Superficies coordenadas por computador

Resumen

En la actualidad existen en el mercado paquetes matemáticos de gran utilidad, que han sido muy utilizados para la enseñanza de la matemática universitaria. Uno de ellos es el paquete "MATHEMATICA", el cual ofrece grandes potenciales en lo que se refiere al cálculo de extensas operaciones complejas en todas las ramas de la matemática, además del potencial visual que ofrecen sus gráficas en dos y tres dimensiones. Un ejemplo de su aplicación está en su uso para explicar el comportamiento de las superficies coordenadas para los diferentes sistemas que se puedan presentar mediante las transformaciones adecuadas a cada sistema de coordenadas.

Introducción

En los últimos años ha aparecido software dedicado a resolver problemas de matemáticas que son de gran utilidad para matemáticos, físicos, ingenieros, etc. que requieren de cálculos complicados y/o engorrosos.

En el campo educativo la aparición del computador ha permitido un gran mejoramiento en cuanto a la calidad de la docencia se refiere; la facilidad que ofrece el software existente a todos los niveles, permitiría alcanzar con una mejor eficiencia los objetivos pedagógicos de todas las áreas educativas a nivel de la enseñanza secundaria y universitaria.

Actualmente existen en el mercado paquetes matemáticos como el MUMAT, el Derive y otros; éstos han sido muy utilizados para la enseñanza de la matemática universitaria en países como España, en donde se han obtenido excelentes resultados en el logro de objetivos planteados en los distintos programas académicos del área de las matemáticas.

Luis Fernando Madrid Zapata
Universidad Nacional de Colombia
Sede Manizales, Colombia

Hace poco tiempo salió al mercado el paquete **MATHEMATICA**, éste ha incluido una gran cantidad de operaciones y tiene ya programadas otras muchas ejecuciones que son de gran utilidad; así pues está el álgebra lineal, el cálculo integral y diferencial, la trigonometría, la solución de ecuaciones y muchas más que pueden ser fácilmente encontradas en los manuales.

Es interesante anotar que se pueden hacer gráficas en dos y en tres dimensiones, animación y sonido, permitiendo lograr mostrar al estudiante un panorama más amplio de los fundamentos básicos de las matemáticas y sus aplicaciones.

Una aplicación particular, que se muestra en el presente artículo, permite proporcionar el aspecto visual tridimensional de algunos sistemas coordenados y de las superficies coordenadas que se generan debido a las propiedades de los mismos, que gracias al potencial visual que brinda el paquete, facilita mucho más la labor docente en el proceso enseñanza aprendizaje de estos conceptos y reforzándolos con mayor claridad en las mentes de los estudiantes.

Con el presente documento pretendo invitar a los docentes universitarios del área de las matemáticas para que incursionen en el mundo de los computadores y comprueben por sí mismos los grandes beneficios que conlleva el uso de paquetes matemáticos en el proceso de la enseñanza de las matemáticas.

1 Coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z)

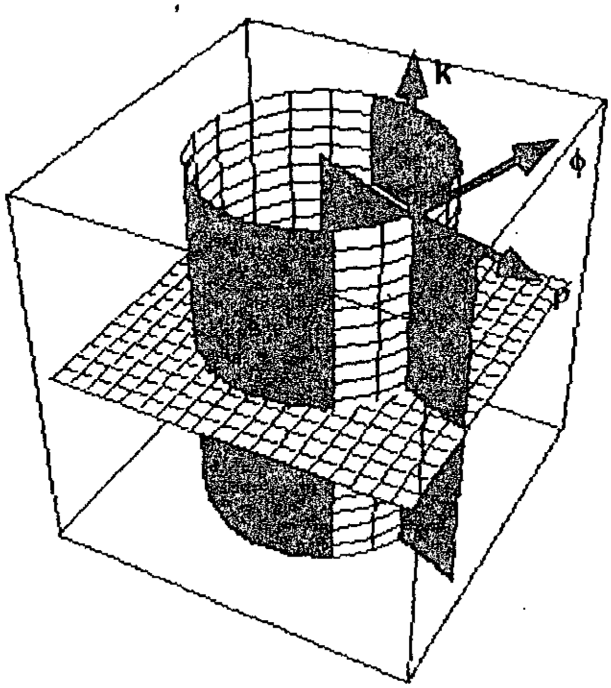

Figura 1 Coordenadas cilíndricas circulares.

Estas coordenadas se pueden obtener por las siguientes transformaciones.

$$x = \rho \cos \phi \qquad y = \rho \operatorname{sen} \phi \qquad z = z$$

Utilizando ρ para la distancia perpendicular desde el eje z y conservando r para la distancia desde el origen. Las familias de superficies coordenadas son

1. Cilindros circulares rectos que tienen el eje z como eje común: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{cte.}$

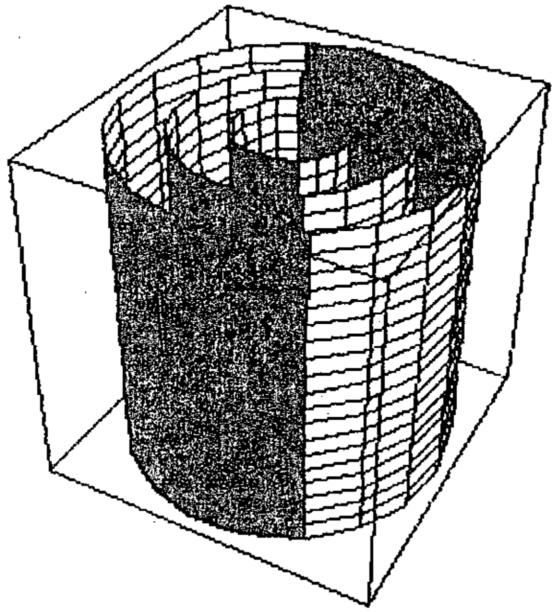

Figura 2 Familia de superficies coordenadas, $\rho =$ *constante.*

2. Planos medios a través del eje z

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \text{cte.}$$

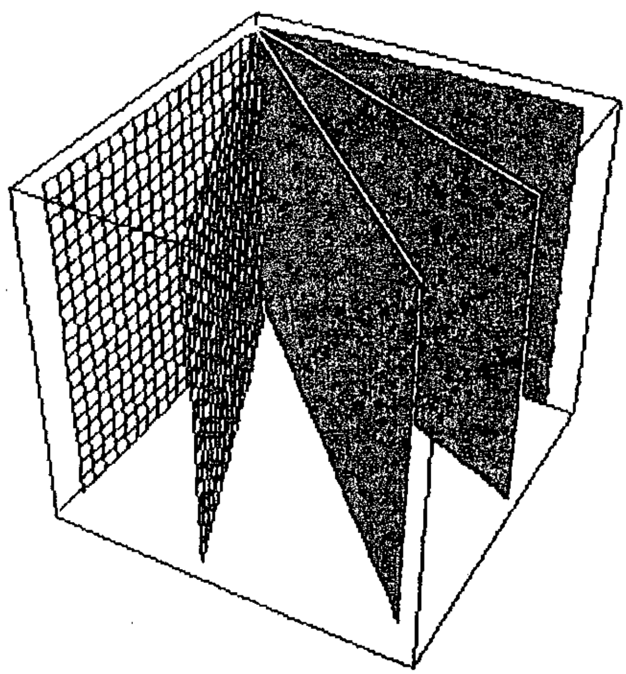

Figura 3 Familia de superficies coordenadas, $\phi =$ *constante.*

3. Planos paralelos al plano xy: $z = \text{cte.}$

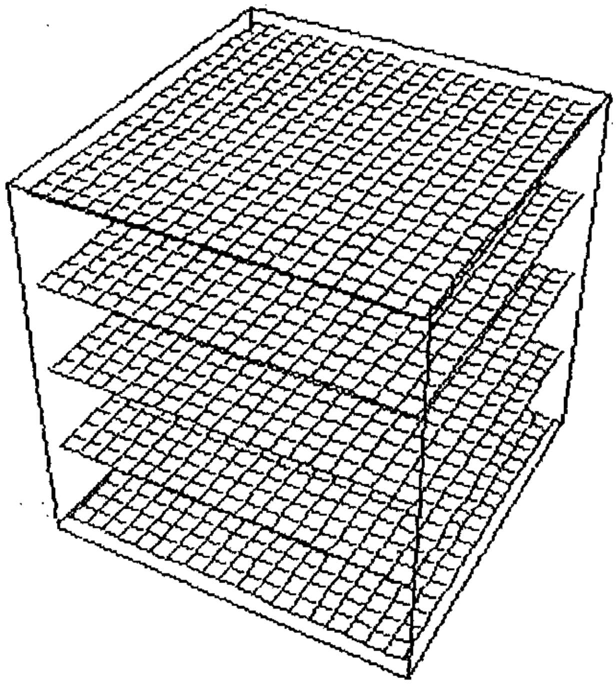

Figura 4 Familia de superficies coordenadas $z = \text{cte.}$

2 Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

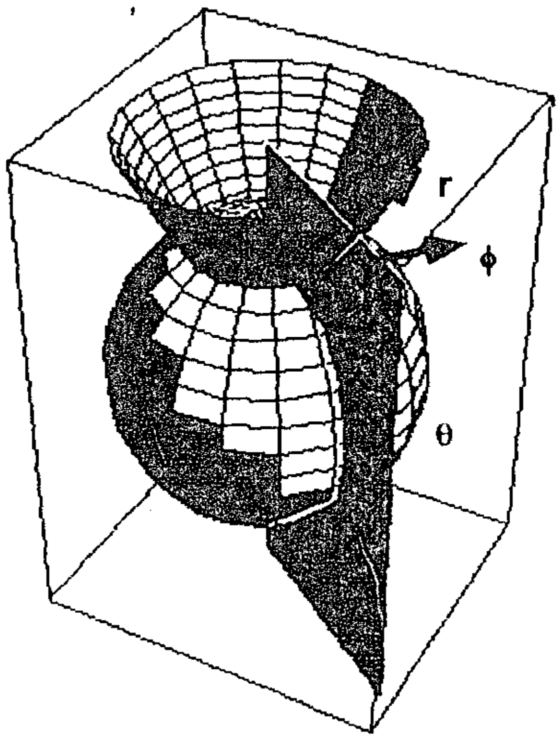

Figura 5 Coordenadas esféricas.

Las transformaciones adecuadas son

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \phi \qquad y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \qquad z = r \cos \phi$$

donde r, la distancia radial, se mide desde el origen; θ, el ángulo polar, desde el el eje z positivo; ϕ, el ángulo acimutal, en el plano xy desde el eje x positivo.

Las familias de superficies coordenadas son

1. Esferas concéntricas centradas en el origen, $\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} = \text{cte}.$

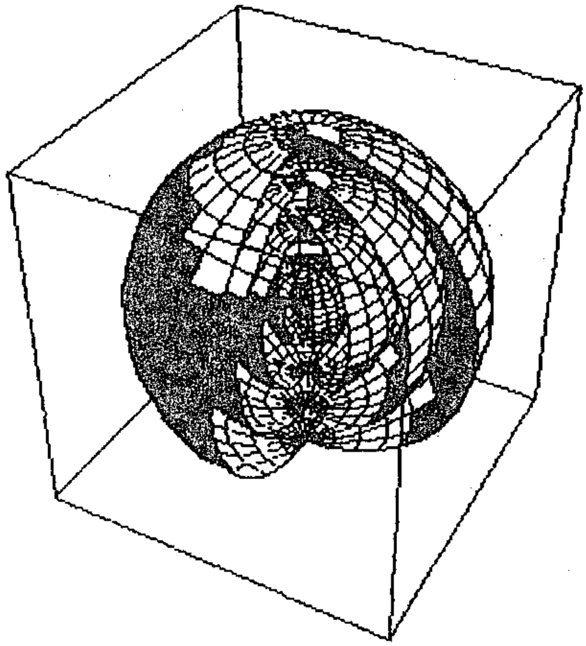

Figura 6 Superficies coordenadas $r = \text{cte}.$

2. Conos circulares rectos centrados en el eje z, vértices en el origen

$$\theta = arc \cos \frac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}} = \text{cte}.$$

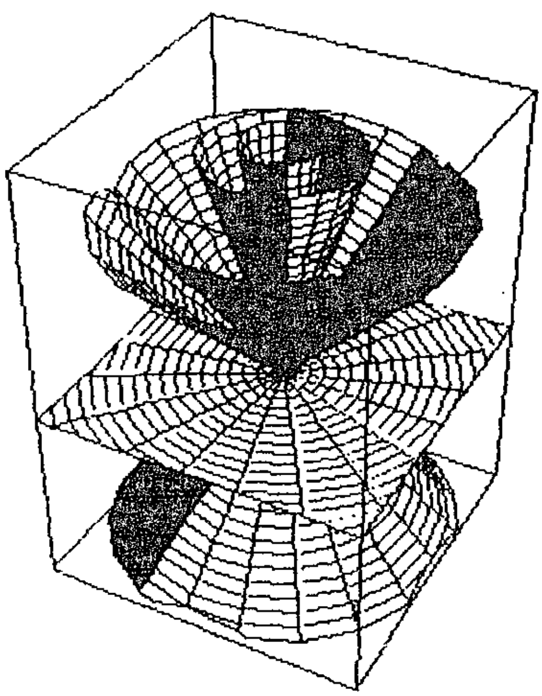

Figura 7 Superficies coordenadas $\theta = \text{cte}.$

3. Planos medios a través del eje z:

$$\phi = arc\tan\frac{y}{x} = \text{constante}$$

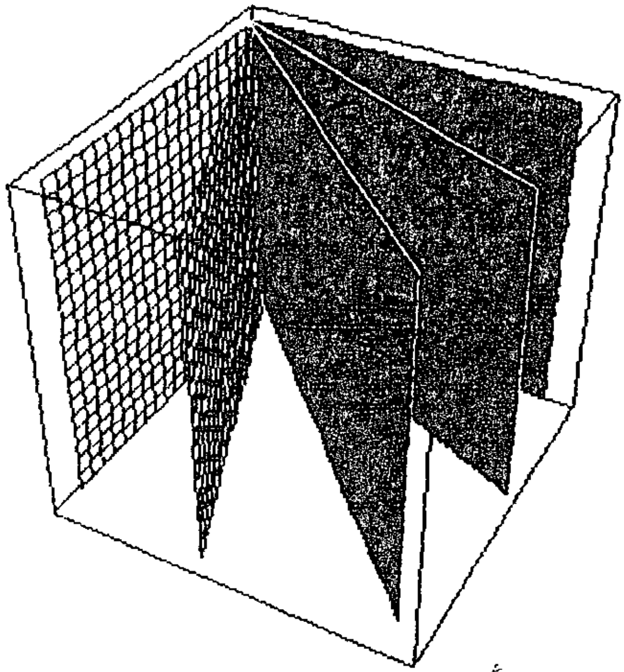

Figura 8 Superficies coordenadas ϕ = cte.

3 Coordenadas cilíndricas parabólicas (u, v, z)

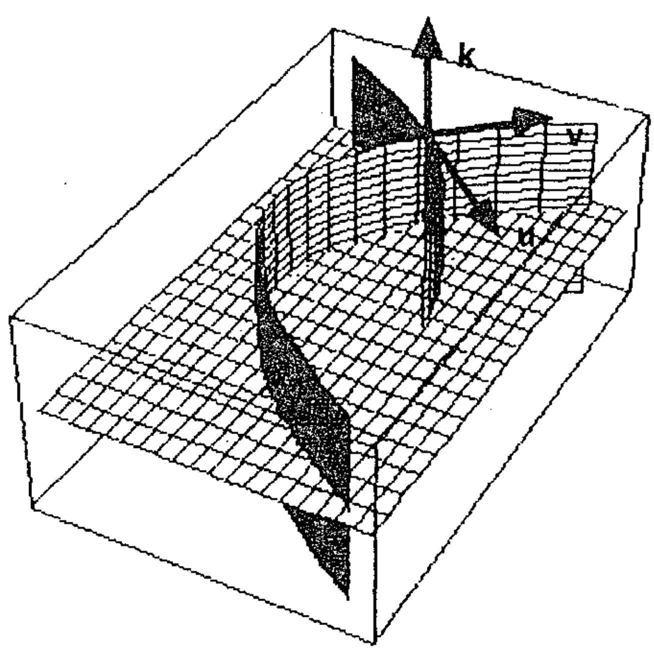

Figura 9 Coordenadas cilíndricas parabólicas.

La transformación correspondiente es

$$x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \qquad y = uv \qquad z = z$$

Las familias de superficies coordenadas que se obtienen son:

1. Medios cilindros parabólicos homofocales con un eje común negativo, u = cte.
2. Cilindros parabólicos homofocales con un eje común positivo, v = cte.
3. Planos paralelos al plano xy, z = cte.

4 Coordenadas parabolóideas (u, v, ϕ)

$$x = uv\cos\phi \qquad y = uv \operatorname{sen}\phi \qquad z = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$$

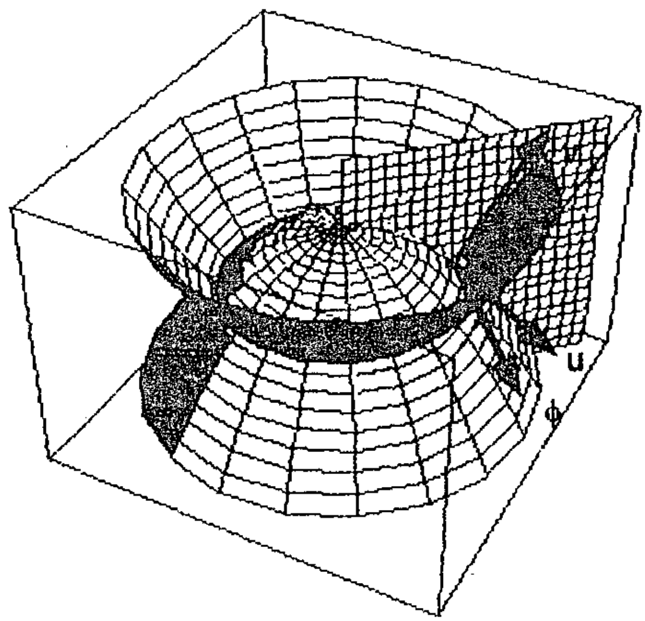

Figura 10 Coordenadas parabolóideas.

5 Coordenadas cilíndricas elípticas (u, v, z)

$$x = a\cosh u \cos v \qquad y = a \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v \qquad z = z$$

Las superficies coordenadas son

1. Cilindros elípticos homofocales, u = cte.
2. Cilindros hiperbólicos homofocales, v = cte.

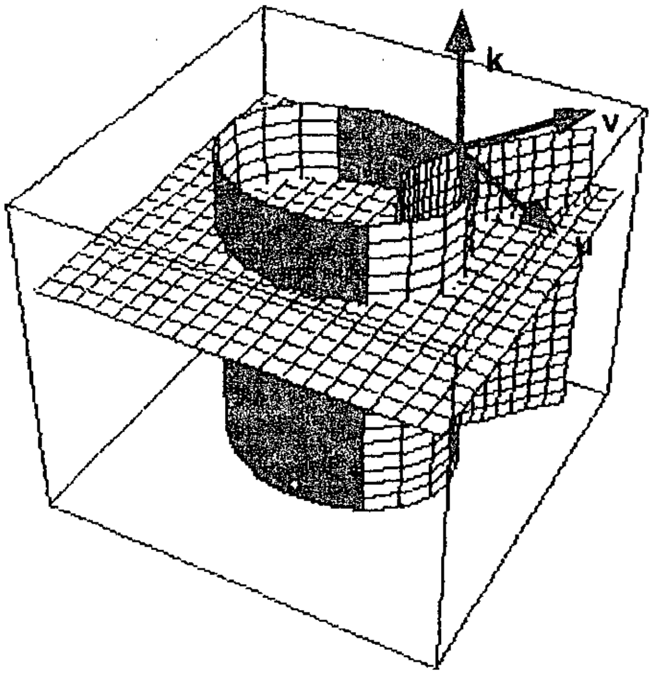

Figura 11 Coordenadas cilíndricas elípticas.

3. Planos paralelos al plano xy, z = cte.

6 Coordenadas esferoidales alargadas (ξ, η, ϕ)

$x = a \operatorname{senh} \xi \operatorname{sen} \eta \cos \phi \qquad y = a \operatorname{senh} \xi \operatorname{sen} \eta \operatorname{sen} \phi \qquad z = a \cosh \xi \cos \eta$

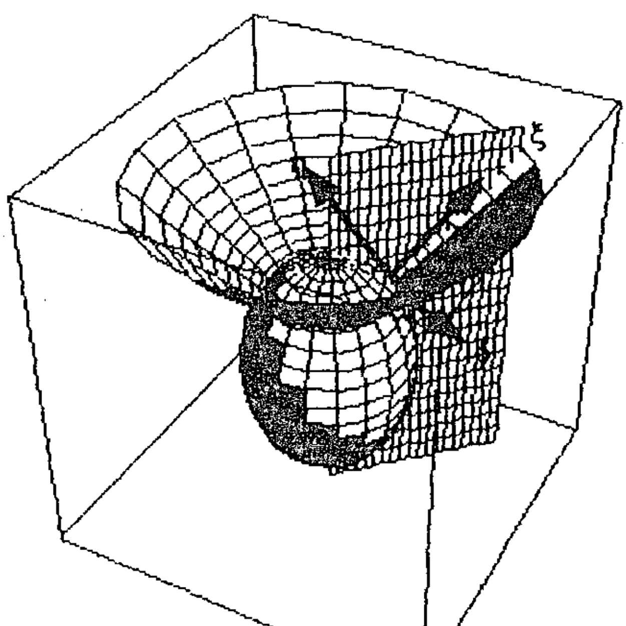

Figura 12 Coordenadas esferoidales alargadas.

7 Coordenadas esferoidales achatadas (ξ, η, ϕ)

$x = a \cosh \xi \cos \eta \cos \phi \qquad y = a \cosh \xi \cos \eta \operatorname{sen} \phi \qquad z = a \operatorname{senh} \xi \operatorname{sen} \eta$

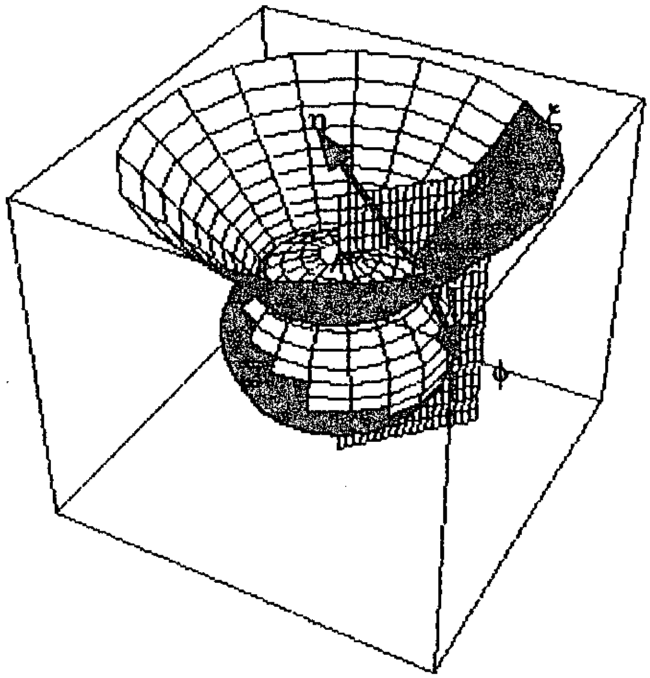

Figura 13 Coordenadas esferoidales achatadas.

8 Coordenadas bipolares (u, v, z)

$$x = \frac{a \operatorname{senh} v}{\cosh v - \cos u} \qquad y = \frac{a \operatorname{sen} u}{\cosh v - \cos u} \qquad z = z$$

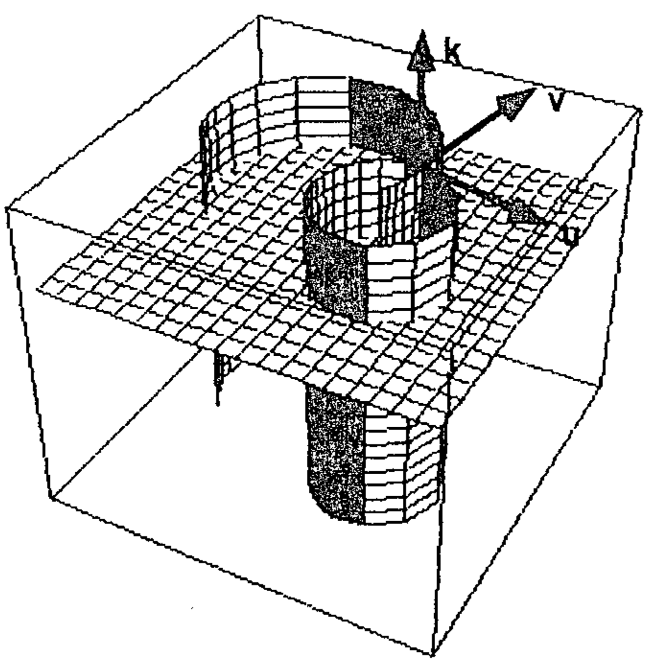

Figura 14 Coordenadas bipolares.

Las superficies coordenadas son cilindros circulares, con u y v constantes; y planos paralelos al plano xy, con z = cte.

Bibliografía

ARFKEN, GEORGE. *Métodos matemáticos para físicos.* México: Editorial Diana, S.A. (1981).
HWEI, P. HSU. *Análisis vectorial.* México-Buenos Aires: Centro Regional de Ayuda Técnica (1969).
LASS, HARRY. *Análisis vectorial y tensorial.* México: C.E.C.S.A. (1969).
SPIEGEL, MURRAY R. *Análisis vectorial.* México: McGraw-Hill (1970).
YAVORSKI, B.M., y DETLAF, A.A. *Manual de Física.* Moscú: Editorial MIR. (1977).
F. ANGULO, A. DEVIA, F. RUIZ. *Memorias, Encuentro de Ciencias Básicas. VI Coloquio Caldense de Matemáticas y IV de Física.* Universidad Nacional de Colombia. Mayo 19 al 14 de 1993.