Problemas

En este número discutiremos el Problema 4 y propondremos uno nuevo. Reiteramos la invitación a nuestros lectores para que envíen sus soluciones o propuestas de problemas para publicarlos en esta sección de la revista.

Problema 4

Un conjunto finito de rectas en el plano está en posición general, si no hay dos que sean paralelas, y no hay tres que sean concurrentes. Determine el número de regiones en las que el plano queda dividido por un conjunto de n rectas en posición general.

Problema 5

Sea n un entero positivo mayor que 1. Pruebe que el promedio de los números $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, ..., $\sqrt{n}$, es mayor que $\frac{2}{3}\sqrt{n}$.

Discusión del problema 4

Primero examinaremos la situación para algunos valores pequeños de n, con la esperanza de que den alguna idea para el caso general.

Con 0 rectas el plano es una región

una recta divide al plano en 2 regiones, una de cada lado de la recta.

dos rectas dividen al plano en 4 regiones, siempre y cuando tales rectas estén en posición general.

tres rectas dividen al plano en 7 regiones, siempre y cuando dichas rectas estén en posición general.

Al ilustrar el caso de cuatro rectas en posición general se ve que se obtienen 11 regiones, a pesar de que puede ser un poco difícil convencerse de que la respuesta no depende de la posición de las rectas.

Carlos Bosch Giral
Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM)
México

De manera que si n es mucho mayor que 4 será mucho más difícil convencerse de que la respuesta no depende de la posición de las rectas. Sin embargo, tratemos de usar lo que tenemos hasta ahora.

n	0	1	2	3	4
cantidas de regiones	1	2	4	7	11

La primera pregunta que puede uno formular es si esta pequeña muestra indica una fórmula que valga para toda n.

Si no se nos ocurre nada, podemos tratar de revisar qué sucede cuando se trazan los diagramas para determinar el número de regiones. Consideremos el caso $n = 4$; para hacerlo se empezó por trazar una recta, luego otra y luego otra, obteniendo así tres rectas que dividen al plano en 7 regiones. Finalmente se añade la cuarta recta, que hace crecer el número de regiones, y esto sucederá con cada recta que se añada.

Ahora la pregunta sería: ¿En cuántas regiones se aumenta la cantidad de regiones que se tenía?

Al analizar la tabla tenemos

n	0	1	2	3	4
cantidad de regiones	1	2	4	7	11
aumento		1	2	3	4

Ahora es clara la conjetura que debemos hacer:

Para'n 0, la n-ésima recta aumenta el número de regiones en n.

Así que como $n = 0$, ello da una región como sigue:

$n = 1$	se tienen	$1 + 1$	regiones
$n = 2$	se tienen	$1 + 1 + 2$	regiones
$n = 3$	se tienen	$1 + 1 + 2 + 3$	regiones

En general tendremos para n

$$1 + 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n, \text{ regiones.}$$

Así que tendremos una respuesta siempre y cuando podamos probar nuestra conjetura. Para esto recordemos las observaciones previas donde vimos que una nueva recta divide en dos algunas de las regiones ya formadas. Pero, ¿cuántas regiones ya formadas serán divididas en dos por la nueva recta?

Recordemos que la nueva recta, como todas las anteriores, tiene que estar en posición general. Esto quiere decir que tiene que intersectar a las $n - 1$ rectas anteriores, ya que no puede ser paralela a ninguna de ellas. Además, las tiene que cortar en puntos distintos pues no concurren con ninguna pareja de rectas. Así que estos $n - 1$ puntos dividen a la nueva recta en n segmentos, $n - 2$ segmentos finales y 2 semirrectas con $n \geq 2$.

Cada uno de los n segmentos está en una región diferente a las formadas anteriormente. De modo que son exactamente n las regiones que son divididas en dos por medio de la nueva recta.

Por lo tanto, nuestra conjetura queda probada.