Problemas

En este número deseo recordarles los problemas 2 y 3. El 2 lo discutiremos y el problema 4 es el que analizaremos dentro de dos números.

Esperamos sus soluciones o propuestas de problemas para publicarlos en esta sección de la revista.

Problema 2

Una pareja (a, b) de números enteros positivos a y b es coprima si su máximo común divisor es 1. Encuentre el número de parejas coprimas tales que la suma de los enteros positivos que la componen es 7250.

Problema 3

Un banco propone inversiones con las siguientes condiciones:

(a) El primer depósito (capital inicial) puede ser cualquier cantidad, siempre y cuando sea mayor de 1 peso.
(b) El interés anual calculado al final de cada año y sumado al capital es un centavo menos que el 10% del capital de ese año. (Las fracciones de centavo se descartan).
(c) El depósito más los intereses acumulados se devuelven al cabo de seis años.

Encuentre el menor depósito inicial para que en ningún año se tenga que descartar fracciones de centavos.

Carlos Bosch Giral
Instituto Tecnológico Autónomo de México

Problema 4

Un conjunto finito de rectas en el plano está en posición general si no hay dos que sean paralelas y no hay tres que sean concurrentes. Determine el número de regiones en las que el plano queda dividido por un conjunto de n rectas en posición general.

Discutamos ahora el problema 2

En teoría podríamos enlistar todas las parejas de enteros positivos cuya suma es 7250 y contar aquellas que sean coprimas:

(1, 7249),	(2, 7248),	(3, 7247),	(4, 7246),	(5, 7245),	(6, 7244),	...,	(7249, 1)
sí	no	sí	no	no	no		sí

Sin embargo, esto nos llevaría mucho tiempo además de ser tedioso.

Hay 7249 parejas y para algunas tales como (3481, 3769) se necesita algo de trabajo para decidir si es o no coprima. Por supuesto (a, b) es coprima, si (b, a) es coprima así que basta comprobar en la lista anterior a las parejas de (1, 7249) hasta (3625, 3625). Sin embargo, aun la mitad de 7250 son demasiadas parejas. ¿Habrá un mejor método?

Por supuesto, una posibilidad es examinar algunas de las 7249 parejas y ver si encontramos algún patrón. La primera observación es que cada dos parejas (2, 7248), (4, 7246), (6, 7244), (8, 7242) etc... obtenemos parejas de números pares y por supuesto no son coprimas. Lo mismo sucede cada cinco parejas, pues (5, 7245), (10, 7240), (15, 7235) etc... tienen ambos números que son múltiplos de 5. Y por lo tanto no son coprimas.

Otro posible camino sería preguntarse si 7250 tiene alguna propiedad especial o bien si al sustituir 7250 por un número n más pequeño, el problema es esencialmente el mismo. Examinemos los casos para $n = 10, 11, 12$

$n = 10$	(1, 9),	(2, 8),	(3, 7),	(4, 6),	(5, 5),	(6, 4),	(7, 3),	(8, 2),	(9, 1)		
	sí	no	sí	no	no	no	sí	no	sí		
$n = 11$	(1,10),	(2, 9),	(3, 8),	(4, 7),	(5, 6),	(6, 5),	(7, 4),	(8, 3),	(9, 2),	(10, 1)	
	sí	sí	sí	sí	sí	sí	sí	sí	sí	sí	
$n = 12$	(1,11),	(2,10),	(3, 9),	(4, 8),	(5, 7),	(6, 6),	(7, 5),	(8, 4),	(9, 3),	10,2),	(11,1)
	sí	no	no	no	sí	no	sí	no	no	no	sí

Esta tabla se puede extender, pero no es necesario, pues ya aquí uno se puede dar cuenta que si n es primo todas las parejas son coprimas, y si no, sólo algunas.

Veamos más de cerca el caso en que n sea compuesto, por ejemplo $n = 10$. Las parejas coprimas son (1, 9),(3, 7),(7, 3),(9, 1). Observemos que el primer elemento de cada pareja es 1, 3, 7 y 9 y que esos son precisamente los números enteros positivos menores que 10, y que no tienen factores comunes con 10 mayores que 1; es decir, que son coprimos con 10.

De manera similar sucede para $n = 12$, las primeras componentes son 1, 5, 7 y 11, números enteros positivos menores que 12 y coprimos con 12.

Conjetura: Si $a + b = n$ entonces (a, b) es una pareja coprima si y sólo si (a, n) es una pareja coprima.

Esta conjetura no es difícil de probar. Supongamos que $d > 1$ y que divide a a y a b; así $a = a_1d$ y $b = b_1d$. Entonces $n = a + b = a_1d + b_1d = (a_1 + b_1)d$, de modo que d también divide a n. De manera semejante, se puede probar que si $d > 1$ y es un divisor común de a y n también divide a b,

Hemos simplificado el problema enormemente, pues en vez de contar todas las parejas que son coprimas y suman n, podemos ahora contar los números enteros entre 1 y n que son coprimos con n. De la lista anterior tenemos que si

$n = 10$	el número de coprimos con n entre 1 y n es 4
$n = 11$	el número de coprimos con n entre 1 y n es 10
$n = 12$	el número de coprimos con n entre 1 y n es 4

Bien, ahora el problema es contar el número de enteros entre 1 y n que sean coprimos con n. Uno se podría preguntar cuáles enteros no son coprimos con n. Sea $n = 10 = 2.5$ los enteros que no son coprimos con 10, son los divisibles por 2 o los divisibles por 5. Hay cuatro enteros pares entre 1 y 9 (uno menos que $\frac{10}{2}$). En general si n es par, hay $\frac{n}{2} - 1$ números pares entre 1 y $n - 1$.

Tal vez sea más claro escribir esto como:

Si n es par hay $\frac{n}{2}$ enteros pares entre 1 y n. En particular hay $\frac{10}{2} = 5$ enteros pares entre 1 y 10. De manera análoga, entre 1 y 10 hay $\frac{10}{5} = 2$ enteros divisibles por 5.

Lo anterior significa que hay $\left(\frac{10}{2} + \frac{10}{5}\right) = 5 + 2 = 7$ números divisibles por 2 y por 5. No exactamente, ya que uno de ellos es 10 que es divisible por ambos y, por lo tanto, lo estamos contando dos veces. Así que la cuenta correcta es $\left(\frac{10}{2} + \frac{10}{5}\right) - 1 = 6$ enteros divisibles por 2 o por 5. De donde se tendrían $10 - \left(\frac{10}{2} + \frac{10}{5}\right) + 1 = 4$ coprimos con 10. Esto parece **correcto.**

Generalicemos lo anterior. Sea $n = p^aq^b$ un producto de potencias de primos diferentes.

Entre los enteros de 1 a n hay $\left(\frac{n}{p}\right.$ divisibles por p, y $\left.\frac{n}{q}\right)$ divisibles por q. Sin embargo, hay algunos divisibles por ambos. ¿Cuántos? Como p y q son primos diferentes, ser divisible por ambos quiere decir que son divisibles por el producto pq. Así que hay

$$n - \left(\frac{n}{p} + \frac{n}{q}\right) + \frac{n}{pq} = p^aq^b - p^{a-1} - p^aq^{b-1} + p^{a-1}q^{b-1}$$
$$= (p^a - p^{a-1})(q^b - q^{b-1})$$

números enteros entre 1 y n coprimos con n. De este modo, si $n = 12 = 2^3(3)$ se tienen $(2^2 — 2)(3 — 1) = 4$ números coprimos con 12.

Todavía tenemos que hacer algunas consideraciones para poder resolver el problema original. ¿Qué pasa si $n = p^a q^b r^c$ con p, q, r primos diferentes? Esto es importante pues $7250 = 2(5^3)(29)$.

Por lo que hemos visto antes, entre 1 y n hay

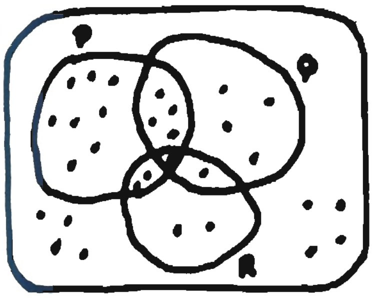
$\frac{n}{p}$ números divisibles por p

$\frac{n}{q}$ números divisibles por q

$\frac{n}{r}$ números divisibles por r.

Esta cuenta contiene a los divisibles por pq, pr y qr así como los divisibles por pqr. De manera que el número de coprimos con n será igual a:

$$n - \left(\frac{n}{p} + \frac{n}{q} + \frac{n}{r}\right) + \left(\frac{n}{pq} + \frac{n}{pr} + \frac{n}{qr}\right) - \frac{n}{pqr}$$



El alternar los signos es algo usual y se debe a que primero se incluyen de más y luego se excluyen algunos. El siguiente diagrama sirve para aclarar este asunto. El ejemplo es para $n = 30$ $p = 2$, $q = 3$, $r = 5$, donde los puntos dentro de P, Q, R representan números divisibles por 2, 3, 5 respectivamente, los puntos en la intersección de P y Q representan números divisibles por 2 y 3, es decir, por 6, etc.

El número de números coprimos con 30 entre 1 y 30 es el de puntos fuera de P, Q, R lo que es igual al total de puntos menos (los puntos de P más de Q más de R) más (los que están en $P \cap Q$ y $P \cap R$ y $Q \cap R$), menos los de $P \cap Q \cap R$. Esto es, $30 — (15 + 10 + 6) + (5 + 2 + 3) — 1 = 8$.

Ahora no queda más que resolver el problema para $n = 7250$. Es decir,

$$7250 - \left(\frac{7250}{2} + \frac{7250}{5} + \frac{7250}{29}\right) + \left(\frac{7250}{10} + \frac{7250}{58} + \frac{7250}{145}\right) - \frac{7250}{290} = 2800$$

Así que hay 2800 parejas (ordenadas) cuya suma es 7250 y que son coprimos.

No queda más que escribir ordenadamente la solución, lo cual se deja al lector. Además quisiéramos dejar también algunos ejercicios suplementarios como:

Verifique que si $n = p^a q^b r^c$ entonces

$$n - \left(\frac{n}{p} + \frac{n}{q} + \frac{n}{r}\right) + \left(\frac{n}{pq} + \frac{n}{pr} + \frac{n}{qr}\right) - \frac{n}{pqr} =$$

$$(p^a - p^{a-1})(q^b - q^{b-1})(r^c - r^{c-1})$$

De modo que en el problema se tiene

$$(2 - 2^0)(5^3 - 5^2)(29 - 29^0) = 2800$$

Establezca una fórmula para $n = p^a q^b r^c s^d$, con p, q, r, s primos distintos, y finalmente el caso general $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$, con $p_1, p_2, \ldots, p_k$ primos distintos.