuma de sus bases multiplicada por su altura (Baldor, 1983). Lo anterior se puede demostrar con ayuda de la construcción mostrada en la figura 3. En esta figura se encuentra el trapecio ABCD, en donde por construcción, E es el punto donde la prolongación de $\overline{DC}$ se intersecta con la paralela de $\overline{AD}$ que pasa por el punto B. Por lo anterior $\overline{AD} \parallel \overline{BE}$.

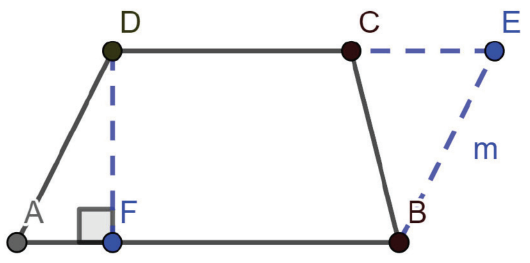


Figura 3. Trapecio con base menor prolongada.

Si $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BE}$, entonces ABED es un paralelogramo. Luego, a través de las fórmulas para el área de un paralelogramo y un triángulo podemos obtener el área del trapecio:

$$\acute{A}rea = \overline{AB} \cdot \overline{DF} - \left(\frac{\overline{EC} \cdot \overline{DF}}{2} \right)$$

Como ABED es un paralelogramo

$$\overline{EC} = \overline{AB} - \overline{DC} \text{, entonces}$$

$$\acute{A}rea = \overline{AB} \cdot \overline{DF} - \left(\frac{(\overline{AB} - \overline{DC}) \cdot \overline{DF}}{2} \right) = \overline{AB} \cdot \overline{DF} - \left(\frac{\overline{AB} \cdot \overline{DF} - \overline{DC} \cdot \overline{DF}}{2} \right) =$$

$$= \overline{AB} \cdot \overline{DF} - \frac{\overline{AB} \cdot \overline{DF}}{2} + \frac{\overline{DC} \cdot \overline{DF}}{2} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{DF}}{2} + \frac{\overline{DC} \cdot \overline{DF}}{2} = \frac{\overline{DF}(\overline{AB} + \overline{DC})}{2}$$

Entonces,

$$\acute{A}rea = \frac{\overline{DF}(\overline{AB} + \overline{DC})}{2}$$

De donde $\overline{DF} = h, \overline{AB} = B$ y $\overline{DC} = b$ en el algoritmo convencional.

Otra manera de demostrar lo anterior es dividir a un trapecio en dos triángulos (ΔAFD y ΔBGC) y un rectángulo (DCFG) como se muestra en la figura 4.

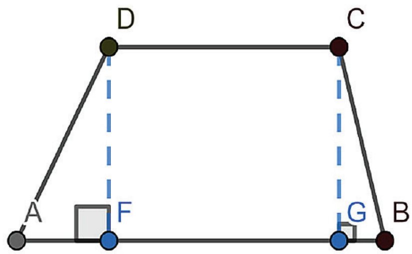


Figura 4. Trapecio dividido en regiones.

De esa manera podemos obtener el área del trapecio mediante las fórmulas de cálculo de área de triángulos y rectángulos:

$$\acute{A}rea = \frac{1}{2}\overline{AF}\cdot\overline{DF} + \overline{FG}\cdot\overline{DF} + \frac{1}{2}\overline{GB}\cdot\overline{DF} = \frac{1}{2}\overline{DF}(\overline{AF} + 2\overline{FG} + \overline{GB}) =$$

$$= \frac{1}{2}\overline{DF}(\overline{AF} + \overline{FG} + \overline{DC} + \overline{GB}) = \frac{1}{2}\overline{DF}(\overline{AB} + \overline{DC}) = \frac{\overline{DF}(\overline{AB} + \overline{DC})}{2}$$

Entonces,

$$\acute{A}rea = \frac{\overline{DF}(\overline{AB} + \overline{DC})}{2}$$

Las demostraciones anteriores aplican para todos los trapecios, incluyendo el trapecio isósceles. Sin embargo, dado que el trapecio isósceles cuenta con un eje de simetría axial, se consideró que a los profesores en formación les resultaría más fácil plantear estrategias para enfrentar la situación.

b) La consigna no debe hacer referencia de ninguna manera al conocimiento objetivo. Esta consigna determina el estado inicial, el proceso interactivo y lo buscado en el estado final.

Se puede observar que la consigna contiene el algoritmo convencional para el cálculo del área del trapecio isósceles y también contiene el nombre de la figura a analizar. Aunque se hace referencia al conocimiento objetivo, se considera que no interferirá con el proceso de construcción de un algoritmo propio. Es más, se pretende que se use como punto de comparación para validar el algoritmo generado.

También se puede ver que la consigna menciona al triángulo, cuadrado y rectángulo. Con ello se pretende dotar a los profesores en formación de un punto de partida para plantear sus propias estrategias o "pruebas" en el sentido de Eschenburg (2022). Sin embargo, es posible que dicha información prive al estudiantado de una oportunidad de aprendizaje acotando el conocimiento que tienen que usar. Para evaluar más a profundidad se consideró observar la evolución de la situación.

La consigna se diseñó para que en un inicio los profesores en formación plantearan algunos esquemas desde una visión intuitiva de la figura. Luego, conforme interactuaran más con el medio, tuviesen la necesidad de plantear un algoritmo que finalmente fuera validado a través del cálculo convencional del área de un trapecio.

c) El estudiantado comienza trabajando desde un conocimiento básico previo.

Dado el nivel de escolaridad de los profesores en formación, se consideró que tienen el conocimiento básico previo para enfrentar esta situación.

d) El estudiantado puede verificar por sí mismo, el éxito o fracaso de cada intento.

La pregunta tres de la secuencia planteada está diseñada con el objetivo de validar (o no) el algoritmo construido por el profesorado en formación. Esto dado que, una vez encontrado un planteamiento que se considere exitoso, este se tendrá que poner a prueba a través de un contraste con el algoritmo convencional durante la fase de validación.

e) Dichas verificaciones favorecen la construcción de hipótesis y agregan información

En caso de que las validaciones anteriores no tengan éxito, es posible que las diferencias que se encuentren entre el algoritmo propio y el convencional brinden información que les permita hacer replanteamientos tanto en sus procedimientos como en sus consideraciones iniciales.

f) El estudiantado puede realizar una serie rápida de prueba y error, pero la anticipación a las consecuencias de las acciones debe ser favorecida.

Desde el diseño de la situación no se percibe cómo se pueda realizar una serie rápida de prueba y error. Esto dado a que se percibe que cualquier planteamiento inicial requerirá una verificación de éxito o fracaso, lo cual implica cierto nivel de compromiso con el intento.

Sin embargo, se considera que la anticipación a las consecuencias se podrá dar en cuanto el estudiantado discuta los planteamientos, es decir en la fase de formulación. Ya que al poner en juego sus hipótesis y antes de comprometerse con la resolución, es posible que requieran evaluar las posibles consecuencias de éstas en el cálculo del área.

g) Dentro de las soluciones empíricas aceptables, existe una que puede refutar cualquier objeción

Como se mencionó en el inciso a) de esta sección, se optó por proponer al trapecio isósceles dado que esto podría permitir la identificación de estrategias de una forma más intuitiva. Sin embargo, también podría facilitar que se visualizara la construcción geométrica mostrada en la figura 5.

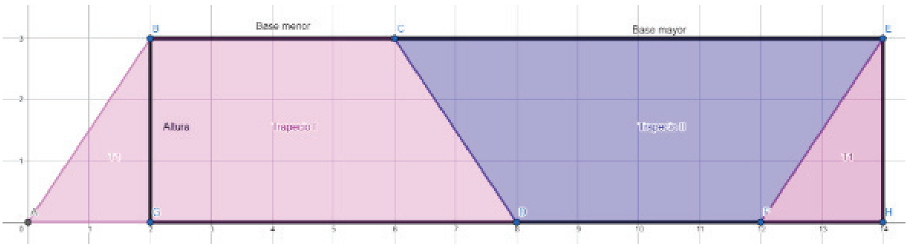


Figura 5. Construcción geométrica esperada. Elaborado con el software GeoGebra.

Esta construcción podría ser aceptada como "prueba", ya que otorga una perspectiva del trapecio isósceles en la cual los elementos del algoritmo convencional $A = \frac{B+b}{2}\,h$ están explícitos. Esta relación pudiese ser más obvia desde, por ejemplo, un trapecio rectángulo, por lo que trabajar desde un trapecio isósceles podría generar más elementos para el análisis.

h) La solución puede ser encontrada al menos por una parte del estudiantado. Esta también deberá ser verificada y compartida de forma rápida y eficiente. Lo anterior en un periodo de tiempo correspondiente al de una clase ordinaria.

La actividad se planificó para 60 minutos de duración efectiva, sin contar tiempos muertos dedicados a la organización, formación de equipos y demás necesidades presentes de forma natural en una sesión cotidiana. Dado que las sesiones en la escuela donde se puso en marcha la situación didáctica son en promedio de 120 minutos, el tiempo se considera suficiente para realizar la intervención.

Como se mencionó, la organización de la intervención se realizó con base en la situación de acción, formulación y validación. De tal manera que, para la primera, situación de acción, se prevé una fase individual donde puedan familiarizarse con la situación y generar una primera opinión sobre ésta.

Luego, durante la situación de formulación, se pretende realizar equipos de tres a cuatro individuos. Esto con el fin de verbalizar y plantear propuestas sobre cómo abordar la situación. Además, se pretende que el profesorado en formación pueda percibir propuestas resolutivas diferentes a la propia, generando discusiones que pongan en juego sus ideas iniciales. Después, durante la fase de validación, se pretende que en primer lugar se verifique el algoritmo generado con el algoritmo convencional, para que finalmente se puedan validar los argumentos sobre cómo se construyó en plenaria.

i) La situación podrá ser retomada, proveyendo de algunas preguntas que permitan reiniciar el proceso.

Una de las formas inmediatas de retomar la situación, sería preguntar al estudiantado si existe alguna otra forma de justificar el algoritmo convencional del cálculo de área del trapecio isósceles. Asimismo, se podría retomar el algoritmo construido y verificar su validez para cualquier trapecio. Otra forma sería cuestionar si existe alguna otra forma geométrica de la cual, a primera vista, no se comprenda el algoritmo convencional para entonces relanzar la situación a partir de ella.

Análisis de las evidencias del estudiantado

Durante esta sección se discute brevemente lo realizado por el profesorado en formación durante las etapas descritas anteriormente. Para ello, se organizan las interacciones a través de formas generales de enfrentar la situación por el estudiantado mediante las evidencias derivadas de la intervención.

Estrategias no exitosas

Divisiones en triángulos

Una propuesta del profesorado en formación intentaba dividir al trapecio en una serie de triángulos, considerando que inicialmente se podría calcular su área, para posteriormente multiplicarla por el número de triángulos que se formaran dentro del trapecio isósceles como se muestra en la figura 6.

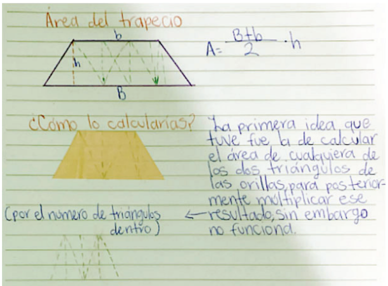


Figura 6. Ejemplo de procedimiento de división del trapecio en triángulos.

Se intuye que el equipo de profesores en formación asumió que era posible dividir el trapecio en triángulos idénticos de manera exacta (mediante dibujos o dobleces de papel). Para ello, tomaron como base la sección triangular que surge al dividir el trapecio en 2 secciones triangulares y una rectangular (similar a la división mostrada en la figura 8). Pero al llevarlo a la práctica identificaron que no era posible ya que sobraba una cierta área triangular que no era igual que las otras. Esto posiblemente los llevó a la conclusión de que su procedimiento no era funcional. Quienes intentaron esta estrategia enfrentaron dos dificultades principales, la primera, era expresar la división en triángulos mediante un algoritmo. La segunda, cómo integrar el área triangular inexacta en su procedimiento. Ningún intento derivado de estas estrategias logró proponer alguna expresión para el cálculo de área.

Intentos similares se dieron al dividir el trapecio isósceles en tres triángulos. Sin embargo, constantemente se preguntaban ¿Cómo saber el valor de cada una de las bases? La respuesta para el triángulo central mostrado en la figura 7, fue que su base era igual a la base menor del trapecio isósceles. Pero la respuesta para las bases de los triángulos laterales no fue tan evidente, lo que llevó al abandono de esta estrategia.

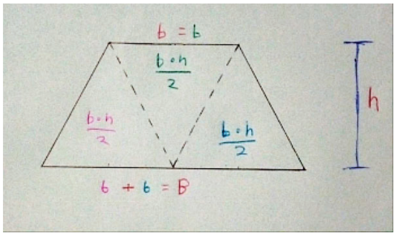


Figura 7. División del trapecio en tres triángulos.

Las anteriores estrategias fueron abandonadas al no poder solventar las dificultades encontradas, por lo que no fueron discutidas tan ampliamente como las estrategias que sí procedieron, las cuales se presentan a continuación.

Estrategias exitosas

División del trapecio isósceles en tres segmentos

Una de las estrategias más utilizadas por el grupo fue la división del trapecio isósceles en un rectángulo central, cuyas dimensiones eran la base menor y la altura del trapecio, más dos triángulos laterales que se formaban al dibujar el cuadrilátero central, tal como se muestra en la figura 8. El reto al que se enfrentaron los profesores en formación a través de este método fue encontrar una expresión generalizada para describir la base de los triángulos formados.

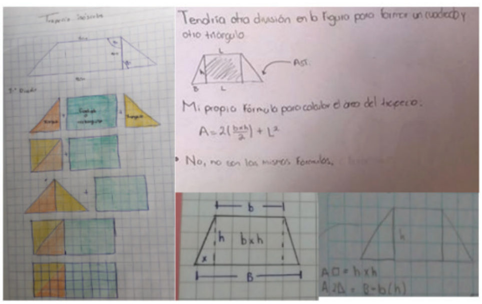


Figura 8. División del trapecio en un rectángulo y dos triángulos laterales.

Dada la problemática para generalizar expresiones, algunos docentes en formación comenzaron a asignar valores numéricos tanto a las bases del trapecio, como a la altura de este (algo que no se percibió en otras estrategias), esto con el objetivo de percibir algún método para obtener las medidas de las bases de los triángulos resultantes de la segmentación propuesta. Dicha estrategia les permitió transitar de una forma particular de calcular dicha medida hacia la generalización de dicho algoritmo, dadas ambas bases del trapecio. Por ejemplo, el asignar los valores de $B = 10$ y $b = 4$, facilitó visualizar que la resta $B - b = 6$ debía ser la suma de las dos bases de los triángulos laterales, lo que significaba que la base de cada uno tendría un valor de tres.

Durante la interacción grupal, la mayoría de las conversaciones se enfocaron en la discusión de la anterior estrategia, en donde comenzaron a llamarle "*x*" a cateto incógnita (foto inferior central e inferior derecha de la figura 8). Lo que les permitió incorporar dicho elemento a un algoritmo que comenzó a ser cada vez más aceptado al interior de algunos equipos:

$$A_{trapecio} = \frac{h}{2}\left(\frac{2x}{2}\right) + (b \cdot h) = \frac{hx}{2},$$

$$en\ donde: x = B - b,$$

$$\frac{2x}{2} = longitud\ del\ cateto,$$

$$h = altura$$

La anterior expresión fue posteriormente comparada con la fórmula convencional. Para ello, asignaron valores numéricos a las variables para contrastar el área resultante mediante ambos algoritmos. Un equipo sugirió el siguiente ejemplo: si $B = 16\ cm, b = 4\ cm, h = 4\ cm$, el área calculada tanto por el algoritmo construido como por el algoritmo convencional es de $28\ cm^2$. Al observar lo anterior algunos equipos propusieron dicho algoritmo como método propio para calcular el área de un trapecio isósceles. Sin embargo, lo anterior generó algunas dudas cuando fue analizada la segunda pregunta ¿Tu fórmula para calcular el área del trapecio isósceles y la fórmula convencional son las mismas?

Se generó entonces, una nueva discusión centrada en encontrar una manera de comprobar si el algoritmo propuesto era igual al convencional. Aquí también se pudieron observar diferentes formas de abordar esta nueva tarea, por un lado, hay quienes argumentaban que, si ambos algoritmos resultaban en la misma área, era entonces evidente que ambos métodos eran iguales.

Algunos profesores en formación comenzaron a tratar con diferentes valores para B, b y h, pasando a concluir que ambos algoritmos eran lo mismo. A pesar de ello unos cuantos sentían la necesidad de comprobarlo por algún otro método, por lo que decidieron abordar esa idea mediante álgebra.

El análisis algebraico, generó una discusión en la cual se abordó el papel del signo igual (=) para realizar dicho planteamiento. La interacción se centró en la posibilidad de escribir una igualdad basada en una suposición. Quienes decidieron proceder, continuaron operando la igualdad algebraicamente para representar esas expresiones de una manera en la que pudieran identificar si en realidad son iguales o no. Los profesores en formación argumentaron que usualmente usaban álgebra para encontrar el valor de una variable, pero que aquí, no se buscaba ningún valor, sino simplemente querían saber si ambas expresiones eran iguales. Dada la suposición de que ambos algoritmos eran iguales, una sección del grupo planteó la igualdad y llegó al siguiente resultado:

$$\frac{(B-b)*h}{2}+(b*h)=\frac{B+b}{2}*h$$

$$si\ se\ divide\ entre\ h:$$

$$\frac{(B-b)}{2}+b=\frac{B+b}{2}$$

$$si\ se\ multiplica\ por\ 2:$$

$$(B-b)+2b=B+b$$

$$al\ simplificar\ términos\ semejantes$$

$$B+b=B+b$$

Con base en lo anterior, concluían que el algoritmo que habían planteado inicialmente era igual al algoritmo convencional, al menos para el trapecio isósceles.

Construcción geométrica de dos trapecios isósceles

Esta estrategia surgió de una evidencia individual durante la situación de acción. Cuando se conformó el equipo que incluía a la persona que la propuso (figura 9), el equipo la acepto de inmediato sin proponer algún cambio. Una vez aceptada la estrategia, al interior del equipo cesaron los intentos por buscar otras alternativas.

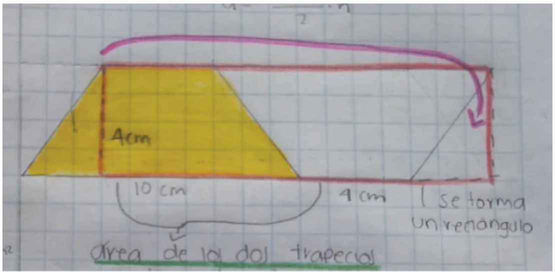


Figura 9. Construcción de un rectángulo a partir de dos trapecios isósceles idénticos.

Se cree que esta construcción fue fácilmente aceptada en la socialización, dado que el algoritmo para calcular el área de la figura en cuestión era idéntico al algoritmo tradicional enseñado en la escuela, ya que solo tenían que calcular el área del rectángulo formado y dividirla entre dos al estar conformada por dos trapecios, en donde uno de los lados del rectángulo se calculaba mediante la suma de la base menor con la base mayor y el otro lado era igual a la altura del trapecio.

DISCUSIÓN

En cuanto a la TSD

Se considera que la organización con base en la TSD tuvo efectos sobre la socialización. La familiarización con el problema durante la SA permitió al profesorado idear un primer planteamiento sobre la estrategia a seguir. Lo anterior facilitó que permearan distintas estrategias a la SF, las cuales, en algunos casos, eran similares entre sí. Así, cuando la estrategia aún no estaba lo suficientemente explícita, se esbozó un dibujo que permitiera algunas primeras manipulaciones sobre sus "ideas" haciendo factible la construcción de ciertas conclusiones en la SV. También durante estos casos dada la participación de múltiples individuos, la SV tomó más tiempo del esperado.

Por otro lado, cuando alguien propuso un esquema convincente que explicara el problema, la interacción cesaba. Lo anterior sucedía incluso si había diversas maneras de abordar el problema. Esto pareciera indicar que las estrategias generadas a nivel individual influyen en gran medida en la discusión durante este tipo de situaciones, lo que genera algunas interrogantes ¿En qué momento es conveniente agrupar a personas con estrategias similares? ¿Es conveniente conformar equipos en donde ningún miembro haya generado estrategias similares? ¿Qué efecto tiene lo anterior en la fase de formulación y validación en la generación de estrategias? Tener información sobre lo anterior podría ayudar en la toma de decisiones en función de los objetivos de una intervención cotidiana.

Así, la progresión de SA, SF y SV permitió estructurar la información construida por el profesorado. En la SA se generaron primeras "ideas" que al ser codificadas con la intención de comunicarse durante la SF pudieron ser esquematizadas. La SV exigía que dichos esquemas fueran presentados como conclusiones, por lo que generaron la necesidad de transitar a un lenguaje matemático más específico. Por ello, buscaron transformar esas "ideas" esquematizadas en una afirmación que pudiese interpretarse como un primer intento de conceptualizar dicha idea. De manera general, podemos apreciar que idealmente, dada la organización con base en la TSD, fue posible observar la evolución de la situación, a través del lenguaje matemático cada vez más formal a medida que transitaron de la SA a la SV.

En cuanto a las estrategias no exitosas

Posterior a la intervención se realizó un análisis de las estrategias no exitosas y exitosas reportadas, con el objetivo de encontrar puntos centrales que permitieron o impidieron la evolución de la situación.

En la estrategia mostrada en la figura 6, la división del trapecio isósceles en múltiples triángulos, la premisa consistió en dividir el rectángulo central en varios triángulos iguales al triángulo formado en las laterales (figura 10).

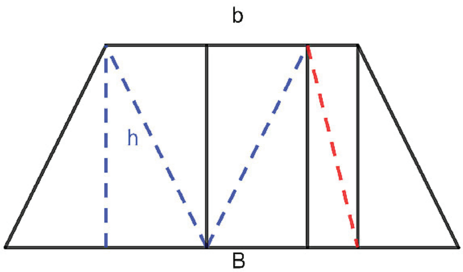


Figura 10. Trapecio isósceles dividido en múltiples triángulos.

La primera dificultad durante el desarrollo de esta estrategia fue: cómo saber el valor de la longitud de los triángulos con un área menor a la de los triángulos laterales. Para solventarla, se puede observar que las alturas de todos los triángulos es la misma. Esto genera que el área de los triángulos con área menor sea proporcional a la parte no entera de la división de b entre el valor del cateto del triángulo lateral $(\frac{B-b}{2})$. De tal manera que:

$$Área = \frac{b}{\frac{B-b}{2}} \cdot \frac{(B-b)h}{2} + \frac{B-b}{2} \cdot \frac{h}{2} + \frac{B-b}{2} \cdot \frac{h}{2}$$

En donde $\frac{b}{\frac{B-b}{2}}$ es la cantidad de triángulos con base igual al cateto del triángulo lateral que hay en el rectángulo central. Y $\frac{B-b}{2}$ es la medida del cateto del triángulo lateral. Al simplificar el primer término de la anterior expresión y luego sumar el segundo con el tercero:

$$\frac{b}{\frac{B-b}{2}} \cdot \frac{(B-b)h}{2} = \frac{2b}{B-b} \cdot \frac{(B-b)h}{2} = bh$$

$$\frac{B-b}{2} \cdot \frac{h}{2} + \frac{B-b}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{(B-b) \cdot h}{2}$$

Dado que el área total de los triángulos que caben en el rectángulo central debe ser igual al área de dicho rectángulo, este procedimiento nos lleva a un planteamiento similar que el encontrado en la estrategia exitosa mostrada en la figura 8. Por lo que este planteamiento genera un algoritmo válido para calcular el área de un trapecio isósceles.

$$Área = \frac{(B-b) \cdot h}{2} + (b \cdot h)$$

Entonces, la dificultad principal en el desarrollo de esta estrategia fue la visualización de que el área de los triángulos es proporcional a la base, dado que la altura era la misma para todos. Esto a su vez no permitió concretar un enunciado matemático que posibilitara la manipulación de elementos geométricos en un plano más abstracto.

En la segunda estrategia no exitosa (plantear la división del trapecio isósceles en tres triángulos mostrada en la figura 7), es posible que el lograr representar simbólicamente que las bases de los triángulos laterales pueden tener un valor de $\frac{B}{2}$, habría permitido plantear lo siguiente:

$$\frac{B}{2}(h) + \frac{(b)(h)}{2} + \frac{B}{2}(h) = Bh + \frac{bh}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}h(B+b) = \acute{A}rea\ del\ trapecio\ is\acute{o}sceles$$

Lo anterior implica un algoritmo válido para el cálculo del área del trapecio isósceles. En este caso el dibujo propuesto por el equipo, no fue suficiente para que lograran esquematizar la colocación del vértice de los triángulos a la mitad de B, lo cual podría haber facilitado la escritura de una expresión matemática manipulable.

Los equipos que propusieron estas estrategias no exitosas tuvieron dos dificultades, la primera, relativa a la visualización de relaciones geométricas para generar "ideas" en forma de esquemas y la segunda, con el tránsito de estas "ideas" a una formalización mediante lenguaje matemático. La primera puede estar interconectada a lo que Eschenburg (2022) denomina intuición geométrica, relacionada con percibir las formas espaciales presentes y sus relaciones explícitas e implícitas. Esta intuición geométrica, es parte de las razones por las que el estudio de la geometría es relevante en la educación primaria, ya que puede ser el punto de partida para manipulaciones cada vez más abstractas de los objetos geométricos, que debería ser considerado durante la formación del profesorado.

La segunda dificultad en términos de la TSD, podría implicar dificultades durante la situación de formulación, la cual hace referencia a intercambios de información codificada en algún lenguaje, en este caso lenguaje matemático. Es decir, aunque el profesor en formación tenía una cierta idea de cómo proceder, le fue difícil expresarla en lenguaje matemático de tal manera que le permitiera continuar interactuando con el medio. Se podría decir que estas dificultades no se manifiestan al entender y reconocer propiedades de las figuras, sino durante el proceso de concientización de las relaciones entre ellas y el lenguaje técnico que permita el afianzamiento de la deducción lógica.

En cuanto a las estrategias exitosas

La posibilidad de plantear una generalización permitió a la estrategia enmarcada en la figura 8 (cuadrilátero central más triángulos laterales) un mayor desarrollo. En concreto, la escritura de una igualdad que incluyera la base del triángulo lateral hizo posible la concreción de una fórmula propia que diera respuesta a la primera parte del problema. De aquí, podemos observar la importancia que tuvo sustituir las variables del problema por diversos valores, antes de percibir la generalidad de la igualdad. Estas múltiples sustituciones permitieron dar una fuerza intuitiva al razonamiento general, facilitando la escritura simbólica al encontrar un comportamiento constante en las operaciones numéricas.

Asimismo, como se previó durante el análisis del potencial a-didáctico inciso g), la estrategia de la figura 7, la construcción con los dos trapecios isósceles iguales fue aceptada inmediatamente. Esto posiblemente se deba a la potencia que tiene el trazo para la percepción de relaciones ocultas de figuras ideales como menciona Eschenburg (2022). En este caso la simpleza de la esquematización con el uso de líneas auxiliares, permite percibir una explicación intuitiva sobre la división entre dos y la multiplicación de h por la suma de B y b. De aquí es posible generar una restricción adicional a la situación, trabajar con un solo trapecio para que desde allí se deduzca la relación entre la fórmula encontrada de manera individual y la fórmula convencional.

CONCLUSIONES

Con base en este documento, puede observarse que las condiciones de análisis *a priori*, derivadas de la TSD, fueron fundamentales para la construcción de la situación didáctica, pues permitieron anticipar interacciones clave entre el profesorado en formación y el *milieu* diseñado. No obstante, el análisis mostró que también surgieron estrategias no previstas inicialmente, las cuales resultaron viables para la resolución del problema y evidencian la riqueza del proceso de adaptación independiente. Este hallazgo invita a matizar la condición g) de la TSD, según la cual dentro de las soluciones empíricas aceptables existe una que puede refutar cualquier objeción, ya que en la práctica parece más apropiado considerar que *al menos* puede emerger una estrategia con ese potencial. En este sentido, mientras la condición g) se fundamenta en la noción de adaptación óptima propuesta por Brousseau (2007), los resultados de esta investigación ponen de relieve que la diversidad de estrategias, incluso no anticipadas en el diseño, puede aportar vías legítimas de resolución y enriquecer el tránsito de las ideas a los conceptos matemáticos.

Por ejemplo, Skovsmose y Valero (2012) señalan que, en general y desde un punto de vista lógico, las ideas matemáticas poderosas, son aquellas que permiten resignificar conceptos previamente construidos, particularmente aquellas que pueden asociarse a la abstracción. En este sentido, los puntos medulares del desarrollo de la situación pueden entenderse en ese marco: I) el paso de un dibujo a una "prueba" –concebida, siguiendo a Eschenburg (2022), como una esquematización de estructuras ideales (fig. 2)–, y II) la transición de la "prueba" al lenguaje matemático. Esto implica, por un lado, la capacidad de generar y validar nuevas perspectivas de análisis a través de un esquema, y por otro, la posibilidad de plasmar dichas perspectivas en un lenguaje formal que permita su manipulación matemática.

En síntesis, el tránsito de las "ideas" a los conceptos mediante "pruebas" e interacciones puede leerse de manera complementaria desde ambos marcos: como construcción de ideas matemáticas poderosas (Skovsmose y Valero, 2012) y, como procesos de tratamiento y conversión entre registros semióticos (Duval, 2006). Esta doble lectura permite concluir que las "pruebas" no son simples recursos auxiliares, sino medios esenciales para establecer relaciones, generar nuevas perspectivas y facilitar el progreso del profesorado en formación en tareas geométricas cada vez más abstractas y significativas.

De esta manera, además de reconocer la relevancia de las representaciones y las interacciones en el tránsito de las "ideas" a los conceptos, se vuelve pertinente considerar que, tras una experiencia como la aquí descrita, resulta necesario promover una discusión con el profesorado en formación acerca de cómo la organización de la situación y las condiciones de análisis a priori contribuyeron a crear el marco para dicho tránsito en los casos exitosos. Al mismo tiempo, esta reflexión permitiría explorar cómo, en los casos donde las estrategias no prosperaron, la intervención del docente podría haber apoyado de manera más efectiva la construcción de vínculos entre las ideas iniciales y su formalización matemática. De este modo, el análisis evidencia que el diseño didáctico fundamentado en la TSD no solo anticipa posibles desarrollos, sino que también abre espacio a la emergencia de estrategias no previstas, las cuales constituyen oportunidades valiosas de aprendizaje.

REFERENCIAS

Angulo, V., Arteaga, V., y Carmenates, B. (2020). La formación de conceptos matemáticos en el proceso de enseñanza- aprendizaje de la Matemática. *Revista Conrado, 16*(74), 298–305.

Artigue, M., Haspekian, M., y Corblin-Lenfant, A. (2014). Introduction to the Theory of Didactical Situations (TDS). En A. Bikner-Ahsbahs y S. Prediger (Eds.), *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (pp. 47–65). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-05389-9_4

Baldor, J. (1983). *Geometría plana y del espacio*. Publicaciones Cultural.

Brousseau, G. (2007*). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Zorzal.

Clements, D. H., y Battista, M. T. (1992). *Geometry and spatial reasoning*. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420–464). Macmillan.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1–2), 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Eschenburg, J.-H. (2022). *Geometry - intuition and concepts*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-38640-5

García, S., y López, O. (2008). *La enseñanza de la geometría*. Instituto nacional para la evaluación de la educación.

Gutiérrez, A. (1996). *Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework*. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 20)* (Vol. 1, pp. 3–19). Universidad de Valencia.

Gutiérrez-Rubio, D., Maz-Machado, A., León-Mantero, C., y Jiménez-Fanjul, N. (2018). Estudio de la percepción de la utilidad de la geometría en futuros profesores de educación primaria. En L. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. García, y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 261-269). Universidad de Oviedo.

Hershkowitz, R. (1990). *Psychological aspects of learning geometry.* En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 70–95). Cambridge University Press.

Pasani, C. (2019). Analyzing elementary school student's geometry comprehension based on Van Hiele's theory. *Journal of Southwest Jiaotong University, 54*(5). https://doi.org/10.35741/issn.0258-2724.54.5.31

Skovsmose O. y Valero P. (2012). Acceso democrático a ideas matemáticas poderosas. En P. Valero, y O. Skovsmose (Eds.), *Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (pp. 25-61). Universidad de los Andes.

Autor de correspondencia
Ismael Cuevas-Morales,
Dirección postal: Av. Xalapa SN, Unidad Magisterial, 91017
Xalapa-Enríquez, Veracruz, México
ismaelbenv@gmail.com