 https://doi.org/10.24844/EM3703.10

Construcciones euclidianas con GeoGebra en tiempos de COVID-19: Reflexiones desde la experiencia

Euclidean constructions with GeoGebra in times of COVID-19: Reflections from experience.

Irene Victoria Sánchez Noroño[1]

Resumen: El manuscrito ofrece algunas reflexiones extraídas de la implementación de una actividad referida a construcciones euclidianas con GeoGebra durante la pandemia de COVID-19. Esta actividad se llevó a cabo como parte del curso de geometría dirigido a profesores en formación inicial de la carrera Pedagogía en Matemática y Física de una universidad del norte de Chile. El desarrollo de la actividad tuvo una duración de diez sesiones de trabajo, en las cuales la formadora y las y los profesores en formación inicial, laboraban juntos para responder a la tarea de construcción que se abordaba en cada sesión, brindando condiciones que permitían la movilización de saberes geométricos. En la sesión examinada, luego que se comunica el proceso de construcción, se analiza la consistencia geométrica del dibujo dinámico producido y su argumentación como respuesta a la tarea.

Palabras clave: *formación de profesores, profesores en formación, geometría, GeoGebra, construcción geométrica, COVID-19*

Fecha de recepción: 17 de mayo de 2024. **Fecha de aceptación:** 12 de agosto de 2025.

[1] Universidad Arturo Prat, Iquique-Casa central, Facultad de Ciencias Humanas, Carrera Pedagogía en Matemática y Física, irsanchez@unap.cl, https://orcid.org/0000-0001-9176-0125.

Abstract: In the manuscript, we offers some reflections taken from the implementation of an activity related to Euclidean constructions with GeoGebra during the COVID-19 pandemic. This activity was carried out as part of the geometry course aimed at pre-service teachers of the Mathematics and Physics Pedagogy degree at a university in northern Chile. The development of the activity lasted ten work sessions, in which the trainer and the pre-service teachers worked together to respond to the construction task addressed in each session, providing conditions that allowed the mobilization of geometric knowledge. In the session examined, after the construction process is communicated, the geometric consistency of the dynamic drawing produced and its argumentation as a response to the task are analyzed.

Keywords: *teacher training, teachers in training, geometry, GeoGebra, Geometric construction*

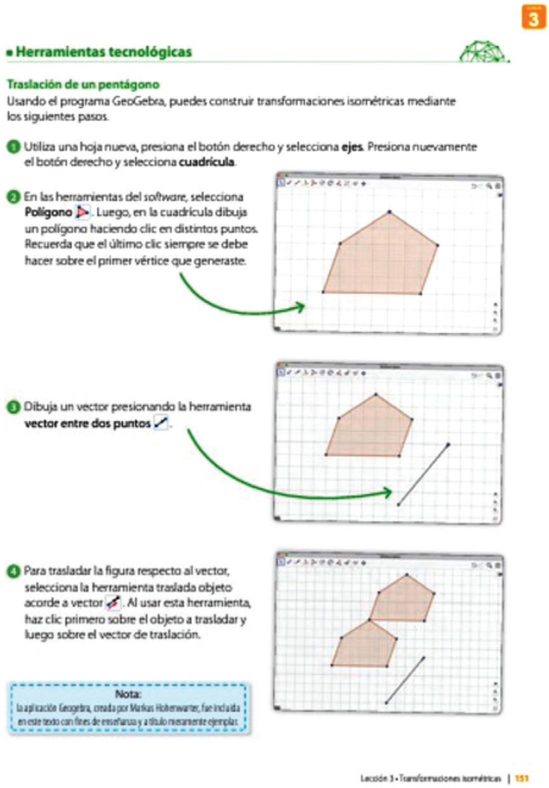
INTRODUCCIÓN

La formación de profesores de matemáticas es una práctica que se enfrenta a diversas tensiones como las institucionales, las académicas, las personales, las sociales, entre otras (Da Ponte, 2012; Llinares, 2021). En este contexto las y los formadores de profesores de matemáticas tienen el deber –moral– de cumplir tres roles inherentes a su propia práctica, como son: (i) formadores, (ii) investigadores y (iii) diseñadores de tareas y formas de usarlas en los programas de formación. La confluencia de estos roles, puede permitir que las y los formadores reflexionen sobre su propia práctica identificando oportunidades de aprendizaje que conlleven a potenciar la formación de las y los futuros profesores de matemáticas. Una articulación efectiva de los roles posibilita escenarios beneficiosos donde el diseño, ejecución y análisis de una tarea y/o actividad, deriven en productos que merecen ser compartidos con otros actores del campo de la Educación Matemática.

Para ello, el/la formador/a en su rol de diseñador, debe considerar ciertos principios teóricos, metodológicos y el *saber* que será movilizado, en términos de la Teoría de la Objetivación (TO) (Radford, 2015, 2016, 2017a, 2017b) para la actividad. Adicional a lo anterior, es relevante que responda a las necesidades formativas de las y los profesores de matemáticas (Cameron *et al.*, 2013; Goos, 2013; Ribeiro y Da Ponte, 2019; Towers, 2010). En particular, en la experiencia que se comparte en este manuscrito, los principios teóricos y metodológicos provienen de la TO y el saber es de tipo geométrico (Sánchez Noroño y Prieto-G., 2022). El saber geométrico, al igual que otro saber, ha sido transformado, modificado y desarrollado a lo largo del tiempo según las demandas históricas y culturales. Para recordar un poco, en el antiguo Egipto el trabajo geométrico estuvo vinculado a la medición de terrenos, debido a las inundaciones del rio Nilo, lo cual se asentó como geometría práctica. Con el paso del tiempo, las demandas sociales y culturales hicieron que el trabajo geométrico evolucionara y estableciese dos formas válidas, que continúan vigentes, para su movilización, estas son: el modelo axiomático y las construcciones geométricas, cuyos fundamentos se encuentran en la obra *Elementos* producida por Euclides.

Estas construcciones geométricas, que demandan el uso de regla y compás (R y C), asumidos como artefactos propios de la actividad, para movilizar y materializar el saber geométrico, en este manuscrito las llamamos *construcciones euclidianas*. Una situación inevitable con los artefactos es su evolución, en función de los requerimientos y avances sociales, lo cual deriva en modificaciones en las actividades que los utilizan. Tal es el caso de las construcciones euclidianas, que utilizan R y C, con la llegada de los softwares de geometría dinámica (SGD), que muestran formas novedosas y potentes para el trabajo geométrico. Un SGD, ampliamente utilizado para las actividades de enseñanza-aprendizaje de la geometría es el GeoGebra, el cual presenta a través de herramientas y funciones el saber geométrico.

En la actualidad, el GeoGebra es sugerido en algunos textos escolares, por ejemplo, en Chile los textos oficiales que entrega el Ministerio de Educación proponen el uso del GeoGebra en el eje de Geometría (figura 1). Es notorio que el trabajo con el software no transciende de la mera aplicación de la(s) herramienta(s). Es por ello que, desde la formación inicial de profesores de matemáticas, debe promoverse el uso de la tecnología digital (TD) para la enseñanza y el aprendizaje. La demanda de fomentar el uso de la TD, no es de reciente data (Rojano, 2014), y en particular el trabajo geométrico con TD, continúa siendo deficiente a pesar de que las instituciones educativas cuenten con las condiciones para su implementación, las y los profesores prefieren no utilizar TD (Acosta Gempeler, 2007; Acosta Gempeler y Fiallo Leal, 2017). Entre las razones por las cuales un profesor o profesora decide no emplear TD, aunque reconocen sus beneficios, se debe a que no saben cómo ni cuándo usarlos (Corrales-Jaar, 2021).


3

Herramientas tecnológicas

Traslación de un pentágono

Usando el programa GeoGebra, puedes construir transformaciones isométricas mediante los siguientes pasos.

1. Utiliza una hoja nueva, presiona el botón derecho y selecciona **ejes**. Presiona nuevamente el botón derecho y selecciona **cuadrícula**.
2. En las herramientas del software, selecciona **Polígono**. Luego, en la cuadrícula dibuja un polígono haciendo clic en distintos puntos. Recuerda que el último clic siempre se debe hacer sobre el primer vértice que generaste.
3. Dibuja un vector presionando la herramienta **vector entre dos puntos**.
4. Para trasladar la figura respecto al vector, selecciona la herramienta traslada objeto acorde a vector. Al usar esta herramienta, haz clic primero sobre el objeto a trasladar y luego sobre el vector de traslación.

Nota:
la aplicación Geogebra, creada por Markus Hohenwarter, fue incluida en este texto con fines de enseñanza y a título meramente ejemplar.

Lección 3 • Transformaciones isométricas | 151

Figura 1: Sugerencia del uso de GeoGebra, p. 181.
Fuente: Texto de Matemática Nivel 8vo Básico.

Lo anteriormente descrito, invita a las y los formadores a fomentar experiencias de aprendizaje que puedan dar cuenta del uso de la TD para el aprendizaje de la geometría. En pro de contribuir con las reflexiones en torno a las implicaciones de utilizar GeoGebra para el aprendizaje de la geometría, en el presente manuscrito se comentan algunas reflexiones de la implementación de una actividad de enseñanza-aprendizaje de construcciones euclidianas con GeoGebra, con profesores de matemática en formación inicial, reportada en Sánchez Noroño y Prieto-G. (2022). Una particularidad de la experiencia es que fue desarrollada en el periodo de la pandemia, donde las sesiones de trabajo fueron realizadas en contextos de enseñanza remota de emergencia (Borgobello y Espinosa, 2020).

CONSTRUCCIONES EUCLIDIANAS CON GEOGEBRA. UNA PERSPECTIVA EVOLUTIVA E HISTÓRICO-CULTURAL

La geometría, en su devenir histórico, ha estado ligada a la dinámica de las actividades humanas, sociales y culturales. En cada una de estas esferas, se han empleado artefactos (ya sean materiales o simbólicos) que se vinculan con las experiencias individuales y grupales. Estos artefactos varían en su nivel de sofisticación y han sido utilizados de acuerdo a sus necesidades (Camargo y Acosta, 2012). En las experiencias humanas que han utilizado geometría para dar respuesta a situaciones puntuales o generales, es posible reconocer dos formas utilizadas, por un lado, la práctica vinculada a la solución de las necesidades del mundo y la cotidianidad. Para este propósito, los métodos empíricos y los algoritmos fueron la base esencial. Y, por otro lado, la teórica, donde los pensadores y sabios de la antigüedad se dedicaban a reflexionar sobre la abstracción de la geometría y los posibles aportes que podrían realizar (Sánchez-B, 2012).

Los saberes de origen práctico y concreto fueron pasando de cultura en cultura, de los babilonios a los egipcios, hasta llegar a la cultura griega (siglo VI al III a.n.e.), considerada la época dorada de la geometría. En ese momento de la historia, Euclides recopila los saberes que habían sido producidos meticulosamente por las culturas anteriores y los organiza en su famosa obra *Elementos*, cimentando en ella las bases de la geometría como disciplina científica, separándola definitivamente de la forma práctica. Esta obra fue considerada como una guía de enseñanza de la geometría durante aproximadamente dos milenios (Sánchez-B, 2012). Un rasgo bastante distintivo de los Elementos es su organización, en ella, se proponen dos tipos de problemas (demostraciones y construcciones con R y C), para el estudio de la geometría, a partir de los cuales se instaura el método axiomático y/o pensamiento hipotético-deductivo conocido hoy en día.

En los problemas de construcción propuestos en los *Elementos*, es posible diferenciar tres partes. La primera es el "enunciado" del problema, y "explicación" de la proposición, en la cual presenta el objeto geométrico demandado y el objeto dado para ello (hipótesis y tesis). La segunda parte, denominada "operación", abarca la solución del problema, es decir, la construcción del objeto geométrico que se demanda. Y, la tercera parte, llamada "demostración", consiste en–el discurso oral o escrito con– la argumentación que justifica la validez del objeto construido (Sánchez Noroño y Prieto-G., 2022). En estos tipos de problemas, el uso de artefactos como la regla (sin marcas) y el compás euclídeo (colapsable) fueron fundamentales, ya que permitían visualizar de forma tangible las ideas abstractas de recta y círculo, dado que portaban su conceptualización. Permitiendo a los geómetras griegos trazar segmentos –de recta– a partir de dos puntos cualesquiera con la regla, y círculos dado su centro y un radio con el compás colapsable, el cual se cerraba automáticamente al despegarse de la superficie (Euclides, 1991; Simson, 1774; Tosca, 1707).

Una cualidad que han tenido los artefactos (R y C), es su leve evolución, por ejemplo, el compás euclídeo o colapsable, refinó su diseño integrando una característica como el ajuste y mantener su abertura. Pero la llegada de la TD a la educación matemática permitió el fomento de formas novedosas para acercase a los saberes geométricos, derivando en la demanda de cambios sustanciales de la actividad de enseñanza-aprendizaje (en algunos de sus aspectos) de las construcciones euclideanas. Algunas de las trasformaciones que ha experimentado la geometría euclidiana, se deben al uso de los SGD en el aula (Artigue, 2002, 2012; Laborde, 1997). Un SGD es un artefacto semiótico que muestra su potencial en la forma como este permite diferenciar entre objeto geométrico (representado) y dibujo (representante), mediante la manipulación directa que se puede hacer sobre el dibujo, lo que permite comprobar que las invariantes geométricas se conservan (Sandoval Cáceres y Moreno-Armella, 2012). Cuando ello ocurre, se está en presencia de un dibujo dinámico.

Al emplear un SGD, los usuarios pueden pensar y actuar en términos geométricos según la configuración del software, lo que conlleva una lógica de funcionamiento específica para cada software. Además, el SGD fomenta interacciones humanas que influyen en los modos y formas de producción (Radford, 2017a, 2017b, 2023a). Específicamente, el GeoGebra, un tipo de SGD, ofrece herramientas y funciones que permiten al usuario pensar en términos geométricos, encapsulando el contenido conceptual (Sánchez y Prieto, 2019). Para que el saber geométrico sea evidente, es necesario incorporar el GeoGebra a una actividad que permita movilizar dichas conceptualizaciones.

CONSTRUCCIONES EUCLIDEANAS CON GEOGEBRA. UNA ACTIVIDAD CONTEMPORÁNEA NECESARIA EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES

El presente trabajo se enmarca en una teoría contemporánea histórico-cultural de la Educación Matemática, conocida como la Teoría de la Objetivación (TO) (Radford, 2016, 2023b, 2023a). La TO inicia formalizando el concepto de aprendizaje, entendido como el encuentro progresivo de los individuos con el saber histórico y cultural, a su vez plantea que el aprendizaje no se limita a la esfera del saber; por su parte, considera la formación del ser, como ejes que se nutren (Radford y Empaey, 2017). Para que los saberes se movilicen y puedan ser objeto de conciencia para el individuo, debe movilizarse en una actividad. La actividad, en la TO, se conceptualiza como labor conjunta, para diferenciar esta categoría humana de otras de tipo funcional y técnicas que se limitan a un conjunto de acciones para el logro de un objetivo (Radford, 2023a). De esta manera, la labor conjunta es definida como "una forma de vida, algo orgánico y sistémico, un evento creado por una búsqueda común –es decir una búsqueda con otros– de la solución a un problema planteado, búsqueda que es al mismo tiempo cognitiva, emocional y ética" (Radford, 2017a, p. 15). De esta manera, se asume el encuentro que tienen formadores y profesores de matemática en formación inicial cuando resuelven problemas de construcciones euclidianas con GeoGebra como una labor conjunta.

El GeoGebra, como se mencionó, expone el contenido conceptual mediante herramientas y funcionalidades que encarnan conceptos inherentes a la geometría (construidos a lo largo de la historia). Además, proporciona al usuario un sistema de representación y un ámbito de exploración que enriquecen la actividad y que son poco viables en medios estáticos como el papel y lápiz (P y L) (Sandoval-C y Moreno-Armella, 2012). Una característica distintiva de este software está en mantener en las representaciones de los objetos geométricos, sus propiedades y/o invariantes geométricas incluso al intentar deformarlos mediante el arrastre (Laborde, 1997). Esto posibilita que la percepción dinámica que adquiere un estudiante al realizar construcciones difiera de la obtenida con otras realizadas en P y L. Estas potencialidades, quizás, lo llevaron a convertirse en el software más utilizado entre los años 2011 y 2022, para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en los niveles de media y superior (Morales Chicana *et al.*, 2023).

Por ejemplo, consideremos la tarea de dibujar una recta en el GeoGebra. Para ello, el primer paso consiste en seleccionar la herramienta adecuada que permita llevar a cabo la construcción. En este caso, la herramienta *recta* se presenta como la opción ideal, guiando al usuario sobre cómo construir esta figura al solicitar los puntos (creados o no) por los cuales la recta debe pasar (figura 2). Además, cada herramienta y funcionalidad del GeoGebra sigue una lógica operativa particular, requiriendo que el usuario proporcione ciertas condiciones al software. Estas condiciones, como enfatizan Sandoval y Moreno-Armella (2012), no son neutrales ni simples, sino que constituyen una parte esencial de los saberes matemáticos incorporados en los artefactos.

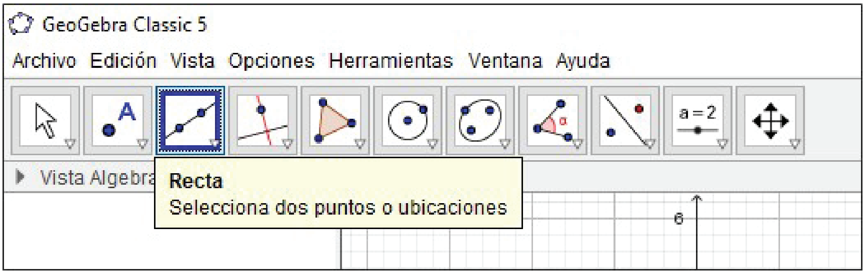


Figura 2. Conceptualización de la recta mediante la herramienta correspondiente.

CONTEXTO DE LA EXPERIENCIA

La experiencia que se comenta en el manuscrito se realizó durante la pandemia de Covid-19 (Cucinotta y Vanelli, 2020), en el marco del desarrollo de la Actividad Curricular (A.C.) Geometría (semestre 1) de la carrera de Pedagogía en Matemática y Física. Esta asignatura se desarrolló completamente en modalidad remota, mediante la utilización de la plataforma proporcionada por la Universidad para tal fin. La información fue recolectada por medio de:

- Videograbaciones: provienen de las grabaciones en formato audiovisual de todas las sesiones de trabajo, previa obtención del consentimiento de las y los profesores en formación inicial. Es fundamental destacar que los nombres utilizados son seudónimos asignados para preservar la identidad de los sujetos.
- Informes: corresponden a los documentos entregados por las y los profesores en formación inicial, donde debían (i) comunicar el proceso de

construcción llevado a cabo y (ii) respaldar la argumentación de su validez y coherencia respecto al dibujo dinámico generado, para cada tarea de construcción.

- Archivos .ggb: para cada tarea de construcción se entregaba una hoja de trabajo en formato .ggb, el cual debían retornar con el dibujo dinámico realizado como respuesta.

En las sesiones, las y los profesores en formación inicial mantenían su cámara apagada (aceptado por la normativa de la Universidad), lo cual impedía acceder a otro tipo de registros como los semióticos (y particularmente los gestos), para el análisis. Es importante destacar que no todos se conectaban a las sesiones desde un computador, una parte del grupo, lo hacía desde su teléfono celular. Esto derivó en una disminución de la visibilidad de los rótulos de los objetos geométricos de la interfaz del GeoGebra, por una parte del grupo, por lo cual, la formadora asignó colores a los objetos. Dicho contexto virtual implicó que la voz fuese fundamental para expresar los procesos realizados dentro de sus posibilidades, y para subsanar las limitaciones ofrecidas por los mecanismos y dispositivos del momento. Aunado a lo anterior, el cursor del mouse en pantalla, proporcionó la posibilidad de señalar, emular formas, y otros, al funcionar como una extensión del cuerpo.

DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD

La actividad se desarrolló en 10 sesiones de trabajo, respondiendo al diseño reportado en Sánchez Noroño y Prieto-G. (2022). Para la actividad la formadora hizo entrega a las y los profesores en formación inicial de un documento con las orientaciones de las tareas de construcción y un archivo .ggb (hoja de trabajo) por cada tarea de construcción con las condiciones iniciales. El desarrollo de la actividad se organizó en tres etapas. En la primera, la formadora entregó las orientaciones y las hojas de trabajo a las y los profesores en formación inicial, indicando las tareas que debían ser atendidas en la sesión, enfatizando que debían entregar (i) la hoja de trabajo con el dibujo dinámico que daba respuesta a la tarea y (ii) un documento que comunicara el proceso de construcción realizado para dar respuesta a la tarea de construcción y la justificación que el dibujo dinámico responde a la tarea. En la segunda, se realizó la puesta en común de la respuesta de la tarea, considerando un caso para ello, un análisis conjunto de la consistencia geométrica del dibujo, proceso y justificación, permitiendo a las y los profesores en formación inicial realizar una evaluación de la respuesta producida por ellos, y la de sus pares, aportando ideas en el proceso. En la tercera, las y los profesores en formación inicial tuvieron la oportunidad de refinar sus respuestas para la entrega final. Para ello, agregaron un texto con los cambios realizados comentando cómo la puesta en común permitió potenciar su respuesta.

REFLEXIONES ACERCA DEL DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD: DISCUSIONES Y ANÁLISIS

La sesión de trabajo que se comenta en el manuscrito, es la cuarta. En esta se realiza la puesta en común de dos tareas de construcción atendidas por las y los profesores en formación inicial (segunda etapa). En la sesión, es posible identificar cuatro momentos: en el primero, se realiza la evaluación de la respuesta de Darío, para ello, se analiza la consistencia geométrica; en el segundo, se construye el dibujo dinámico de la tarea analizada en conjunto; en el tercero, se dialoga en torno a la justificación de la respuesta de la tarea; y en el cuarto momento, la formadora realiza un recuento de la sesión de trabajo. Las reflexiones se organizan en dos apartados, el primero presenta una combinación de factores y circunstancias vinculadas a comprobar la consistencia geométrica del dibujo dinámico y la argumentación del dibujo dinámico. Y el segundo, un análisis de la consistencia geométrica.

La tarea de construcción que se aborda para la puesta en común en la sesión de trabajo consiste en dividir en dos partes iguales un ángulo dado. Para resolver la tarea, se hace entrega de la hoja de trabajo (figura 3-a) en la cual las y los profesores en formación inicial encuentran las condiciones iniciales para atender a la tarea como se mencionó. Una característica particular que tiene la tarea es la presencia de un deslizador de ángulo el cual permite modificar el ángulo en $P(\beta)$. Este se construye para acotar y modificar el valor del ángulo entre 0^o y 180^o, siendo esta la única forma de modificarlo (figura 3-b).

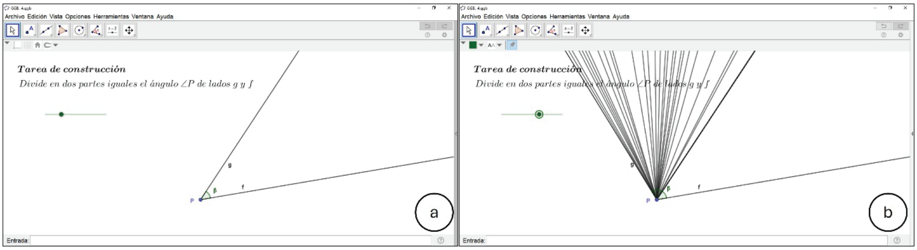


Figura 3. Hoja de trabajo de la tarea.

COMPROBAR LA CONSISTENCIA GEOMÉTRICA DEL DIBUJO DINÁMICO

En la sesión, la formadora inicia compartiendo en pantalla con las y los profesores en formación inicial, donde se muestra un archivo .ggb con la respuesta producida por Darío, a quien la formadora solicita comunique a sus pares el proceso de construcción que realizó. La formadora, para contribuir con la fluidez de la comunicación y atención de los objetos geométricos, les designa colores, principalmente porque algunos de los profesores en formación inicial utilizaron su teléfono celular para las aulas (sesión) y manifestaron poca visibilidad de los rótulos dado el tamaño de sus pantallas. En el diálogo, Darío da indicios de no recordar, pero luego comunica lo solicitado, sin realizar referencia a comprobar la consistencia del dibujo.

Formadora: Hola, ¿cómo éstas? Vamos a ver Darío. Aquí está tu tarea de construcción [puesta en la pantalla]. Darío ¿en qué consistía la tarea?

Darío: Eeee (exclamación que se emplea cuando se intenta recordar algo). En tener que dividir en dos partes igual[es] el ángulo.

Formadora: Muy bien, ¿cómo lo hiciste?

Darío: Primero hice la circunferencia [c, con centro] en el punto P, y donde, de cualquier tipo de radio y donde interceptará, …, con la recta que va en el ángulo [g y f] (lados del ángulo), ahí [en los puntos de intercección B y D] volví hacer otras circunferencias, ahí se ven [en la interfaz] la [circunferencia e, en tono] azul y la [circunferencia d, en tono] morado, esas son las otras dos circunferencias que hice en la intersección de la primera [la circunferencia c]. Y en tanto la circunferencia [e, en tono] azul, como la [circunferencia d, en tono] morado, ahí se crea una intersección [dando lugar al punto G], y ahí trazo una recta [que pasa por los puntos P y G] que determina cuál es laaaa [recta], para que se divida en partes iguales en ángulo.

Darío al comunicar su proceso de construcción lo realiza con la secuencialidad en que los objetos fueron construidos. El joven expresa un proceso detallado, aludiendo a cada objeto geométrico, por su tonalidad, esto quizás debido a que la formadora le otorgó colores a los objetos geométricos, ya que algunos de sus compañeros manifestaron que no eran visibles para ellos los rótulos, llevando a que no comprendieran el discurso y la coherencia entre la explicación y el dibujo producido. Durante la comunicación de Darío la formadora apoyó señalando los objetos geométricos en pantalla con el cursor en forma rítmica (figura 4). El profesor en formación inicial omite algunos objetos geométricos que están en la interfaz construidos.

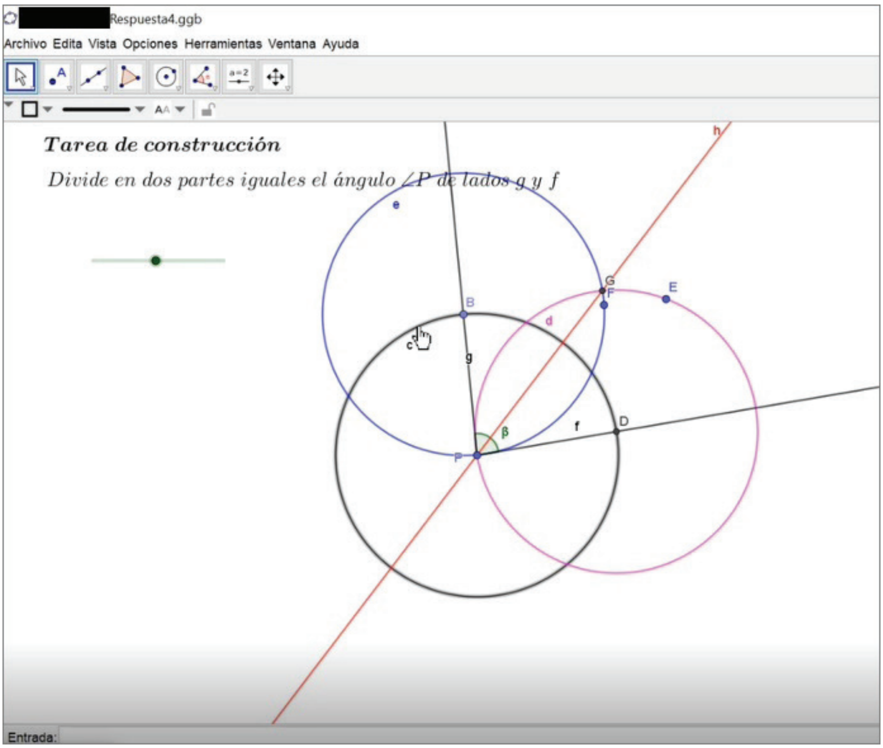


Figura 4. Sincronía entre discurso y cursor.

Formadora: (…) OK. Lo primero, ¿cuál es la primera acción que debemos realizar una vez que hacemos la construcción? (…) ¿Qué debo hacer una vez que tengo la construcción lista?

Martha: Eee (pensando lo que va a decir a continuación), si está correcto que cumple con los criterios que no se deforma.

Formadora: Aja, que no se deforme, (…). Tú dices para que no se deforme. En otras palabras, ¿puedo decir que la construcción es consistente? ¿Qué significa que una construcción es consistente?

Martha: Este, eeee, aaaaa, (risa), sabe, los tengo en mi cabeza, pero no sé cómo explicarlo.

Formadora: ¿Qué no debe pasar? Explícamelo así.

Martha: Lo que no tiene que pasar, es que no sé, es que al momento de abrir y cerrar un poco más el ángulo las circunferencias se…, una se vaya para allá, otra para allá, es decir las intersecciones [se] muevan, cosas así.

La formadora hace propicio el momento para pasar a la comprobación de la consistencia geométrica del dibujo dinámico realizado por Darío. En ese instante interviene Martha para intentar explicar qué es la consistencia geométrica, al indicar que el dibujo no debe deformarse. Dado que su intervención no fue muy clara, para ayudar a Martha la formadora plantea una pregunta puntual, ya que la joven manifiesta que no puede comunicar con claridad sus ideas, brindando como respuesta aquello que no debería ocurrir con el dibujo dinámico, aludiendo a que las invariantes geométricas deberían mantenerse al momento de modificar el valor del ángulo.

Formadora: [risa] Entonces cuando yo compruebo o intento comprobar que mi construcción es consistente o como decía Martha, muy bien, que no se deforma. (…). Yo les coloqué que es este deslizador que ven acá [mueve el cursor sobre la interfaz] que está en tono verde. Y yo lo voy a mover, al moverlo [la recta] h debe mantenerse [bisecando al ángulo]. ¿¡Qué está pasando allí!?

Victoria: Se está deformando porque crece un solo círculo y deberían crecer los dos al abrir o cerrar el ángulo.

Martha: Porque si yo abro más, el ángulo todo debería moverse [la recta h], en el sentido que se abre o se cierra.

Formadora: Siii, pero fíjense lo que está pasando aquí [moviendo el deslizador que permite realizar el barrido de un ángulo de 0° a 180°], en este punto (deslizador en una posición que permite trabajar con un ángulo obtuso) ¿la recta h sigue bisecando al ángulo? (...) ¿iqué está pasando ahí!?

Martha: Se pierde la recta.

La formadora, utiliza el deslizador modificando el valor del ángulo en un barrido entre 0° y 180° (figura 4a), para comprobar la consistencia geométrica del dibujo dinámico, formulando una pregunta que invita a las y los profesores en formación inicial a dialogar. La primera que interviene es Victoria, quien afirma que la construcción se deforma, argumentando que solo uno de los objetos (círculo) se modifica con el valor del ángulo, y el otro (círculo) no. La segunda en intervenir es Martha, expresando que al modificar el valor del ángulo la recta que lo biseca debería mantener su relación geométrica (bisecar el ángulo). La formadora para finalizar con la comprobación de la consistencia del dibujo dinámico, muestra en pantalla lo que ocurre con el dibujo cuando el ángulo es agudo (figura 4c) u obtuso (figura 4b) consultando por lo que pasaba con la construcción. Martha interviene para indicar que la recta desaparece.

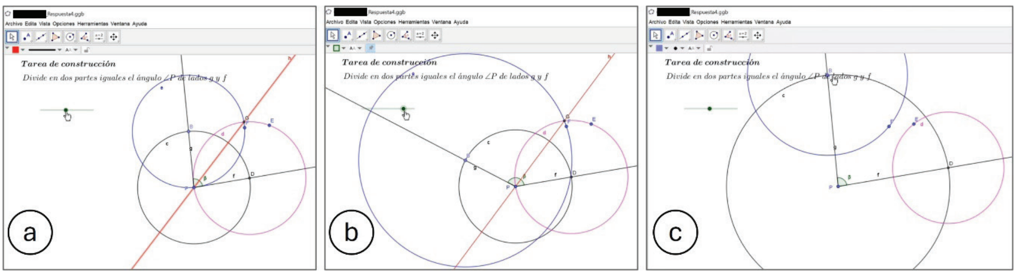


Figura 4: Modificación del ángulo.

Formadora: Muy bien, ¿cómo comprobaste que esta construcción responde a la demanda de la pregunta?

Darío: Primero yo lo hice porque así me acordaba que se hacía y creo que está correcto porque todos los radios [de las circunferencias] son iguales. Desde el punto P al punto B, y desde el punto D al punto G.

Formadora: ¿Cómo compruebas o justificas que efectivamente esa recta que trazaste y que está en color rojo, y se llama h divide en dos partes iguales al ángulo en P?

Darío: Bueno, esa era mi justificación la de los radios.

Darío: Que todos los radios son iguales, esa era mi justificación la que dije recién. No sé cuál podía ser la correcta.

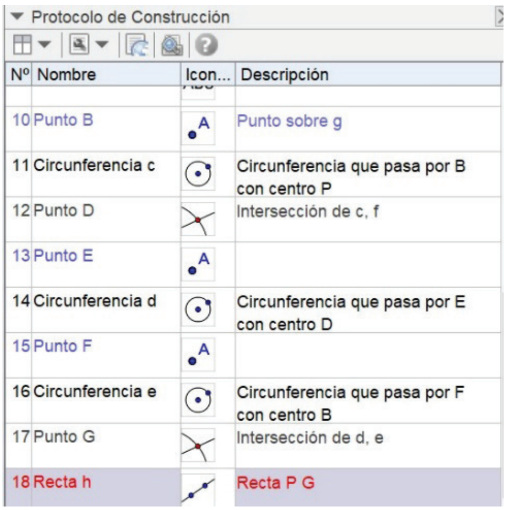
La formadora preguntó a Darío por la argumentación que da validez a su dibujo dinámico. El joven, responde que realizó la construcción como lo recordaba, es decir, la tarea presentada (o una similar) no eran nuevas para el joven. A lo anterior, añade que es correcto porque los radios de las circunferencias $\boldsymbol{e}$ y $\boldsymbol{d}$ son iguales. La formadora parece no comprender lo comunicado por Darío y refina su pregunta, a lo que Darío le afirma que su justificación se sustenta en el valor de los radios de las circunferencias, mencionando que desconoce cuál podía ser la correcta.

ANÁLISIS DE LA CONSISTENCIA GEOMÉTRICA DEL DIBUJO DINÁMICO

El proceso seguido por Darío para construir el dibujo dinámico (representante), resulta inconsistente cuando se realiza la prueba de arrastre, debido a que no conserva las invariantes geométricas en el GeoGebra. Sin embargo, al detallar el proceso que el joven realiza, el objeto geométrico (representado) es adecuado. Un aspecto que parece emerger es que Darío realizó una transferencia del proceso de construcción con otros artefactos, como la R y C, para dar respuesta a la tarea en el GeoGebra. Sin considerar que el GeoGebra por su configuración y potencial demanda que los objetos geométricos construidos conserven la relación entre ellos. Es posible que Darío desconocía cómo establecer dicha relación o no le dio atención.

El GeoGebra posee una función de *Protocolo de Construcción*, la cual entrega información de la secuencia de los objetos construidos, y brinda al usuario la posibilidad de recrearlos. El protocolo muestra la información al usuario por medio de columnas y filas. En las columnas, la información está asociada a los objetos construidos como: el nombre del objeto geométrico, la herramienta utilizada, descripción del objeto construido y los elementos de construcción (puntos, distancias u otros). Las columnas, indican el orden en que fueron construidos los objetos geométricos.

El protocolo de construcción de dibujo del dinámico realizado por Darío (figura 5), ayuda a comprender qué causa la inconsistencia geométrica ya que su descripción verbal del proceso seguido es adecuada. Al detallar la secuencia, se observa que el punto B pertenece al lado g del ángulo β, lado que por las condiciones establecidas en la hoja de trabajo tiene movimiento. El punto B, puede moverse sobre g, posteriormente es utilizado como centro de la circunferencia e, lo que produce que esta modifique su tamaño al variar el valor del ángulo en P.


Protocolo de Construcción

Nº	Nombre	Icon...	Descripción
10	Punto B		Punto sobre g
11	Circunferencia c		Circunferencia que pasa por B con centro P
12	Punto D		Intersección de c, f
13	Punto E		
14	Circunferencia d		Circunferencia que pasa por E con centro D
15	Punto F		
16	Circunferencia e		Circunferencia que pasa por F con centro B
17	Punto G		Intersección de d, e
18	Recta h		Recta P G

Figura 5: Protocolo de construcción del dibujo dinámico producido por Darío.

Adicional, las circunferencias e y d, pasan por puntos libres (E y F), es decir puntos realizados por percepción visual o que posteriormente de su construcción fueron ajustados al tamaño deseado. Las circunferencias e y d, luego se interceptan determinando el punto G, por donde pasa la bisectriz del ángulo (recta h). La forma de proceder pone de manifiesto lo comentado anteriormente, sobre la poca comprensión del GeoGebra para producir un dibujo dinámico y la conservación de las invariantes geométricas en cada objeto geométrico construido.

Al contrastar el proceso comunicado por Darío con el protocolo de construcción, se observó que el joven omite el valor del radio de las circunferencias e y d. La circunferencia d, tiene centro en D y pasa por el punto E. que es un punto libre. Es posible que Darío al utilizar la herramienta *Circunferencia (centro, punto)*, por percepción visual, concibió que la circunferencia pasaba por el punto P, haciendo un clic sobre la interfaz, dando lugar al punto E. Dicho procedimiento lo repitió con la circunferencia e, dando lugar al punto F (un punto libre), lo cual derivó en un dibujo dinámico inconsistente ya que las circunferencias e y d no guardaban relación con otros objetos. Cuando se realiza un dibujo dinámico, las invariantes geométricas se otorgan durante la construcción de todos los objetos, procurando que sean dependientes entre sí y cumplan la propiedad geométrica demandada, en el caso de la producción.

REFLEXIONES FINALES

En la experiencia reportada se presentan algunas situaciones que merecen colocar en debate con otros trabajos, y también otorgarles sentido. La formadora y las y los profesores en formación inicial se involucraron en el análisis y resolución de una forma cultural de acción y reflexión sobre las construcciones euclidianas con GeoGebra. En el devenir de la sesión que se analiza, la formadora, luego de que el profesor en formación inicial comunica el procedimiento seguido, promueve su discusión y se realiza la prueba de arrastre (comprobar la inconsistencia geométrica). Seguido, no se produce un diálogo orientado a explorar qué causó la inconsistencia, es decir, adoleció de tiempo dedicado a desentrañar las razones que originaron la inconsistencia, si fue de tipo conceptual o del uso del artefacto.

En ese instante se puede pensar que el artefacto no fue suficiente para ayudar a las y los profesores en formación inicial a revelar la razón de la inconsistencia. El uso del GeoGebra se distanció de la posibilidad de desplegar el contenido conceptual geométrico. La ausencia de un diálogo reflexivo que permitiera comprender hasta qué parte de la secuencia realizada fue geométricamente correcto, cuál fue el momento de inflexión que termina causando las invariantes geométricas en el dibujo dinámico producido, porqué deja de funcionar el proceso en el GeoGebra y cómo las potencialidades del software pueden contribuir en la movilización del saber geométrico en escena.

Un diálogo orientado a la diferencia entre objeto y representante pudo ser interesante para comprender a lo menos una causa de la inconsistencia. El GeoGebra permite establecer relaciones dinámicas entre objetos geométricos, tal como señalan Sandoval-C y Moreno-Armella (2012), representa una ventaja significativa frente al uso del P y L. Dado que permite a los usuarios que manipulen y exploren las construcciones de forma interactiva, facilitando la visualización de propiedades (invariantes geométricas). Es posible, que en el caso de Darío, ocurrió una trasferencia hacia el GeoGebra del proceso que suele llevarse en P y L para tareas de construcción; lo cual da indicios de los desafíos. A su vez, permite comprender la complejidad de introducir un SGD como el GeoGebra, para la resolución de tareas de construcción y la necesidad de diálogos más profundos sobre sus implicaciones.

La experiencia proporcionada a los profesores en formación inicial al realizar construcciones euclidianas con GeoGebra, muestra un espacio de trabajo geométrico que expone riqueza de los entornos dinámicos mediante la experimentación y/o ejecutabilidad de los objetos geométricos, a su vez asigna la cualidad de poder corroborar las relaciones establecidas (consistencia), mediante la prueba de arrastre. El software proporciona herramientas para llegar a conocer el objeto o relación geométrica que se trabaja, al momento de realizar una construcción fundamentada en las propiedades geométricas estructurales. Tal cualidad resulta más compleja en un entorno de P y L.

El contexto de la pandemia, fue relevante al momento de realizar la sesión, ya que, desde una perspectiva histórico-cultural, el aprendizaje es un encuentro con el saber, en el marco de un trabajo colectivo sensible de pensamiento y acciones realizadas por el cuerpo (signos, gestos, táctil, kinestésica y otros), los artefactos y el habla entrelazados. Durante el encuentro en modalidad virtual, no fue posible acceder a todas las posibilidades materiales y cognitivas que ofrecen los individuos. Solo se tuvo como registro el habla, y una combinación de lo kinestésico y gestual, emulado por el cursor del mouse en pantalla, principalmente por parte de la formadora. Dicha ausencia, eventualmente implicó la forma de hacer/reflexionar de la formadora al momento del análisis de la resolución de la tarea.

Para cerrar, es importante que se formulen actividades que puedan permitir hacer objeto de conciencia los saberes geométricos, en particular las construcciones euclidianas, que siempre se han considerado un contenido difícil por la necesidad de integrar diferentes ideas de la geometría (González-C., 2014). Así mismo, es imperativo que las actividades destinadas a la enseñanza-aprendizaje de la Geometría involucren más verbos que impliquen conjeturar y validar (Muñoz-Escolano, 2016). Aunado a lo anterior, la necesidad de indagar la toma de decisión en tiempo real de las y los formadores de profesores.

RECONOCIMIENTO

"Financiado por el Fondo de Adquisición de bienes y equipamiento menor, para proyectos de investigación educativa, 2023". Proyecto "Fortalecimiento de la investigación y la formación avanzada en Educación en el sistema de Universidades Estatales" RED 21995, PFUE 2021".

REFERENCIAS

Acosta Gempeler, M. E. (2007). La teoría antropológica de lo didáctico y las nuevas tecnologías. En L. Higueras, A. Castro, y García.F. (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas: aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (pp. 85–100). Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Acosta Gempeler, M. E., y Fiallo Leal, J. E. (2017). *Enseñando geometría con tecnología digital: una propuesta desde la teoría de las situaciones didácticas*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. https://doi.org/10.14483/9789585434462

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*(3), 245–274. https://doi.org/10.1023/A:1022103903080

Artigue, M. (2012). Mathematics education and literacy. En M. Artigue (Ed.), *Challenges in basic mathematics education* (pp. 13–18). UNESCO. https://doi.org/10.1080/14794802.2011.585835

Borgobello, A., y Espinosa, A. (2020). Enseñanza remota de emergencia: crisis, procesos y cambios en la educación superior. En F. Costa, y S. Garo (Comp.) *Notas de pandemia. Reflexiones, lecturas y experiencias escritas en tiempos de aislamiento social y virtualidad.* UNR Editora.

Camargo, L., y Acosta Gempeler, M. E. (2012). La geometría, su enseñanza y su aprendizaje. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, *32*, 4–8. https://doi.org/10.17227/ted.num32-1865

Cameron, S., Mulholland, J., y Branson, C. (2013). Professional learning in the lives of teachers: towards a new framework for conceptualising teacher learning. *Asia-Pacific Journal of Teacher Education*, *41*(4), 377–397. https://doi.org/10.1080/1359866X.2013.838620

Corrales-Jaar, J. (2021). Revisión actualizada: enseñanza de las matemáticas desde los entornos virtuales de aprendizaje. *Ciencia y Educación*, *5*(2), 25–40. https://doi.org/10.22206/cyed.2021.v5i2.pp25-40

Cucinotta, D., y Vanelli, M. (2020). WHO Declares COVID-19 a Pandemic. *Acta bio medica: Atenei parmensis*, *91*(1), 157–160. https://doi.org/10.23750/abm.v91i1.9397

da Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y prática de la educación matemática* (pp. 83-98). Graó. http://hdl.handle.net/10451/29194

Euclides. (1991). *Elementos. Versión Traducida por María Luisa Puertas Castaños* (Editorial Gredos).

González-C., J. (2014). Formación inicial de profesores en geometría con GeoGebra. *Revista Iberoamericana de educación*, *65*, 161–172. https://doi.org/10.35362/rie650400

Goos, M. (2013). Sociocultural perspectives in research on and with mathematics teachers: a zone theory approach. *ZDM*, *45*(4), 521–533. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0477-z

Laborde, C. (1997). Cabri-geómetra o una nueva relación con la Geometría. En L. Puig (Ed.), *Investigar y enseñar. Variedades de la Educación Matemática* (pp. 33–48). Una Empresa Docente" & Grupo Editorial Iberoamérica.

Llinares, S. (2021, 18 de febrero). *Formar profesores de matemáticas. Retos y desafíos en la actualidad. 2do Congreso Internacional de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.* [Video] https://www.youtube.com/watch?v=TpR2xGdJyDY&t=332s

Morales Chicana, L., Zuta Velayarse, L. M., Solis Trujillo, B. P., Fernández Otoya, F. A., y García González, M. (2023). El uso del Software GeoGebra en el aprendizaje de las matemáticas: Una revisión sistemática. *Revista Referencia Pedagógica*, *11*(1), 2–13.

Muñoz-Escolano, J. (2016). Crónica del encuentro: Enseñar matemáticas con GeoGebra: retos, roles, resultados. *Revista Suma*, *81*.

Radford, L. (2015). Methodological Aspects of the Theory of Objectification. *Perspectivas da Educação Matemática*, *8*(18), 547–567.

Radford, L. (2016). The theory of objectification and its place among sociocultural research in mathematics education. *International Journal for Research in Mathematics Education (RIPEM)*, *6*(2), 187–206.

Radford, L. (2017a). Aprendizaje desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación. En B. D'Amore y L. Radford (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos* (Primera, pp. 115–132). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Radford, L. (2017b). Saber y conocimiento desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación. En B. D'Amore y L. Radford (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos* (Primera, pp. 97–112). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Radford, L. (2023a). *La teoría de la objetivación: una perspectiva vygotskiana sobre saber y devenir en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Ediciones Uniandes. https://doi.org/10.51570/Educ202312

Radford, L. (2023b). Sujeto, Objeto, Cultura y la formación del Conocimiento. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura–REMATEC*, *18*(45), e2023002. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2023.n45.pe2023002.id541

Radford, L., y Empaey, H. (2017). Culture, Knowledge and the Self: Mathematics and The Formation of New Social Sensibilities in the Renaissance and Medieval Islam. *Revista Brasilera de História da Matemática, Festschirt (Ubiratan D´Ambrosio)*, *Especial 1*, 231–254.

Ribeiro, A., y da Ponte, J. P. (2019). Professional learning opportunities in a practice-based teacher education programme about the concept of function. *Acta Scientiae*, *21*(2). https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21iss2id5002

Rojano, T. (2014). El futuro de las tecnologías digitales en la educación matemática: prospectiva a 30 años de investigación intensiva en el campo. *Educación Matemática*, *26*(Especial), 11–30.

Sánchez, I. C., y Prieto G, J. L. (2019). Procesos de objetivación alrededor de las ideas geométricas en la elaboración de simuladores con Geogebra. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *14*(1), 55–83. https://doi.org/10.30827/pna.v14i1.8657

Sánchez Noroño, I. V., y Prieto G., J. L. (2022). Diseño de una actividad formativa para futuros profesores de matemáticas sobre construcciones euclidianas con GeoGebra. *Horizontes. Revista de Investigación en Ciencias de la Educación*, *6*(24), 933–946. https://doi.org/10.33996/revistahorizontes.v6i24.387

Sánchez-B, C. H. (2012). La historia como recurso didáctico: el caso de los Elementos de Euclides. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, *32*, 71–92. https://doi.org/10.17227/ted.num32-1860

Sandoval Cáceres, I. T., y Moreno-Armella, L. (2012). Tecnología digital y cognición matemática: retos para la educación. *Horizontes Pedagógicos*, *14*(1), 21–29.

Simson, R. (1774). *Los seis primeros libros y el undécimo, y duodécimo de los elementos de Euclides: traducidos de nuevo sobre la versión latina de Federico Comandino conforme a la fiel, y correctísima edición de ella.* Universidad Complutense de Madrid.

Tardif, M. (2002). *Los saberes del docente y su desarrollo profesional.* Narcea Editores.

Tosca, T. (1707). *Compendio Mathematico. Tomo I: en que se contienen todas las materias más principales de las ciencias que tratan de la cantidad.* Imprenta de Antonio Bordazar.

Towers, J. (2010). Learning to teach mathematics through inquiry: a focus on the relationship between describing and enacting inquiry-oriented teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13*(3), 243–263. https://doi.org/10.1007/s10857-009-9137-9

Autor de contacto:

Irene Victoria Sánchez Noroño

Dirección: Universidad Arturo Prat, Iquique-Casa central, Facultad de Ciencias Humanas, Carrera Pedagogía en Matemática y Física.
Av. Arturo Prat Chacón 2120, Iquique, Tarapacá, Chile, 1100000
irsanchez@unap.cl