Explorando Funciones con una Calculadora Gráfica[1]

Introducción

Las calculadoras de mano, con capacidad de graficar y ser programadas, ofrecen a un costo mucho menor, posibilidades que hace apenas unos años podían ser realizadas sólo con una computadora. El uso de las calculadoras gráficas, así como el de las computadoras, en la enseñanza de las matemáticas, no es un fin en sí mismo, sino que es un medio para lograr una mejora en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Para decidir cuál es la mejor forma de utilizar estas herramientas, hay muchos factores que tenemos que tomar en cuenta que son comunes tanto a las calculadoras como a las computadoras ("Editorial", 1989), tales como cuestiones relacionadas con los contenidos, sus prioridades y secuencias; cuestiones relacionadas con los métodos de enseñanza, el papel del maestro y del alumno, la organización y el tiempo de la clase, el proceso de aprendizaje; cuestiones relacionadas con la preparación de maestros de matemáticas. En el presente trabajo no se pretende considerar todos estos aspectos, pero se tratará de ilustrar cómo se puede utilizar la calculadora gráfica de modo que utilice principios matemáticos poderosos, es decir, que se puedan utilizar en una variedad de situaciones importantes, y al mismo tiempo que emplee elementos de la tecnología actual que seguirán siendo importantes en la siguiente generación de tecnología y de programas y paquetes. De acuerdo con Ralston (1984) algunos de estos elementos son:

Algoritmo
Matemáticas constructivas
Iteración
Recursión

En este trabajo utilizaremos los primeros tres con una calculadora gráfica.

Alfinio Flores Peñafiel
Arizona State University
E.U.A.

[1] Este artículo es parte del trabajo presentado en ICME-7, Quebec, Canadá.

Estrategia de cuatro pasos

Hay una estrategia de cuatro pasos muy poderosa que se utiliza en muchas partes de la matemática para aproximar soluciones (por ejemplo, el método de bisección o el método de Newton). Esta estrategia se puede traducir a un algoritmo que se puede implantar fácilmente con programas de computación (Flores, 1988), y también con calculadoras gráficas para explorar funciones gráficamente.

ESTRATEGIA

1 Aproxima
2 Verifica si tu aproximación es suficientemente buena
3 Obtén una mejor aproximación a partir de la anterior
4 Repite el proceso a partir del paso 2

A continuación se ilustra cómo utilizar esta estrategia iterativa para explorar funciones utilizando la calculadora TI-81. Las mismas actividades se pueden adaptar a cualquiera de las calculadoras gráficas que hay en el mercado. Esta estrategia de cuatro pasos puede ser implantada utilizando la capacidad de la calculadora para graficar, rastrear y agrandar.

1 Grafica y rastrea
2 Verifica si la solución es suficientemente buena
3 Agranda y rastrea
4 Repite el proceso a partir del paso 2

Utilizar esta estrategia para explorar funciones permite un tratamiento unificado de problemas diversos relacionados con funciones (ceros de funciones, máximos y mínimos, ecuaciones simultáneas), y al mismo tiempo permite el acceso a estos temas a alumnos a quienes previamente les quedaba vedado el acceso por su preparación deficiente en el manejo algebraico de expresiones simbólicas (Flores y McLeod).

Capacidades gráficas de la calculadora TI-81

La pantalla gráfica de la TI-81 consiste de un rectángulo formado por 96 × 64 pequeños cuadrados (pixeles) de cristal líquido. Para evitar que las gráficas se distorsionen, el intervalo (o rango) del eje x y el del eje y deben estar en proporción de 3 a 2. Puedes escoger la escala en esta pantalla utilizando la tecla ZOOM. Al hacerlo aparecerá el siguiente menú:

ZOOM
1: Box
2: Zoom In
3: Zoom Out
4: Set Factors

5: Square
6: Standard
7: Trig
8: Integer

Oprime el número deseado (o mueve el cursor con [▼] y oprime [ENTER]), luego pulsa [ENTER] .

La opción 6 utiliza el rango -10 a 10 en ambos ejes, y como la pantalla no es un cuadrado, esto distorsiona las gráficas. Si después de escoger la opción 6 eliges la opción 5 para hacer que las escalas en ambos ejes sean adecuadas para la pantalla, las escalas irán de -15 a 15 en el eje x, y de 10 a 10 en el eje y. (Para una descripción más detallada del uso de la TI-81 ver Demana, Waits, Vonder Embse, y Foley, 1991.)

Gráficas

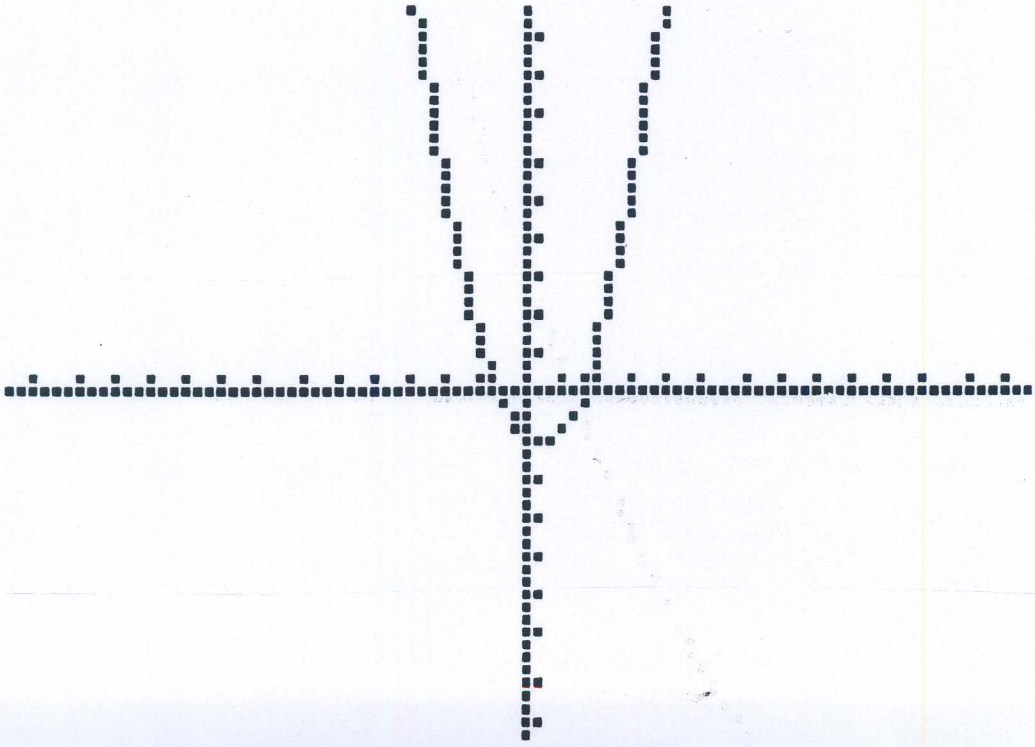
Para graficar una función, tienes que teclear su ecuación primero. Oprime

[Y=]

y teclea la ecuación $y = x^2 - x - 1$

Oprime [X|T] [x^2] [−] [X|T] [−] [1]

Oprime [GRAPH] . La calculadora mostrará la siguiente gráfica.



Rastrear

Con la tecla **TRACE** puedes mover el cursor a lo largo de la curva. Mueve el cursor a lo largo de la curva oprimiendo

TRACE y las flechas ▶ ◀.

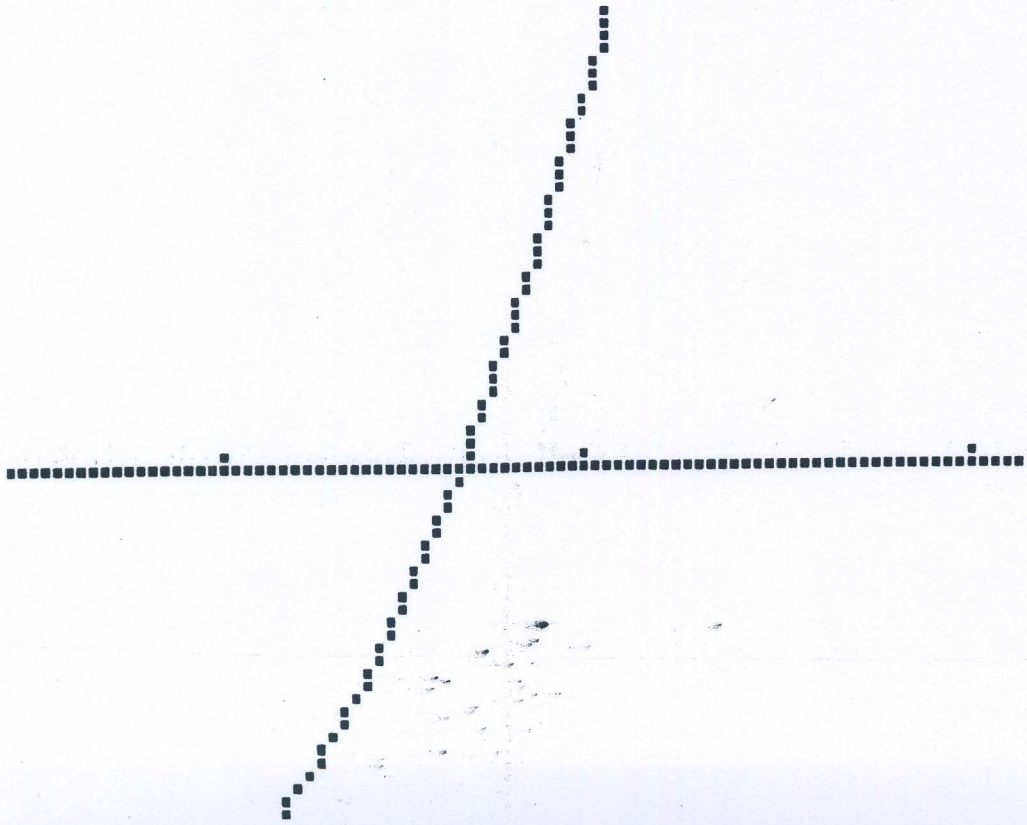
Nota que la calculadora exhibe las coordenadas del punto de la gráfica conforme mueves el cursor.

Si se quiere encontrar una aproximación al valor donde la curva atraviesa el eje x, podemos rastrear hasta obtener un valor de y tan próximo a 0 como sea posible ($y = .27$). Para este valor podemos encontrar un valor aproximado para la raíz de la función $x = 1.7...$

Agrandar

Una vez que tienes el curso en el punto deseado de la pantalla, oprime ZOOM y escoge la opción 2: Zoom In.

La calculadora mostrará la siguiente gráfica



Actividad 1. Obtener un cero de una función:

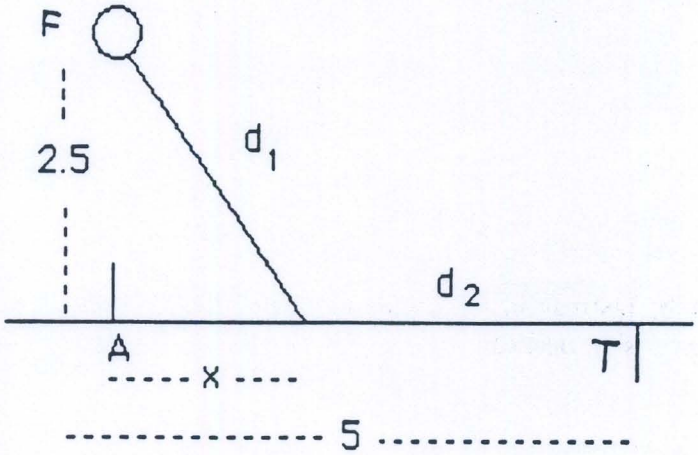
Para encontrar los valores de x donde la curva $y = x^2 - x - 1$ cruza el eje horizontal, podemos combinar rastrear con agrandar. Agrandando con un factor de 10 y rastreando nuevamente, podemos obtener una mejor aproximación $x = 1.62...$

Agrandando y rastreando varias veces obtenemos $x = 1.618...$ (la solución exacta es la razón dorada). Podemos repetir el proceso hasta que obtengamos la precisión deseada.

Actividad 2. Hallar un mínimo:

Considera el siguiente problema: Minimiza el tiempo que toma a una persona ir del faro F a la tienda T. Las velocidades en el mar y en la tierra son:

remar	$V_1 = 3$ km/h
caminar	$V_2 = 6$ km/h



Si x es la distancia de A al punto donde la persona deja la lancha, las distancias son entonces

$$d_1 = \sqrt{x^2 + 2.5^2}$$

$$d_2 = 5 - x$$

Los tiempos correspondientes para cada parte del trayecto son por tanto

$$t_1 = \sqrt{x^2 + 2.5^2}/3$$

$$t_2 = (5 - x)/6$$

Para resolver el problema hay que encontrar el mínimo de la función

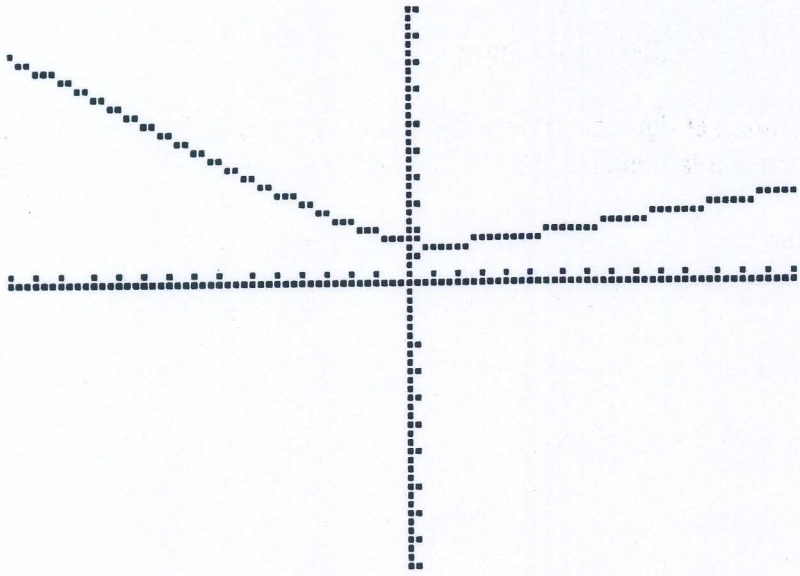
$$Y = \sqrt{x^2 + 2.5^2}/3 + (5 - x)/6$$

Para graficar la función, oprime [Y=]
teclea en Y_2 =

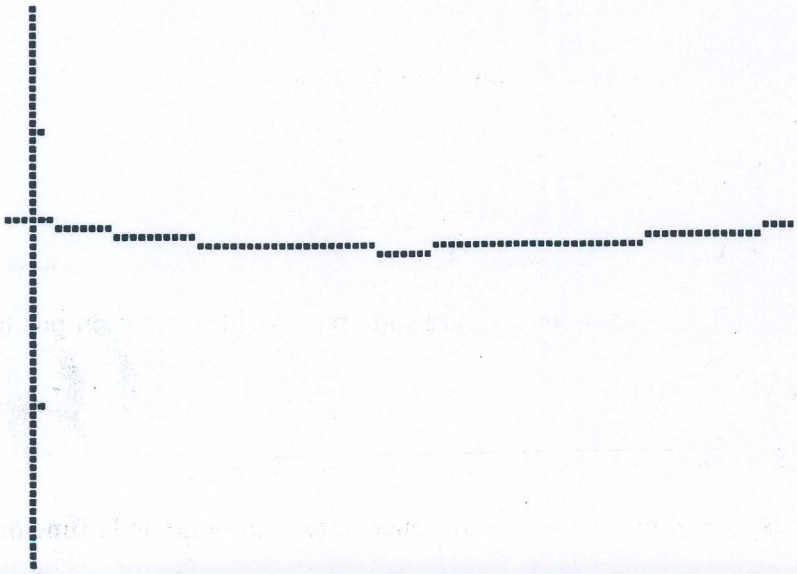
[2nd] [√] [(] [X|T] [x^2] [2] [.] [5] [x^2] [)] [÷] [3] [+]
[(] [5] [−] [X|T] [)] [÷] [6]

(Para evitar graficar la ecuación de la actividad anterior, mueve el cursor al signo = después de Y_1 y oprime [ENTER])

Oprime [GRAPH]. La calculadora mostrará la siguiente gráfica.



Graficando, rastreando y agrandando repetidamente, encontramos la solución con la precisión deseada.



$x = 1.44$ $y = 1.55$

Actividad 3. Solución de ecuaciones simultáneas:

La misma estrategia utilizando las capacidades de graficar, rastrear y agrandar pueden servir para resolver ecuaciones simultáneas tales como

$y = (\cos x)^2$

$y = \sin x$

Antes de graficar una función trigonométrica, oprime ZOOM y escoge la opción 7:Trig, y luego oprime ZOOM otra vez y elige la opción 5:Square. La calculadora utilizará de este modo un rango apropiado para graficar funciones trigonométricas sin distorsionar las gráficas.

Para resolver el sistema de ecuaciones podemos graficar las siguientes dos funciones:

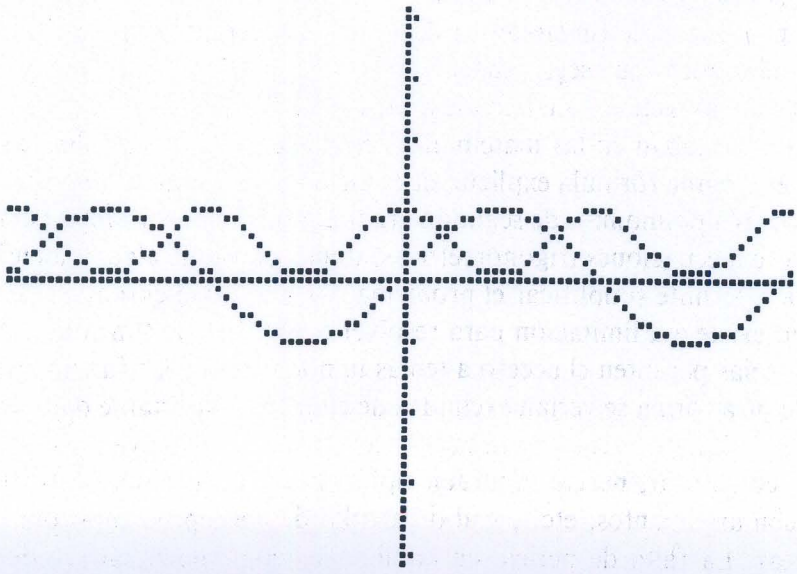
$Y_3 = (\cos x)^2$

$Y_4 = \sin x$

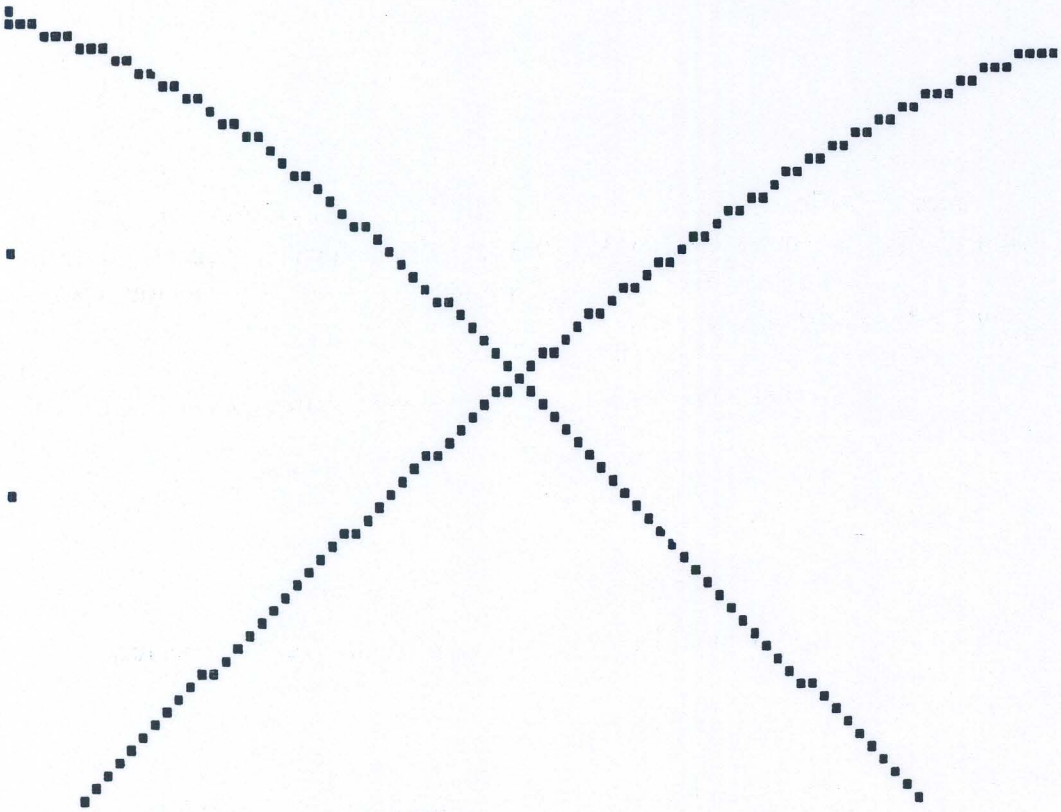
Las funciones trigonométricas sin (x) y cos (x) están dadas por las teclas

[sin] [cos]

La calculadora mostrará las siguientes gráficas. Las soluciones de las ecuaciones simultáneas son los valores de x para los cuales el valor de y es el mismo para ambas; es decir, donde las dos gráficas se intersectan.



Rastrea (TRACE) y agranda and (ZOOM in) para obtener la primera solución positiva con tres cifras decimales.



$x = .6662...$ $y = .6180...$

(Observa el valor de y, ¡es el inverso de la razón dorada!)

Conclusión

Las calculadoras gráficas tienen capacidades que permiten resolver de manera unificada problemas de funciones, utilizando estrategias poderosas de las matemáticas, y elementos que seguirán siendo importantes en la tecnología, tales como algoritmo, iteración y matemática constructiva. En el pasado, este tipo de problemas se trataban en las matemáticas escolares sólo en aquellos casos para los cuales existe una fórmula explícita de solución. Por ejemplo, restringir la búsqueda de ceros a polinomios de segundo grado, donde se puede aplicar la fórmula cuadrática, o a ecuaciones trigonométricas, donde el uso de alguna identidad trigonométrica permite simplificar el problema. Utilizando el enfoque gráfico aquí descrito no existe esa limitación para resolver problemas de funciones. Además, estas estrategias permiten el acceso a temas importantes de las funciones a alumnos que de otra forma se verían excluidos de ellos. Es importante dar a los alumnos puntos múltiples de entrada al pensamiento matemático avanzado (explorar, descubrir, conjeturar, buscar contraejemplos, hacer deducciones, justificar, poner a prueba argumentos, etc.), y al desarrollo de conceptos importantes de las matemáticas. La falta de pericia en habilidades computacionales y de manejo

simbólico, no debe constituir un bloqueo definitivo para los alumnos. La calculadora gráfica, además de permitir al alumno el uso de representaciones alternas de las funciones, ofrece un excelente punto de entrada.

Bibliografía

Demana, F., Waits, B. K., Vonder Embse, C., & Foley, G. (1991). *Graphing calculator and computer graphing laboratory manual,* 2a. ed., Reading, Mass: Addison Wesley.

"Editorial" (1989). *Educación Matemática,* 1(2), 3-5.

Flores, Alfinio. (1992, agosto). *"Exploring iterative processes and functions with a graphing calculator."* (Trabajo presentado en International Congress on Mathematical Education-7), Quebec, Canada.

Flores, Alfinio. (1988) "Computer-Calculated Roots of Polynomials." En *The Ideas of Algebra, 1988 Yearbook.* National Council of Teachers of Mathematics, p. 164-169.

Flores Peñafiel, Alfinio, y McLeod, Douglas. "Cálculo con computadoras y calculadoras gráficas." (Manuscrito enviado para su publicación.)

Ralston, A. (1984). "Computing and computer science in the pre-service education of secondary school teachers of mathematics." En *A collection of papers on pre-service education,* Action Group 5, ICME-5. Adelaide, Australia.