NOTAS DE CLASE

# Nexos en el razonamiento proporcional: Palancas, media aritmética, promedio ponderado, mezclas, porcentajes de bateo y velocidades

## Introducción

Considere los siguientes casos:

1) Dos niños de distinto peso se quieren balancear en un "sube y baja" (Fig. 1). ¿Dónde se tiene que sentar el niño más pesado con respecto al punto de apoyo?

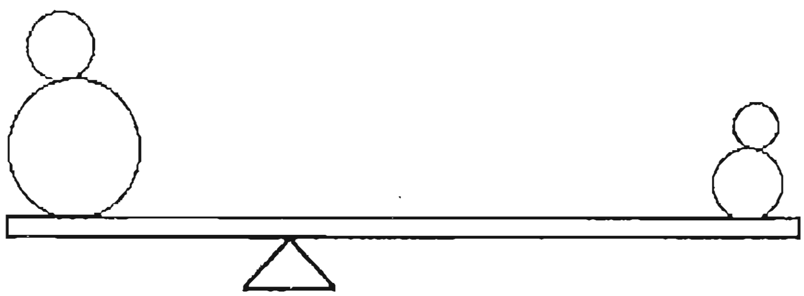

**Figura 1**

2) Un comerciante vende dos clases de nueces. Una cuesta 90 pesos el kilogramo, y la otra, 60 pesos también el kilogramo. Él quiere preparar 50 kg de mezcla, que cueste 72 pesos el kilo. ¿Cuántos kilos de cada clase debe usar?

3) Un jugador de beisbol tiene un "porcentaje" de bateo de 0.250 (15 hits en 60 "veces al bat") al iniciar un juego. Esa tarde él batea y logra 3 hits en 4 turnos al bat. ¿Cuál es su nuevo "porcentaje" de bateo?

4) Un viajero maneja su auto en la primera mitad de su recorrido a 60 km/h, y la segunda mitad a 120 km/h. ¿Cuál es la velocidad promedio en todo el viaje?

**Alfinio Flores Peñafiel**
Arizona State University
Tempe, AZ

Una forma de establecer nexos dentro de las matemáticas y con otras áreas, es hacer explícito lo que estos problemas, aparentemente tan distintos, tienen en común, y cómo se pueden representar de manera semejante. Las ideas unificadoras que subyacen en todos estos problemas son las de cantidades inversamente proporcionales y promedios ponderados. Las nociones de variación simultánea y comparación multiplicativa son un aspecto fundamental del razonamiento proporcional que se pueden hacer explícitas al resolverlos. El razonamiento de proporcionalidad es uno de los componentes más importantes del pensamiento formal que se adquiere en la adolescencia. Hoffer y Hoffer (1992) señalan que si no se desarrolla el razonamiento proporcional, los alumnos no pueden proseguir estudios en una variedad de disciplinas que requieren pensamiento y comprensión cuantitativos, incluyendo el álgebra, la geometría, algunos aspectos de biología, así como la química y la física, desde luego. Frecuentemente el tema no se enseña bien, lo que hace que muchas veces los alumnos traten de resolver problemas como los anteriores en forma meramente computacional, lo que propicia la manipulación sin sentido de símbolos y fórmulas. NCTM (1989) afirma que el razonamiento de proporcionalidad es de tal importancia, que amerita que se le dedique el tiempo y esfuerzo necesarios para asegurar que se desarrolle adecuadamente. Los alumnos necesitan considerar muchos problemas en situaciones que puedan ser modeladas mediante dicho razonamiento. Los alumnos pueden obtener una mejor comprensión de palancas, promedios, mezclas y velocidades, relacionando esos problemas. Además, pueden aprender otra forma de resolverlos, y ser capaces de relacionarlos con otras situaciones conocidas o con representaciones alternas.

## La palanca

La *palanca* obedece los siguientes principios básicos:

1) Pesos iguales que están a distancias iguales del punto de apoyo, se hallan en equilibrio (Fig. 2).

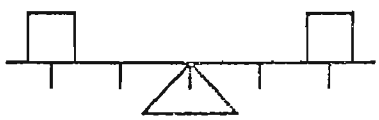

**Figura 2**

2) El equilibrio de una palanca con un peso $p$ en cada extremo, no se altera si se remplazan ambos pesos por uno solo $2p$ en el punto medio. Recíprocamente, $2p$ en el centro puede ser remplazado por $p$ en cada extremo sin alterar el equilibrio (Fig. 3).

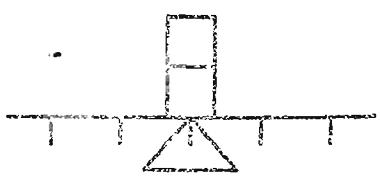

**Figura 3**

De estos dos principios podemos obtener la *ley de la palanca* (Pólya, 1977):

Si una palanca está en equilibrio, y $p_1$ y $p_2$ son los pesos, y $d_1$ y $d_2$ sus respectivas distancias del punto de apoyo, entonces $p_1d_1 = p_2d_2$, esto es, el *momento de fuerza* que tiende a hacer girar en un sentido es igual al momento que hace girar en sentido contrario (Fig. 4).

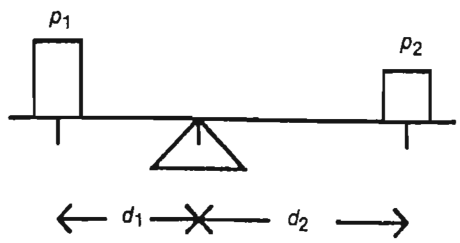


**Figura 4**

Podemos expresar también esta ley como

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

El peso mayor está más cerca del punto de equilibrio que el peso menor. Los pesos y las distancias correspondientes son inversamente proporcionales. Los alumnos pueden relacionar esta ley con la experiencia del "sube y baja". Dos niños que no pesan lo mismo de todos modos se pueden divertir si el niño más pesado se sienta más cerca del punto de apoyo, y el más ligero más lejos, en razón inversa a la razón de sus pesos.

## La media aritmética y la palanca

La *media aritmética* (o *promedio*) de dos números $x_1$ y $x_2$, es $\bar{x} = (x_1 + x_2)/2$. Los alumnos pueden ver fácilmente que en la recta numérica la media de dos números corresponde al punto medio entre ellos. Nótese la semejanza con la posición del punto de equilibrio al equilibrar dos pesos iguales (Fig. 5).

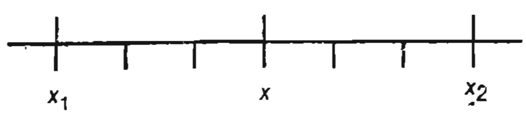


**Figura 5**

En general, dicho promedio o media de un conjunto de datos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ es igual a la suma de todos los valores, dividida entre el número de ellos:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \qquad (1)$$

En este caso también se le puede dar un sentido físico a la media aritmética de un conjunto de datos. La recta numérica se considera como una palanca (sin peso), y colocamos un *peso unitario* en los números que queremos promediar. La media es el número que corresponde al centro de equilibrio de esos números. Si el punto de apoyo de la palanca está en la media (Fig. 6), $\bar{x} - x_i$, es la distancia (con signo) de $x_i$ a $\bar{x}$; es decir $(\bar{x} - x_i) \times 1$ es el *momento* análogo a la *torca* en la palanca (con signo) debido al peso unitario en $x_i$, y el sistema está así en equilibrio (Flores ß White, 1989).

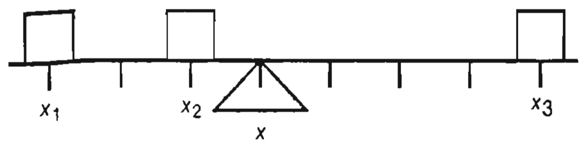


**Figura 6**

Decir que el sistema está en equilibrio significa que los momentos se cancelan unos a otros, esto es, la suma de momentos es igual a cero, lo que equivale a

(2) $$(\bar{x} - x_1) + (\bar{x} - x_2) + \ldots + (\bar{x} - x_n) = 0$$

Por ejemplo, 6 es el promedio de 2, 4, 5, 9, 10 (Fig. 7) ya que

$$(6 - 2) + (6 - 4) + (6 - 5) + (6 - 9) + (6 - 10) = 0$$

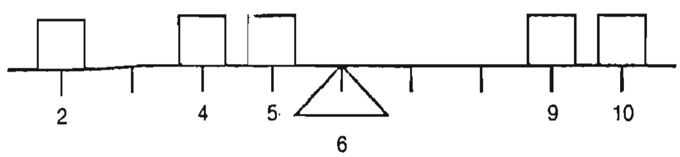


**Figura 7**

La media $\bar{x}$ de los valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ es el único número que hace que la suma (2) sea igual a cero. Esta caracterización de la media se presta mejor a la interpretación física anterior, y equivale a la fórmula (1), la cual es más compacta desde el punto de vista de cómo calcular.

## El efecto de datos extremos sobre la media

Con la interpretación de la media como el centro de equilibrio podemos ver por qué un sólo dato que sea muy diferente de los demás, tiene un efecto tan grande sobre la media: un peso en tal posición tendría un *brazo de palanca* muy grande. Por ejemplo, si los datos fueran 1, 2, 3, 4, 15, entonces su media $\bar{x} = 5$ no es muy representativa, ya que es mayor que cualquiera de los datos excepto el 15 (Fig. 8).


**Figura 8**

Nótese también que al eliminar un solo dato extremo (15), el promedio cambia notablemente. El nuevo promedio es 2.5, que es el punto medio de los datos restantes. La sensibilidad de la media aritmética a datos extremos es la razón por la cual otras medidas centrales, tales como la mediana, son importantes al describir un conjunto de datos.

## Promedios ponderados y una palanca

El *promedio ponderado* de una serie de datos también se puede interpretar físicamente. Si se colocan diferentes pesos en diversos puntos de la palanca, el promedio ponderado corresponderá al punto de equilibrio. El número de veces que aparece cada dato es su "peso" o *ponderación*. El promedio estará más cerca de un dato que se repita muchas veces (tenga un peso mayor). Por ejemplo, el promedio ilustrado en la Figura 9, es 4. Como el peso en 3 es cinco veces mayor que el peso en 9, la distancia entre 3 y el promedio será 1/5 de la distancia entre el promedio y 9.

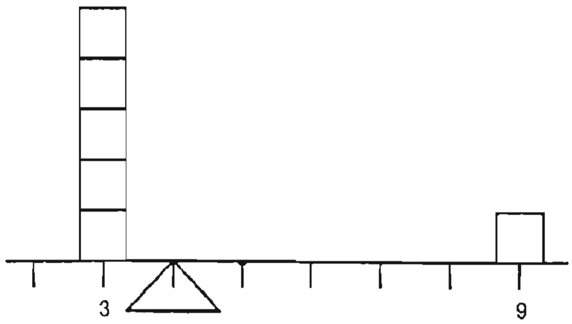


**Figura 9**

Esto es, el promedio satisface la expresión

(3) $$\frac{p_1}{p_2} = \frac{x_2 - \overline{x}}{\overline{x} - x_1}$$

Es decir,

$$p_1(\overline{x} - x_1) = p_2(x_2 - \overline{x})$$

O bien

$$p_1(\overline{x} - x_1) + p_2(\overline{x} - x_2) = 0$$

Lo que es equivalente a

$$\overline{x} = \frac{p_1x_1 + p_2x_2}{p_1 + p_2}$$

Para obtener el promedio hay que multiplicar cada dato por el número de veces que aparece y dividir el total entre el número de datos. El promedio de 4, 4, 4, 4, 4, 10 es

$$\frac{5 \times 4 + 1 \times 10}{1 + 5} = 5$$

Los alumnos pueden relacionar el promedio ponderado con el "sube y baja". La posición de equilibrio corresponde a la posición del promedio ponderado de las posiciones de los dos niños, si la tabla se considera como una recta numérica.

Con más datos, la misma idea funciona bien. El punto de equilibrio satisface

$$p_1(\bar{x}-x_1) + p_2(\bar{x}-x_2) + \ldots + p_n(\bar{x}-x_n) = 0$$

que equivale a

$$\bar{x} = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$$

Por ejemplo, el promedio de 2, 4, 4, 4, 5, 5, 8, 8, 10, 10 es

$$\frac{1 \times 2 + 3 \times 4 + 2 \times 5 + 2 \times 8 + 2 \times 10}{1 + 3 + 2 + 2 + 2} = 6$$

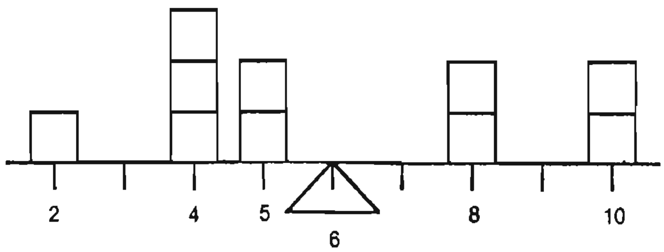


**Figura 10**

Conviene advertir que esta fórmula no es sólo un atajo para calcular, sino que el promedio ponderado (Fig. 10) puede ayudar a los alumnos a entender situaciones en las que los valores medios se tienen que obtener utilizando los pesos apropiados, como en los siguientes dos ejemplos:

a) Un maestro quiere calificar de la siguiente manera: tarea 20%, exámenes parciales 20%, laboratorio 30%, examen final 30%. ¿Cómo debe promediar las calificaciones de los alumnos? ¿Cuáles son los "pesos" en esta situación?
b) Un alumno desea obtener su promedio de calificaciones. Los cursos pueden ser de 3, 4 o 5 créditos, y las calificaciones pueden variar de 5 a 10. ¿Cómo debe tratar las calificaciones? ¿Cuáles son los "pesos"?

## Problemas de mezclas, la palanca y el concepto de proporcionalidad

En una palanca, una serie de pesos se pueden cambiar, sin alterar el equilibrio, poniendo todos en el punto que corresponde al de equilibrio. De manera semejante, podemos remplazar una serie de datos por su promedio ponderado. Siguiendo esta idea es posible encontrar un método alternativo para resolver problemas de mezclas. Por ejemplo:

*Un comerciante mezcla 12 kg de cacahuates que valen \$4.00/kg, con 8 kg de nueces que valen \$9.00/ kg. ¿A qué precio debe dar la mezcla?*

Sea $p$ el precio de la mezcla. El precio debe estar entre los dos dados, pero no exactamente a la mitad, ya que hay una cantidad mayor de cacahuates que cuestan menos. Para ser precisos, el promedio se debe localizar de manera que la distancia a cada uno de los precios sea inversamente proporcional a cada cantidad. Como los pesos están en razón de 12/8 (= 3/2), $p$ debe ser el punto entre 4 y 9 que divide al segmento según la razón de 3 a 2, y $p$ está más cerca de 4 que de 9, ya que hay más peso en 4 (Fig. 11).

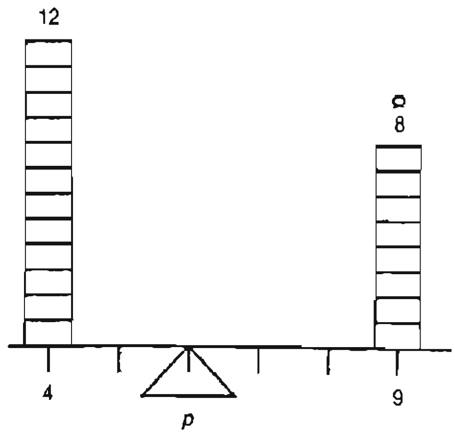


**Figura 11**

Otros tipos de problemas de mezclas pueden ser resueltos también utilizando el auxilio de la palanca. Este problema está adaptado de Pólya (1981).

*Un comerciante vende dos clases de nueces. Una cuesta 90 pesos el kilogramo, la otra 60 pesos el kilo. Desea hacer 50 kg de una mezcla que cueste 72 pesos el kilo. ¿Cuántos kilogramos de cada clase debe usar?*

Representaremos esta situación en la recta numérica, considerada como una palanca. Ahora se tiene la situación inversa, todos los pesos en el punto de equilibrio 72, y se quiere poner algunos de éstos en 60 y otros en 90, sin alterar el equilibrio (Fig. 12).

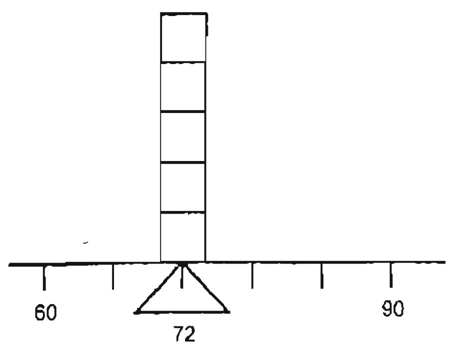


**Figura 12**

Como la distancia de 90 a 72 es mayor que la de 60 a 72, hay que poner más nueces de la clase más barata en la mezcla para equilibrar la palanca. Para ser más precisos, la razón de los pesos será inversamente proporcional a la razón de las diferencias respecto del precio promedio. La relación entre la cantidad de las nueces más baratas, $x$, y la cantidad de las nueces más caras, $y$, está dada por

$$\frac{x}{y} = \frac{90 - 72}{72 - 60} = \frac{18}{12}$$

Así, la proporción entre los pesos es de 3 a 2 (Fig. 13). Combinando esta información con el hecho que el peso total está dado por $x + y = 50$, es claro que necesitamos 30 kg de las nueces más baratas y 20 kg de la clase más cara.

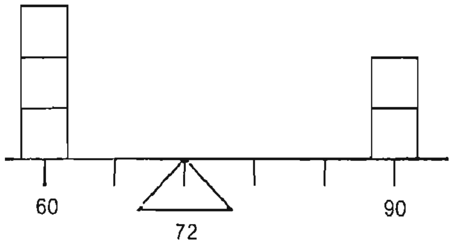


**Figura 13**

## "Porcentajes" de bateo. Combinación de razones

Para calcular el "porcentaje" de bateo de un jugador no sacamos simplemente el promedio aritmético de su porcentaje anterior de bateo y el porcentaje en un cierto partido. Si tal porcentaje de un jugador al comenzar un partido era 0.250 (15 de 60), y batea con 0.750 (3 de 4) durante el partido, el número total de hits es 18, y el total de veces al bat, 64. El nuevo porcentaje de bateo es $18/64 = 0.281$ (Fig. 14).

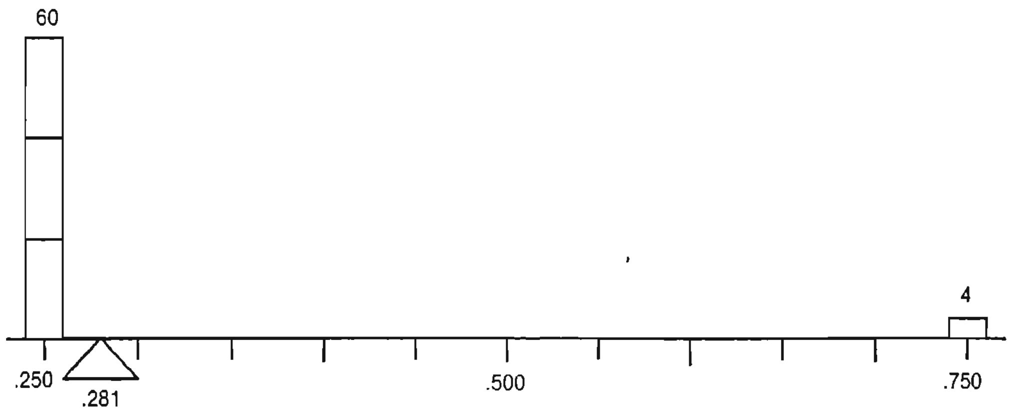


**Figura 14**

La forma en que se calcula ese "promedio" es un ejemplo de cómo dos razones $a/b$ y $c/d$ se combinan para formar una nueva razón $(a + c)/(b + d)$. Ésta se halla entre las dos razones anteriores:

$$\text{Si} \quad \frac{a}{b} < \frac{c}{d}, \quad \text{entonces} \quad \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Podemos dar una interpretación geométrica a esta desigualdad: la pendiente $(a + c)/(b + d)$ es una intermedia entre las pendientes $a/b$ y $c/d$ (Fig. 15).

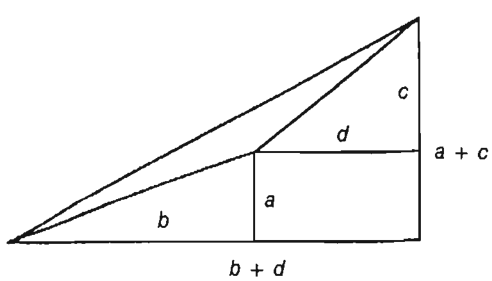


**Figura 15**

Si $a$ y $b$ son respectivamente mucho mayores que $c$ y $d$, entonces

$$\frac{a}{b} \quad \text{y} \quad \frac{a+c}{b+d}$$

estarán muy cerca. La pendiente de la hipotenusa del triángulo con catetos $a$ y $b$ es muy parecida a la pendiente de la hipotenusa del triángulo con catetos $a + c$ y $b + d$ (Fig. 16).

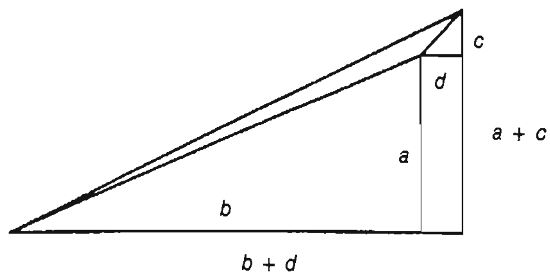


**Figura 16**

Esta forma de combinar razones es en realidad un promedio ponderado de dos razones. En el caso del ejemplo del porcentaje de bateo, ¿cuáles son los "pesos" que corresponden a 0.250 y a 0.750?

## De ida y vuelta. Promedios de velocidades

Algunos conductores de auto estiman que si manejan la primera mitad del recorrido en un viaje con velocidad de 60 km/h, y la segunda mitad de la distancia a 120 km/h, la velocidad media, o promedio de todo el viaje será de 90 km/h (y para su sorpresa llegan más tarde de lo que piensan). Se puede ver con un ejemplo que 90 km/h no es la velocidad media. Supongamos que el conductor recorre 60 km a 60 km/h y luego 60 km a 120 km/h. Obtenemos la velocidad promedio dividiendo la distancia total entre el tiempo total. Para la primera parte del viaje se lleva una hora, para la segunda parte, media hora. La velocidad promedio es entonces (60 + 60) km/(1.5 h) = 80 km/h. El tiempo que se requiere para cada una de las partes no es el mismo, y la velocidad menor se tiene que "pesar" o ponderar más que la velocidad mayor. Cercanamente relacionada con este problema es la situación de un avión que va con viento en contra en el vuelo de ida, y con viento a favor en el de regreso. Otro ejemplo es desde luego remar río arriba y luego de regreso.

### Razonamiento de proporcionalidad al combinar velocidades

Algunas veces los alumnos tienen dificultad para resolver el problema de velocidades enunciado antes, porque no pueden calcular el tiempo total, ya que no se da la distancia. Podemos considerar este problema en términos de razonamiento proporcional y utilizar el mismo principio de la palanca.

Para obtener la velocidad promedio de un objeto que viaja con dos velocidades distintas durante tiempos iguales, el promedio aritmético de las velocidades es apropiado (¿por qué?). Si lo que es igual no son los tiempos sino las distancias, tenemos que "pesar" las velocidades de manera apropiada antes de promediarlas. Por ejemplo, si la velocidad $v_1$ es dos veces mayor que la otra velocidad $v_2$, para distancias iguales el conductor pasará el doble del tiempo viajando a la velocidad menor. La velocidad media deberá estar más cerca de la velocidad menor en una razón de 1 a 2. Si la velocidad es tres veces mayor, entonces el tiempo a la velocidad menor será tres veces más grande, y el promedio estará más cerca de la velocidad menor en una razón de 1 a 3. En general, el tiempo de viaje a una velocidad será inversamente proporcional a la misma. Al promediar velocidades sobre distancias iguales, el "peso" que debemos dar a cada velocidad es precisamente el inverso de cada velocidad (Fig. 17).

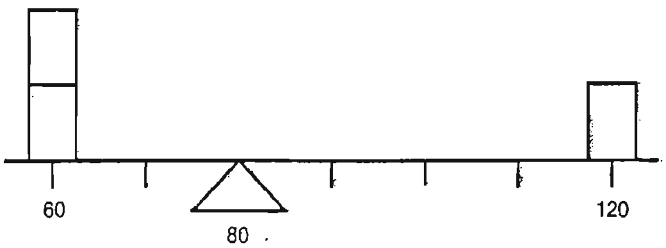


**Figura 17**

## La media armónica

Otra forma de resolver el problema es calcular la velocidad promedio sobre todo el intervalo. Para hacer esto calculamos la distancia total y dividimos entre el tiempo total. Si viajamos a velocidades $a$ y $b$, sobre distancias iguales $d$, el tiempo requerido para recorrer la primera distancia es $d/a$, y la segunda, $d/b$. La velocidad promedio es entonces

$$\frac{2d}{\frac{d}{a}+\frac{d}{b}}=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{2ab}{a+b}$$

$$h=\frac{2ab}{a+b}$$

se le llama la *media armónica* de $a$ y $b$. De modo que para obtener la velocidad promedio de un objeto que viaja distancias iguales con velocidades distintas, debe usarse la media armónica de las velocidades, y no la media aritmética. La media armónica de $h$ de $a$ y $b$ se expresa a veces como

$$\frac{1}{h}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

y también puede ser expresada como

$$\frac{a}{b}=\frac{a-h}{h-b}$$

Podemos hacer explícita la semejanza de esta fórmula con (3), esto es, que $h$ es el promedio ponderado de $a$ y $b$, con "pesos" $1/a$ y $1/b$, respectivamente, escribiendo

$$\frac{1/b}{1/a} = \frac{a-h}{h-b}$$

Al comparar los dos enfoques para promediar velocidades distintas sobre distancias iguales, por un lado utilizando la media armónica y por otro "pesando" las velocidades, es posible ver que la media armónica es en general menor que la media aritmética, ya que la velocidad promedio estará más cerca de la velocidad menor que de la mayor. Sin embargo, si las velocidades no son muy diferentes, la media aritmética de las dos velocidades será una buena aproximación a la velocidad promedio. Un procedimiento frecuentemente utilizado, en carreras de automóviles en pistas cerradas, para promediar velocidades en vueltas diferentes, es utilizar la media aritmética de las velocidades en cada vuelta, en vez de calcular la distancia total y dividir entre el tiempo total. (¿Cuáles corredores se beneficiarán más con este método "incorrecto"? ¿Aquéllos cuyas velocidades son muy parecidas de vuelta en vuelta, o aquéllos cuyas velocidades varían mucho de una vuelta a otra?)

## Otras medias y relaciones con la geometría

Otra media que se usa en matemáticas es la *media geométrica* (también llamada *media proporcional*). La media geométrica de $a$ y $b$ se define como $\sqrt{ab}$ (o como el número $x$ que satisface la proporción $a/x = x/b$). Si tenemos un rectángulo de lados $a$ y $b$, entonces la media geométrica será la longitud del lado del cuadrado con igual área que el rectángulo. Otra representación de la media geométrica está en la Figura 18. Para demostrar esto se usa el hecho de que la altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, divide al triángulo en otros dos semejantes a él. Puede emplearse la Figura 18 también para demostrar que $(a + b)/2 \geq \sqrt{ab}$.

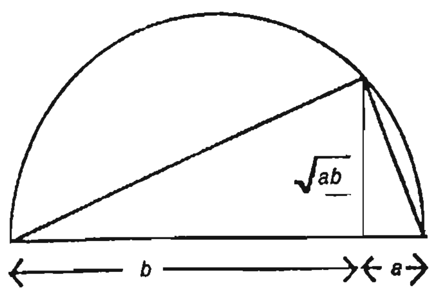


**Figura 18**

Puede darse otra interpretación geométrica de la media aritmética, la media geométrica, y la media armónica (Beckenbach & Bellman, 1975). En un trapecio con bases $a$ y $b$, la media aritmética corresponde a la paralela con la base media del trapecio (Fig. 19). La media geométrica $\sqrt{ab}$ corresponde a la longitud de la paralela que divide al trapecio en dos trapecios semejantes. La media armónica corresponde a la paralela que pasa por el punto de intersección de las diagonales.

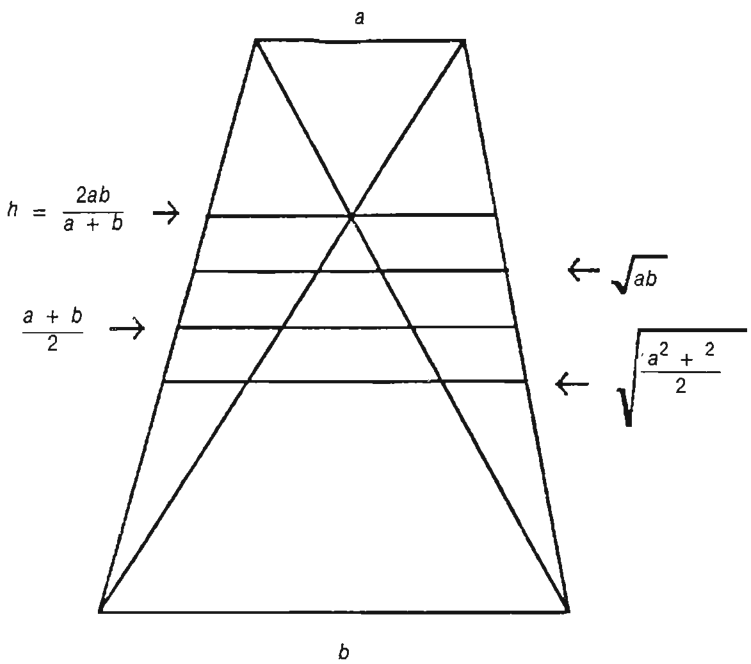


**Figura 19**

Además, hay otra media de dos números que se usa algunas veces en matemáticas, la *media cuadrática* que se obtiene como

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

La media cuadrática corresponde a la longitud de la paralela que divide al trapecio en dos áreas iguales. Del trapecio, o con un poco de álgebra para cada desigualdad, puede captarse la relación entre las medias armónica, geométrica, aritmética, y cuadrática:

$$\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Un buen ejercicio para los alumnos que estén familiarizados con triángulos semejantes, es probar que las diferentes medias de $a$ y $b$ corresponden a las paralelas mencionadas en el trapecio, otro contexto en el que pueden practicar el razonamiento de proporcionalidad.

## Conclusión

Al considerar estos cuatro contextos, y apreciar la estructura matemática subyacente explícita, y dar representaciones alternativas de los conceptos así como relacionarlos unos con otros, es posible ayudar a los alumnos a desarrollar una mejor comprensión conceptual, y a ir más allá de la mera habilidad computacional de resolver cada uno de los problemas por separado. Aunque los problemas en sí no hacen que necesariamente el alumno utilice el razonamiento de proporcionalidad, podemos enfatizar métodos que hagan explícitos los aspectos de comparación multiplicativa y variación simultánea, lo cual es un elemento importante de tal evaluación. Además, enlazar ideas tales como promedios ponderados y proporciones inversas que aparecen en diferentes temas de las matemáticas, y conectar con las ideas de otras áreas como la física, puede dar a los alumnos no sólo una mejor comprensión del razonamiento proporcional, sino también una mejor idea de su importancia. Quienes desarrollan un sentido físico para cantidades como el promedio, y adquieren una idea intuitiva acerca del problema y de la solución, pueden utilizar el contexto como guía para ver de qué modo operar con proporciones. Para el lector interesado se sugiere leer el trabajo de Mochon (1993), donde discute otros contextos que dan la pauta acerca de cómo se suman razones, razones de cambio y fracciones.

## Referencias

**Beckenbach, Edwin** y **Bellman, Richard.** *An introduction to inequalities.* Washington, D.C.: Mathematical Association of America, 1975.

**Flores Peñafiel, Alfinio** y **White, Arthur L.** "Exploration of the mean as a balance point." *School Science and Mathematics, 89* (1989: 251-258.

**Hoffer, Alan R.** y **Hoffer, Shirley Ann K.** "Ratios and proportional reasoning." En Thomas R. Post (ed.), *Teaching mathematics in grades K-8 Research based methods* (p. 303-330). Boston: Allyn and Bacon, 1992.

**Mochon, Simon.** (1993). "When can you meaningfully add rates, ratios and fractions?" *For the Learning of Mathematics, 13*(3), 16-21.

**National Council of Teachers of Mathematics.** (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

**Pólya, George.** *Mathematical methods in science.* Washington, D.C.: Mathematical Association of America, 1977.

**Pólya, George.** *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving.* New York: Wiley, 1981.