Integración con calculadora por el método de Simpson con la precisión deseada

Resumen

Se presentan los programas para evaluar integrales definidas por el método de Simpson con la exactitud deseada, empleando calculadoras programables como medio computacional alternativo. Esto abre la posibilidad de introducir los métodos numéricos en los cursos tradicionales, y de resolver una mayor cantidad de ejercicios en el aula y en el trabajo extraclase.

Introducción

Desde 1991, en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora se formó un grupo de trabajo para el uso de la calculadora como apoyo didáctico en los diversos cursos de Matemáticas. Dicho grupo está impulsando un proyecto de investigación que, en su primera etapa, se propone producir material escrito acerca del uso de la calculadora en los cursos de Matemáticas que se imparten en el Área de ciencias e ingeniería, y los cuales forman el tronco común para siete de las carreras profesionales que se ofrecen en la Universidad de Sonora. Se han utilizado tanto calculadoras científicas como programables, de las marcas Casio, Texas Instruments y Hewlett-Packard.

Los avances del proyecto han mostrado que la calculadora es una herramienta útil no sólo para efectuar con rapidez y efectividad cálculos numéricos complicados, sino que, empleada de manera creativa, permite introducir conceptos novedosos para el estudiante. Entre otras cosas, ofrece las siguientes ventajas: 1) formar y desarrollar las habilidades computacionales de los estudiantes; 2) formar y desarrollar sus aptitudes algorítmicas y de programación; 3) superar la visión teórica de los cursos, que tradicionalmente dejan de lado los métodos numéricos; y 4) establecer las bases para un mejor empleo de la computadora, utensilio importantísimo en la vida moderna.

José Ramón Jiménez Rodríguez

Universidad de Sonora

México

Como un ejemplo de lo que las calculadoras permiten hacer en los cursos de matemáticas, en este trabajo se describen los programas para evaluar integrales definidas con el grado de exactitud deseado, aplicando la regla de Simpson. En virtud de la complejidad de los cálculos a realizar se emplean dos tipos de calculadoras avanzadas: la CASIO fx-7000 G y la HEWLETT-PACKARD 20s.

Método de Simpson con estimación del error

La integral definida $\int_a^b f(x)dx$, si se conoce la función primitiva $F(x)$ para $f(x)$, puede ser evaluada de manera exacta usando la fórmula de Newton-Leibniz. En los casos en que es difícil o imposible encontrar la función primitiva $F(x)$, se recurre a los métodos de integración numérica, basados en la aproximación (interpolación) de la función integrando, y en la representación de la integral mediante la fórmula aproximada

$$\int_a^b F(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

donde los coeficientes A_k y los valores x_k del argumento en los nodos, dependen del método de interpolación elegido.

De entre tales métodos, el conocido como *regla de Simpson* [1] es el más utilizado, tanto por su exactitud como por su fácil algoritmización. En este método el intervalo de integración $[a, b]$ se divide en n partes iguales (n es un número par) y el valor aproximado de la integral se determina con la fórmula.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{k=1}^{m} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k}) \right) \tag{1}$$

La regla de Simpson es motivo de estudio en los cursos de Análisis Numérico y de Cálculo Integral, en el nivel superior. Su implementación, por lo común, se apoya en el uso de la computadora. Sin embargo, existe un recurso alternativo: la calculadora programable, que permite implementar dicho método en el salón de clase y en la casa, abriendo la posibilidad de una participación más activa de los estudiantes. El presente trabajo tiene como finalidad mostrar que las calculadoras programables menos costosas, (y por lo tanto, más asequibles) pueden ser empleadas con provecho en este caso, y que su empleo posibilita la asimilación consciente de los métodos del Análisis Numérico.

Aún más, la evaluación de la integral definida con un grado de exactitud de antemano establecido, puede lograrse automáticamente en las calculadoras programables, si se toma en consideración el hecho de que el error de la fórmula de Simpson (1) se reduce aproximadamente en 15 veces al disminuir a la mitad el paso de integración h. Por esta razón, si se cumple la condición

$$(I_{2h} - I_h)^2 \leq (15\epsilon)^2 \tag{2}$$

entonces la integral I_h está determinada con el grado de precisión deseado. Si no es así, entonces se procede a reducir a la mitad el paso de integración y a calcular la integral $I_{h/2}$.

Calculadora HEWLETT-PACKARD 20S

Este modelo utiliza la lógica algebraica de operaciones [2]. El programa que se describe a continuación permite evaluar numéricamente una amplia gama de integrales definidas. Para ello basta incorporar, a partir del paso 76, las instrucciones para evaluar la función integrando.

Antes de correr el programa se deben introducir los datos necesarios a los registros respectivos, como sigue:

$$15\epsilon = \text{R1}, \qquad a = \text{R2}, \qquad b = \text{R3}, \qquad b - a = \text{R6}.$$

El registro R4 está libre y puede ser utilizado en la subrutina para evaluar la función integrando $f(x)$. Los demás registros son operativos y se utilizan en el programa como sigue:

$$x_i = \text{R0}, \quad \text{R5} = 4 \text{ o bien } 2, \quad \text{R7} = \text{I}_{2h}, \quad \text{R8} = I_{2h}, \quad \text{R9} = f(a) + f(b).$$

Para correr el programa se oprime XEQ A.

Paso	Instrucción	Paso	Instrucción	Paso	Instrucción	Paso	Instrucción
01	LBL "A"	20	RCL 8	39	RCL 8	58	XEQ F
02	RCL 3	21	+	40	STO 7	59	×
03	XEQ F	22	RCL 9	41	C	60	RCL 5
04	STO 9	23	=	42	STO 8	61	+
05	RCL 2	24	×	43	RCL 2	62	RCL 8
06	XEQ F	25	RCL 6	44	STO 0	63	=
07	+	26	÷	45	GTO 1	64	STO 8
08	RCL 9	27	3	46	LBL 2	65	6
09	=	28	=	47	RCL 0	66	—
10	STO 9	29	STO 8	48	+	67	RCL 5
11	LBL 1	30	—	49	RCL 6	68	=
12	4	31	RCL 7	50	=	69	STO 5
13	STO 5	32	=	51	STO 0	70	GTO 2
14	RCL 6	33	x^2	52	RCL 3	71	LBL 3
15	÷	34	INPUT	53	INPUT	72	RCL 8
16	2	35	RCL 1	54	RCL 0	73	R/S
17	=	36	x^2	55	$x \le y?$	74	LBL F
18	STO 6	37	$x \le y$?	56	RTN	75	STO 0
19	XEQ 2	38	GTO 3	57	RCL 0	76	...

Calculadora CASIO *fx*—7000*G*

Este modelo [3] opera con la llamada *lógica algebraica de expresiones* AER [3], lo que permite usar expresiones algebraicas en el programa. Dispone de un mínimo de 26 registros de memoria combinados con 422 pasos de programa (358 bytes) como máximo.

El programa ocupa 197 bites, quedando 153 libres para incorporar funciones integrando más complicadas. A fin de evaluar con su auxilio una integral definida, basta sustituir los puntos suspensivos que aparecen inmediatamente después de Lbl 3, por la expresión correspondiente para la función integrando $f(x)$.

```
"A" ? → A : "B" ? → B : "E" ? → E: (B — A) → H :

Lbl 1 : 0 → S : 0 → N : H ÷ 2 → H : A → X :

Lbl 2 : 1 → K :

Lbl 3 :......... → F : S + K × F → S:

    X + H → X : N + 1 → N :

    Frac (N ÷ 2) = 0 ⇒ → Goto 4 : 4 → K : Goto 5 :

Lbl 4 : 2 → K :

Lbl 5 : B > X ⇒ Goto 3:

      B < X ⇒ Goto 6 : Goto 2:

Lbl 6 : S × H ÷ 3 → I : (I — J)² ≤ (15 E)² ⇒ Goto 7:
      I → J : Goto 1 :

Lbl 7 : "I = " L I L
```

Algunos resultados

La tabla siguiente ilustra algunos resultados obtenidos empleando esos programas.

	ϵ	HP 20S	CASIO *fx-7000G*
$\int_0^1 \sqrt{1 + x^2}dx$	10^{-3}	1.14778226379	1.147782264
	10^{-6}	1.14779285716	1.147792857
	10^{-9}	1.147793575	1.147793575
$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^4 e^{-x^2/2}dx$	10^{-3}	0.99993293733	0.999932937
	10^{-6}	0.99993637430	0.999936374
	10^{-9}	0.99993665744	0.999936657
$\int_2^3 \frac{dx}{\ln x}$	10^{-3}	1.11853191938	1.118531919
	10^{-6}	1.11842528807	1.118425288
	10^{-9}	1.11842481465	1.118424815

Consideraciones metodológicas

A fin de que la calculadora pueda convertirse en un auténtico recurso didáctico que propicie la asimilación consciente de los algoritmos del Análisis Numérico (como el referido en el presente trabajo), se requiere de un enfoque metodológico especial. Según éste, la calculadora no debe considerarse como un instrumento que haga un trabajo para el estudiante, sino al revés, como el instrumento con el cual el estudiante realice un trabajo. Esto significa que el aporte de la calculadora a la asimilación del algoritmo será escasa, si el profesor se limita a utilizar el programa ya elaborado. En nuestro enfoque, el profesor debe auxiliar y guiar al estudiante para diseñar el programa que le permita implementar el algoritmo en la calculadora, y sólo después de ello usarlo para la solución de ejercicios. En este proceso la participación del estudiante debe ser activa. Así, el estudiante se ve obligado a asimilar el algoritmo de manera consciente, a la vez que adquiere y desarrolla la habilidad para programar la calculadora. También se requiere que todos los estudiantes dispongan de una calculadora, y de preferencia que sea de un mismo tipo en todo el grupo. Esto permitirá concentrarse en el estudio del algoritmo, y no desviarse en las particularidades de funcionamiento de cada tipo de calculadora.

Referencias

[1] **Chapra, Steven C.** y **Canale, Raymond P.** *Métodos numéricos para ingenieros.* McGraw-Hill Interamericana. México, 1991.

[2] *HP 20S Scientific Calculator. Owner's* Manual, Edition 2, September, 1988. 00020-90023. Printed in Canada.

[3] CASIO*fx*—7000G.*Owner's Manual.* SH1026591A. Printed in Japan.