Generalización de la Regla de Peletarius

1. Introducción. Regla de Peletarius

En la integración de funciones racionales se conocen varias reglas para obtenerlas. El método más conocido, y que se explica en bachillerato, es el de descomposición en fracciones mediante identificación de coeficientes. Este procedimiento se basa en la determinación de los numeradores de las fracciones simples, producto de la descomposición. Si las raíces del denominador son simples, el cálculo es inmediato; pero si las raíces son múltiples, esto conduce a la resolución de un sistema de ecuaciones lineales, que puede ser muy laboriosa.

Otro procedimiento que se emplea es el llamado *método de Hermite.* Como es sabido, se obtiene directamente la parte racional de la integral y se tiene que hallar la integral de una fracción cuyo denominador está formado por un polinomio de raíces simples (reales o complejas). Este método también se basa en la identificación de coeficientes, previa derivación de la parte racional. Es obvio comentar que este procedimiento resulta en muchas ocasiones, largo y pesado.

Con la regla de Peletarius. *Jacques Peletier* (1517-1582) (véase [3]), se integran fácilmente funciones del tipo

$$\frac{P[x]}{(x-a)^n}$$

donde $P[x]$ es un polinomio de grado arbitrario.

Debido a que este método es poco conocido, vamos a exponer sus fundamentos con un poco de detalle:

Se parte de la conocida relación de la división

$$D = c_1 \cdot d + r_1, \tag{1.1}$$

Raúl Tomás Blanquer
Instituto de Bachillerato Blasco Ibáñez
Valencia, España

siendo D el dividendo, d el divisor, c_1 el cociente y r_1 el residuo o resto.

$$\frac{D}{d} = c_1 + \frac{r_1}{d}. \tag{1.2}$$

Tomando c_1 como dividendo, por (1.1) se tiene

$$c_1 = c_2 \cdot d + r_2, \tag{1.3}$$

y en consecuencia,

$$\frac{c_1}{d} = c_2 + \frac{r_2}{d}. \tag{1.4}$$

Dividiendo (1.2) por d y sustituyendo (1.4)

$$\frac{D}{d^2} = \frac{c_1}{d} + \frac{r_1}{d^2} = c_2 + \frac{r_2}{d} + \frac{r_1}{d^2},$$

y así sucesivamente. Al final del proceso se obtiene

$$\frac{D}{d^n} = c_n + \frac{r_n}{d} + \frac{r_{n-1}}{d^2} + \ldots + \frac{r_1}{d^n}. \tag{1.5}$$

Si el polinomio del numerador es de grado menor que n, las expresiones c_n, r_n, r_{n-1}, ..., r_1 son valores numéricos y la fracción inicial queda descompuesta en fracciones simples, aptas para la integración inmediata. Es obvio decir que los coeficientes citados se obtienen automáticamente mediante la aplicación sucesiva de la regla de Ruffini, ya que el divisor d es del tipo $x - a$.

El propósito de este trabajo es extender el método de Peletarius al caso de que los denominadores posean más de una raíz (múltiple o simple). Como se verá a continuación, en los casos usuales el cálculo se reduce considerablemente. Hemos de indicar que este método también sirve para raíces complejas, aunque no es muy aconsejable, en vista de lo tedioso que resulta trabajar en complejos.

2. Denominadores con una raíz simple y otra múltiple

En esta parte estudiaremos el desarrollo de funciones racionales del tipo

$$\frac{P[x]}{(x - a)^n (x - b)} \tag{2.1}$$

en las que, como antes, $P[x]$ es un polinomio de grado arbitrario.

Para ello, estudiaremos en primer lugar la siguiente descomposición:

Proposición 2.1 *Para todo $n \in N$, se cumple*

$$\frac{1}{(x - a)^n (x - b)} = \sum_{s=1}^{n} \frac{(-1)^{s-1}}{(a - b)^s} \frac{1}{(x - a)^{n-s+1}} + \frac{1}{(b - a)^n} \frac{1}{(x - b)}, \tag{2.2}$$

$a, b \in \boldsymbol{R}$, con $a \neq$ b.

Demostración:

Procederemos por inducción.

1. Comprobemos que se verifica para $n = 1$:
   Se cumple de inmediato

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{(a-b)}\,\frac{1}{x-a} + \frac{1}{b-a}\,\frac{1}{x-b}; \qquad (2.3)$$

que es la expresión obtenida empleando el método de identificación de coeficientes.

2. Supongamos que la fórmula sea cierta para n.

3. Hemos de probar su validez para $n + 1$:
   Dividiendo (2.2) por $x - a$,

$$\frac{1}{(x-a)^{n+1}(x-b)} = \sum_{s=1}^{n} \frac{(-1)^{s-1}}{(a-b)^s}\,\frac{1}{(x-a)^{n-s+2}} + \frac{1}{(b-a)^n}\,\frac{1}{(x-a)(x-b)}. \qquad (2.4)$$

Si tenemos en cuenta el primer paso de la inducción (2.3), resulta

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-a)^{n+1}(x-b)} &= \sum_{s=1}^{n} \frac{(-1)^{s-1}}{(a-b)^s}\,\frac{1}{(x-a)^{n-s+2}} \\ &+ \frac{(-1)^n}{(b-a)^{n+1}}\,\frac{1}{(x-a)} + \frac{1}{(b-a)^{n+1}}\,\frac{1}{x-b} \\ &= \sum_{s=1}^{n+1} \frac{(-1)^{s-1}}{(a-b)^s}\,\frac{1}{(x-a)^{(n+1)-s+1}} + \frac{1}{(b-a)^{n+1}} \\ &\frac{1}{x-b}.\end{aligned}$$

Pasemos ahora a desarrollar la expresión (2.1). Aplíquese en primer lugar la regla de Ruffini a la expresión $\frac{P[x]}{x-b}$. De nuevo obtenemos un cociente $P_1[x]$ y un residuo R:

$$\frac{P[x]}{x-b} = P_1[x] + \frac{R}{x-b}.$$

Dividiendo por $(x-a)^n$,

$$\frac{P[x]}{(x-a)^n(x-b)} = \frac{P_1[x]}{(x-a)^n} + \frac{R}{(x-a)^n(x-b)}.$$

Apliquemos a continuación la regla de Peletarius al primer sumando y la **Proposición 2.1** al segundo,

$$\frac{P[x]}{(x-a)^{n+1}(x-b)} = c_n + \frac{r_n}{x-a} + \ldots + \frac{r_1}{(x-a)^n} +$$
$$+ R\left[\sum_{s=1}^{n} \frac{(-1)^{s-1}}{(a-b)^s}\,\frac{1}{(x-a)^{n-s+1}} + \frac{1}{(b-a)^n}\,\frac{1}{x-b}\right], \tag{2.5}$$

con lo que (2.1) queda descompuesta en fracciones simples.

Para terminar, damos algunos curiosos resultados que poseen estos tipos de desarrollos.

Proposición 2.2 *Consideremos la función racional* (2.1), $a \neq b$, *donde* a, b *y los coeficientes de* $P[x]$ *sean enteros. Los coeficientes de* (2.5) *serán enteros si y sólo si* $P[b]$ *es múltiplo de* $|a-b|^n$. *En particular son enteros si* $|a-b| = 1$.

Demostración:

Al ser a, b enteros, los residuos que resultan de aplicar sucesivamente la regla de Ruffini son enteros también.

Además, debido a que

$$R = P[b],$$

resulta que el resto de los coeficientes de (2.5) serán enteros si y sólo si $P[b]$ es múltiplo de $|a-b|^n$. □

El siguiente resultado no es menos curioso:

Proposición 2.3 *El coeficiente de* $\frac{1}{x-b}$ *del desarrollo de las funciones racionales de tipo*

$$\frac{x^n \pm c^n}{(x-a)^n(x-b)} \qquad a \neq b,$$

(donde a, b, c *son números enteros, y* n, *un número natural estrictamente mayor que* 2) *no puede tomar el valor* 1.

Demostración:

En virtud de (2.5), el coeficiente de $\frac{1}{x-b}$ será

$$\frac{b^n \pm c^n}{(b-a)^n}.$$

Si este coeficiente fuera 1, se verificaría que

$$b^n \pm c^n = (b-a)^n,$$

lo que contradice el **Teorema de Fermat.**

Dado que hemos de utilizar reiteradamente la fórmula (2.5) en los cálculos a realizar en lo siguiente, daremos a continuación algunas reglas prácticas que pueden facilitar el proceso algorítmico:

- *Si $a > b$, los coeficientes del sumatorio (o sumatoria) de* (2.5) *son alternativamente positivos y negativos, empezando por el positivo.*
- *Los valores absolutos de estos coeficientes son los inversos de* $|a - b|^s$, *donde s va creciendo de unidad en unidad de* 1 *a n, mientras los exponentes de* $x - a$ van disminuyendo también de unidad en unidad, a partir de n.

  Si a $<$ *b, tales coeficientes serán todos negativos.*

- *El coeficiente de* $\dfrac{1}{x - b}$ *será siempre positivo si n es par.*

3. Ejemplos

En esta sección se dan algunos ejemplos para ilustrar el procedimiento descrito en las secciones precedentes.

1) Empecemos con el desarrollo de la función:

$$\frac{x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x - 1}{(x - 3)^3(x - 2)(x - 1)}. \tag{3.1}$$

Se procede a dividir el numerador sucesivamente entre los factores del denominador, de menor a mayor exponente. Para ello haremos uso de la regla de Ruffini

	1	-2	5	1	-1
1		1	-1	4	5
	1	-1	4	5	4
2		2	2	12	
	1	1	6	17	
3		3	12		
	1	4	18		
3		3			
	1	7			

Sabido esto, la expresión (3.1) se descompone en

$$\frac{x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x - 1}{(x - 3)^3(x - 2)(x - 1)} = \frac{1}{x - 3} + \frac{7}{(x - 3)^2} + \frac{18}{(x - 3)^3} +$$

$$+ \frac{17}{(x - 3)^3(x - 2)} + \frac{4}{(x - 3)^3(x - 2)(x - 1)}$$

En todo este proceso subrayaremos con línea punteada los sumandos a emplear en cálculos posteriores.

Por (2.3),

$$\underline{\frac{1}{(x-2)(x-1)}} = \underline{\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}};$$

con lo que

$$\frac{4}{(x-3)^3(x-2)(x-1)} = 4\left[\underline{\frac{1}{(x-3)^3(x-2)}} - \underline{\frac{1}{(x-3)^3(x-1)}}\right]. \tag{3.3}$$

El primer sumando de esta última expresión se descompone a su vez en

$$\frac{21}{(x-3)^3(x-2)} = 21\left[\frac{1}{(x-3)^3} - \frac{1}{(x-3)^2} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{(1-2)^3}\ \frac{1}{x-2}\right]$$

[El coeficiente 21 es el resultado de sumar 17 que aparece en (3.2) y el 4 que afecta a la misma expresión en (3.3)].

El segundo sumando de (3.3) sólo es afectado por el coeficiente -4, con lo que

$$-4\frac{1}{(x-3)^3(x-1)} =$$

$$-4\left[\frac{1}{2}\ \frac{1}{(x-3)^3} - \frac{1}{4}\ \frac{1}{(x-3)^2} + \frac{1}{8}\ \frac{1}{x-3)}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{x-1}\right].$$

Sumando finalmente todos los términos sin subrayar, obtenemos el resultado

$$\frac{x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x - 1}{(x-3)^3(x-2)(x-1)} = \frac{37}{(x-3)^3} - \frac{13}{(x-3)^2} - \frac{43}{2}\ \frac{1}{x-3} -$$

$$- \frac{21}{x-2} + \frac{1}{2}\ \frac{1}{x-1}.$$

2) Descompónganse a continuación la siguiente función racional

$$\frac{x^8 - 2x^7 + 5x^4 - 11x^3}{(x-1)^4(x+1)^2(x-2)}. \tag{3.4}$$

Como en el caso anterior, sometemos el polinomio del numerador al desarrollo sucesivo de Ruffini, empezando por el binomio de menor exponente

	1	-2	0	0	5	-11	0	0	0
2		2	0	0	0	10	-2	-4	-8
	1	0	0	0	5	-1	-2	-4	<u>-8</u>
-1		-1	1	-1	1	-6	7	-5	
	1	-1	1	-1	6	-7	5	<u>-9</u>	
-1		-1	2	-3	4	-10	17		
	1	-2	3	-4	10	-17	<u>22</u>		
1		1	-1	2	-2	8			
	1	-1	2	-2	8	<u>-9</u>			
1	1	0	2	0					
	1	0	2	0	<u>8</u>				
1		1	1	3					
	1	1	3	<u>3</u>					
1		1	2						
	1	2	<u>5</u>						

Con ello se obtiene el resultado parcial

$$\frac{x^8 - 2x^7 + 5x^4 - 11x^3}{(x-1)^4(x+1)^2(x-2)} = x + 2 + \frac{5}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{8}{(x-1)^3} - \frac{9}{(x-1)^4} + \frac{22}{\underline{(x-1)^4(x+1)}} - \frac{9}{\underline{(x-1)^4(x+1)^2}} - \frac{8}{\underline{(x-1)^4(x+1)^2(x-2)}}. \tag{3.5}$$

Desarrollaremos los sumandos subrayados. Empecemos por el último. Para ello, hemos de tener en cuenta que

$$\frac{1}{\underline{(x+1)^2(x-2)}} = \underline{-\frac{1}{3}\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{9}\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{9}\frac{1}{x-1^2}},$$

con lo que

$$-\frac{8}{(x-1)^4(x+1)^2(x-2)} =$$

$$= -\frac{8}{3} - \left[-\frac{1}{\underline{(x-1)^4(x+1)^2}} - \underline{\frac{1}{3}\frac{1}{(x-1)^4(x+1)}} + \underline{\frac{1}{3}\frac{1}{(x-1)^4(x-2)}}\right] \tag{3.6}$$

A su vez, cada sumando de (3.6) se descompone en

$$-\frac{8}{9}\frac{1}{(x-1)^4(x-2)} =$$
$$= -\frac{8}{9}\left[-\frac{1}{(x-1)^4} - \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-2)} + \frac{1}{(x-2)}\right].$$

Teniendo presente (3.5) y (3.6), resulta

$$\frac{206}{9}\frac{1}{(x-1)^4(x-1)} = \frac{206}{9}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^4} - \frac{1}{4}\frac{1}{(x-1)^3}\right] +$$
$$+\frac{1}{8}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{16}\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{16}\frac{1}{(x+1)}\Bigg].$$

Por (3.5) y (3.6),

$$-\frac{19}{3}\frac{1}{(x-1)^4(x+2)^2} = -\frac{19}{3}\left[\underline{\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^4(x+1)}} - \underline{\frac{1}{4}\frac{1}{(x-1)^3(x+1)}} +\right.$$
$$\left.+\underline{\frac{1}{8}\frac{1}{(x-1)^2(x+1)}} - \underline{\frac{1}{16}\frac{1}{(x-1)(x+1)}} + \frac{1}{16}\frac{1}{(x+1)^2}\right]. \tag{3.7}$$

Descomponiendo cada sumando de (3.7),

$$-\frac{19}{6}\frac{1}{(x-1)^4(x+1)} = -\frac{19}{6}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^4} - \frac{1}{4}\frac{1}{(x-1)^3}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{8}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{16}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{16}\frac{1}{x+1}\right]$$

$$\frac{19}{12}\frac{1}{(x-1)^3(x+1)} = \frac{19}{12}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^3} - \frac{1}{4}\frac{1}{(x-1)^2} +\right.$$
$$\left.\frac{1}{8}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{8}\frac{1}{x+1}\right],$$

$$-\frac{19}{24}\frac{1}{(x-1)^2(x+1)} = -\frac{19}{24}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{x+1}\right]$$

y

$$\frac{19}{48}\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{19}{48}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}\right]$$

Finalmente, al sumar los coeficientes de los términos no subrayados,

$$\frac{x^8-2x^7+5x^4-11x^3}{(x-1)^4(x+1)^2(x-2)} = x+2+\frac{21}{4}\frac{1}{x-1}+\frac{89}{16}\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{19}{4}\frac{1}{(x-1)^3}+$$
$$\frac{7}{4}\frac{1}{(x-1)^4}+\frac{23}{36}\frac{1}{x+1}-\frac{19}{48}\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{8}{9}\frac{1}{x-2}.$$

4. Apéndice

Ya hemos indicado en la **Introducción** que el método expuesto en lo anterior también servía cuando el polinomio del denominador tuviese raíces complejas; pero no resulta muy recomendable debido a que es bastante laborioso trabajar con números complejos.

No obstante, vamos a dar una fórmula con la que en algunos casos se consigue cierta rapidez en los cálculos.

Desarrollemos esta función racional

$$\frac{1}{(x - a)(x^2 + bx + c)},$$

donde $x^2 + bx + c$ es un trinomio con raíces complejas: α y su compleja conjugada α.

Para simplificar la notación, hagamos

$$t[x] = x^2 + bx + c = (x - \alpha)(x - \overline{\alpha})$$

Dado que a, α y α son raíces simples, el método de identificación de coeficientes conduce de inmediato a

$$\frac{1}{(x - a)(x - \alpha)(x - \overline{\alpha})} = \frac{1}{(a - \alpha)(a - \overline{\alpha})}\,\frac{1}{x - \alpha} +$$

$$\frac{1}{(\alpha - a)(\alpha - \overline{\alpha})}\,\frac{1}{x - \alpha} + \frac{1}{(\overline{\alpha} - \alpha)(\overline{\alpha} - \alpha)}\,\frac{1}{x - \overline{\alpha}},$$

y con cálculos sencillos se llega a

$$\frac{1}{(x - a)(x^2 + bx + c)} = \frac{1}{t[a]}\left[\frac{1}{x - a} - \frac{x + a + b}{x^2 + bx + c}\right]. \qquad (4.1)$$

Ejemplo: Como aplicación de (4.1), desarrollemos la siguiente función racional:

$$\frac{1}{(x - 1)^2(x^2 + x + 1)}.$$

Se empieza descomponiendo

$$\frac{1}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x - 1} - \frac{x + 2}{x^2 + x + 1}\right],$$

y dividiendo esta última expresión por $x - 1$

$$\frac{1}{(x - 1)^2 x^2 + x + 1)} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{(x - 1)^2} - \frac{1}{3}\,\frac{x + 2}{(x - 1)(x^2 + x + 1)};$$

aplicando Ruffini al último término,

$$-\frac{1}{3}\,\frac{x+2}{(x-1)(x^2+x+1)} = -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{x^2+x+1} + \underline{\frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)}}\right],$$

y a su vez,

$$-\frac{1}{(x-1)\,(x^2+x+1)} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x-1} - \frac{x+2}{x^2+x+1}\right]$$

Sumando los términos no subrayados, obtenemos finalmente

$$\frac{1}{(x-1)^2x^2+x+1)} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{x-1} + \frac{1}{3}\,\frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

Otros ejemplos podrían ser funciones racionales, cuyos numeradores fueran polinomios de grado arbitrario y los denominadores tuvieran un trinomio de segundo grado con raíces complejas. Entonces se divide primero el numerador por el trinomio, y luego el cociente que resulta por las raíces reales tantas veces como indica el grado de multiplicidad de las mismas, de igual modo a como se ha hecho en la sección precedente. Con ello se reduce a aplicar reiteradamente la fórmula (4.1).

Agradecimientos

Deseo manifestar mi más alto reconocimiento a mis profesores en el Curso de Orientación Universitaria, por haberme inculcado el estudio de las Matemáticas.

Bibliografía

[1] **J. Gil Martos** *et al. Matemáticas.* Santillana. Madrid, 1985.

[2] **F. González** *et al. Curso práctico de matemáticas.* Edunsa. Barcelona, 1987.

[3] **J. Rey Pastor.** *Teoría de funciones reales.* Madrid (S.I.), 1924.

[4] **R. San Juan.** *Análisis matemático.* Madrid, 1963.

FIN