La contribución de Simon Stevin a la construcción del concepto de Número

Resumen

Los trabajos aritméticos de Simón Stevin de Brujas, ingeniero flamenco que vivió en el siglo XVI, representan un punto de inflexión en el desarrollo de la noción de número, en tanto que rompen explícitamente con la concepción griega aun dominante en la "matemática teórica" de esa época. Stevin propone un nuevo concepto que integra las operaciones de "contar" y "medir". La forma como Stevin concibió y justificó sus nuevos números puede arrojar luz sobre algunas dificultades en el aprendizaje de los conceptos básicos de la aritmética.

Abstract: The arithmetical works of Simon Stevin of Bruges, Flemish engineer who lived during the XVI century, represent an inflection point within the development of the concept of number. In fact, these works explicitly break off with the Greek concept of number and besides, propose a new one integrating counting and measuring operations. The way in which Stevin conceives of and justifies his ideas shed light upon learning processes of basic arithmetical concepts.

Introducción

En la historia de la matemática, Simón Stevin (1548-1620) es reconocido como el introductor, en la Europa occidental, de la notación decimal para los números fraccionarios; sin embargo, la fundamentación teórica que justifica el uso de dicha notación, y que Stevin pretendió dar en términos de un sistema axiomático-deductivo, no ha sido todavía suficientemente valoradas. El acercamiento teórico de Stevin dio lugar a una ruptura con la concepción griega que hizo posible el acceso a un concepto moderno de número asociado tanto a magnitudes discretas, como a magnitudes continuas.

La obra matemática de Simon Stevin que contiene sus mayores aportaciones teóricas a esta ciencia es *L'Arithmétique*, un grueso tratado publicado en 1585, en el que Stevin se propone convencer a sus contemporáneos que se puede tratar de manera unificada, y

Guillermina Waldegg
CINVESTAV, México

con un fundamento teórico común, la aritmética teórica y la aritmética práctica. Esta propuesta contraviene los planteamientos griegos en donde aritmética práctica y aritmética teórica correspondían a niveles distintos e incompatibles de esta ciencia. En el mismo año de 1585, Stevin publicó un fascículo breve, llamado *La Disme*, conteniendo la parte de *L'Arithmétique* que él consideraba que debía estar al alcance, no sólo de un público culto, sino de todo aquel que en su vida productiva tuviera que tratar con números. *La Disme* explicaba entonces, con reglas simples y sin complicaciones teóricas, la notación decimal y su operatividad incluyendo, de manera primordial, el tratamiento de las fracciones decimales que hasta entonces sólo se manejaban por medio de "quebrados".

Un primer análisis de los trabajos matemáticos de Stevin, arroja cuatro puntos que es pertinente resaltar y que revisaremos en lo que sigue:

- El cambio que representa la definición de número de Stevin respecto a la definición de número en la matemática teórica griega.
- La dificultad que entraña una definición de número que se asocia tanto a cantidades continuas como a discretas.
- La ampliación del dominio numérico que resulta del nuevo concepto de número.
- La forma en la que las operaciones aritméticas intervienen en la evolución del concepto.

Número y magnitud en la matemática teórica griega

La concepción de Stevin de lo que es el número y cómo se opera, representa una ruptura con el concepto de número de la matemática teórica griega (en lo que sigue, al hablar de matemática teórica griega nos referiremos sólo a la matemática que se sistematiza en los *Elementos* de Euclides).

En los griegos, el número se define a partir de la categoría de cantidad y mediante la oposición entre las cantidades infinitamente divisibles y las "finitamente" divisibles. Aristóteles [*Metafísica*, 1020a, 5] define la cantidad como *"...aquello que es divisible en dos o más partes alícuotas"*. La división es la operación que permite identificar las cantidades y también es la base de su clasificación: una cantidad discreta o número puede ser dividida sólo un número finito de veces, el límite de tal división es la unidad. La cantidad continua o magnitud puede dividirse indefinidamente sin que con ello pierda su esencia.

Los números y las magnitudes forman, para los griegos, clases ajenas e independientes y, en consecuencia, sus respectivos estudios no sólo son distintos sino irreductibles. Siguiendo la tradición platónica, la geometría se ocupa sólo de estudiar las magnitudes, mientras que la aritmética lo hace con los números. La siguiente cita muestra lo anterior:

> *Los axiomas que son premisas de demostración pueden ser idénticos en dos o más ciencias pero en el caso de dos diferentes "génera" tales como la aritmética y la geometría no se pueden aplicar demostraciones aritméticas a las propiedades de magnitudes, a menos que las magnitudes en cuestión sean como números* [Aristóteles: *Analíticos Posteriores* 75^{b}, 5 (subrayado nuestro)].

El uso de la palabra *"génera"* en este párrafo de los *Analíticos Posteriores*, nos remite a la clase de objetos que comparten ciertas características de generación. Las diferencias en la naturaleza o el origen de los objetos matemáticos determina el modo de operar con ellos: aunque se tengan proposiciones análogas y las mismas reglas de inferencia, éstas no pueden aplicarse indistintamente a objetos con génesis diferentes. Estas dos ciencias no tienen, en principio, ninguna conexión, excepto en el caso de las *magnitudes conmensurables*, aquellas magnitudes que pueden ser medidas con la misma unidad y en donde se puede aplicar los resultados de la aritmética a la geometría, puesto que las razones entre estas magnitudes pueden ser pensadas como razones de números.

El dominio numérico griego tiene la estructura básica que se deriva del modo de generar la serie numérica y del modo de operar con sus elementos teniendo en mente un referencial externo. Una vez determinada la naturaleza de los conceptos, como reflejo de una realidad física externa, la metodología que se debe emplear para operarlos queda de una vez definida.

La unidad, principio generador del número, es el concepto que resulta al abstraer de las "cosas" (de cada cosa) los rasgos que conciernen exclusivamente a su singularidad; de aquí que no tenga ningún sentido, desde el punto de vista griego, pensar en la división de la unidad, sin que ésta pierda su esencia —de la misma manera que una cosa singular (un hombre, un caballo) no puede ser dividida sin que pierda su esencia.

La imposibilidad de dividir la unidad numérica, encierra la esencia de la cantidad discreta tal como la define Aristóteles: las subdivisiones de una cantidad discreta no se pueden continuar más allá de la unidad y, en consecuencia, sólo es posible llevar a cabo un número finito de estas divisiones. La unidad es el principio generador del número y su indivisibilidad lo caracteriza.

Bajo tal concepción, el dominio numérico se limita, como una necesidad lógica, al de los números naturales (los números para contar) excluyendo de este dominio a la unidad, las cantidades nulas y cualquier expresión fraccionaria. Se establece una diferencia definitiva entre contar y medir. Ciertamente en la aritmética griega hay un tratamiento de las razones numéricas que ahora identificamos con los números racionales, pero estas razones no se consideran en sí mismas números, sino meras comparaciones entre números, que es posible explicitar porque existen desde el momento mismo en que existen los números.

Por otra parte, las magnitudes geométricas, prototipo de cantidades continuas, forman un dominio heterogéneo. A él pertenecen longitudes, áreas y volúmenes. Comparten la propiedad de ser divisibles potencialmente *ad infinitum* y comparten los métodos para establecer entre ellas (si son de la misma especie) razones y proporciones. Sin embargo, no se puede hablar de una estructura que las aglutine, análoga a la estructura del dominio numérico. Los segmentos, por ejemplo, forman un agregado de elementos abstractos, aislados e independientes entre sí; es posible, dados dos segmentos, operar con ellos, compararlos, ordenarlos, pero esto no implica que pierdan su individualidad y, por así llamarlo, su libertad. La recta, en la geometría griega, es uno de estos segmentos que puede ser prolongado indefinidamente, pero no ocupa el lugar privilegiado que tiene en nuestra matemática como continente en el cual se ordenan y confunden los segmentos y que hace posible su estructuración.

Las comparaciones entre magnitudes en términos de sus razones —que es un primer nivel cualitativo del proceso de medir— dan lugar a la clasificación de las magnitudes en conmensurables e inconmensurables. Sin embargo esta clasificación, así como las que resultan de todas las comparaciones que se establecen entre magnitudes, no obedecen a una definición de "clases de equivalencia" puesto que son relaciones binarias, es decir, se establecen tomando sólo dos elementos a la vez.

La divisibilidad está en la raíz de la definición de conmensurabilidad e inconmensurabilidad: si es posible encontrar una magnitud finita que "mida" (es decir que divida exactamente) simultáneamente a dos magnitudes dadas, estas dos magnitudes son conmensurables. Si, por el contrario, la búsqueda de esta "magnitud unidad" nos conduce a tomar magnitudes más y más pequeñas en un proceso de división potencialmente infinito, las magnitudes son inconmensurables. En el primer caso, cuando las magnitudes son conmensurables, las razones entre ellas tiene un comportamiento análogo al de las razones numéricas, en consecuencia, pueden ser tratadas como estas últimas, como nos dice la proposición X 5 de *Los Elementos:*

X 5: *Las magnitudes conmensurables están en la misma razón que dos números.*

de lo contrario, no hay vinculación posible entre magnitud y número.

La matemática griega considera la existencia de una magnitud unidad no sólo necesaria para las prácticas de medición, sino teóricamente indispensable para la caracterización conmensurable-inconmensurable. Una unidad métrica no puede tener el estatus de "absoluta" que tiene la unidad aritmética, puesto que la primera no tiene una "realidad" externa. Elegir una magnitud unidad equivaldría a privilegiar una magnitud con atributos impuestos externamente y no "leídos" en la propia realidad; la elección de una magnitud unidad no se puede, entonces, independizar de la actividad del sujeto.

Sin embargo, la magnitud unidad que resulta de comparar dos magnitudes conmensurables (su "máximo divisor común") es una unidad intrínseca a las dos magnitudes comparadas y, por tanto, independiente del sujeto que lleva a cabo la comparación. Esta unidad tiene las características teóricas que impone la matemática griega, pero tiene también el inconveniente de no ser única, puesto que varía al cambiar el par de magnitudes comparadas.

Una hipótesis aceptada por varios historiadores es que la división griega entre la aritmética y la geometría tiene sus orígenes en las paradojas de Zenón, que exigían un tratamiento cuidadoso del infinito y del continuo y en el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables. Este último hecho acotó las aspiraciones pitagóricas de explicar la totalidad de la realidad física, tanto en sus aspectos discretos como en los continuos, por medio de los números naturales y de sus razones.

Euclides mantuvo la separación entre aritmética y geometría impuesta por Aristóteles [Cfr. Jones 1987, p 377]: en *Los Elementos*, los Libros I al VI y XI al XIII son exclusivamente geométricos, mientras que los Libros VII al IX están dedicados sólo a la aritmética. En ningún momento de esta obra los términos "número" y "magnitud" aparecen en un mismo libro, con excepción del Libro X, en donde la *Proposición X 5*, que ya hemos mencionado, hace uso de la licencia otorgada por Aristóteles.

La definición de número en Stevin

Imbuido por una tendencia empirista, Stevin extrae su concepto de número de la experiencia cotidiana y profesional, como una extensión de la práctica generalizada de medir. En este momento la frontera establecida por los griegos entre la matemática teórica y la matemática aplicada parece desvanecerse y las necesidades prácticas determinan el tipo de matemática que se debe desarrollar. Stevin, como afirma Jakob Klein:

> *... pone su experiencia en la práctica comercial, financiera e ingenieril al servicio de sus preocupaciones "teóricas" e inversamente, su "teoría" se pone en marcha dentro de su "actividad práctica"* [Klein 1968, pg. 186].

Para dar una fundamentación teórica de las actividades matemáticas cotidianas, era necesario buscar mecanismos ágiles para operar los resultados de mediciones que, además, pudieran ser objeto de una formalización de acuerdo a los esquemas griegos. Stevin resuelve el aspecto operatorio en la publicación de *La Disme* en donde presenta una sistematización, con ciertas innovaciones, de la notación decimal que, aunque en esta época ya era conocida, su uso distaba mucho de ser generalizado [Cfr. Sarton, 1935]. En tanto que el segundo punto, Stevin lo resuelve en el tratado teórico de *L'Arithmétique*, a partir de la identificación de magnitud y número, atribuyendo propiedades numéricas a las cantidades continuas y propiedades de continuidad a los números.

En Stevin, a diferencia de lo que ocurre en la matemática griega, el número aparece asociado a la cantidad sin que la oposición entre lo discreto y lo continuo forme parte del concepto. El concepto de número se construye a partir del reconocimiento de un isomorfismo operatorio entre número y cantidad, esto es, del reconocimiento de que se puede operar con los números de la misma manera que se manipularían las cantidades en general (continuas o discretas).

Stevin introduce, al inicio de su tratado, la definición siguiente:

> *Definición 2: El número es aquello por lo cual se expresa [s'explique] la cantidad de cada cosa* [Stevin: *Le premier livre d'Arithmétique*, p 1].

Esta definición representa un cambio conceptual con respecto a la matemática euclidiana. Para Aristóteles el número es una cantidad (una clase de ellas), mientras que, de acuerdo a la definición de Stevin, el número es el medio para hacer evidente (para hablar de) la cantidad. Para ambos autores la cantidad es un concepto que se abstrae en un primer nivel de representación de ciertas propiedades de los objetos materiales (su "ser cuantitativo"), pero mientras Aristóteles sitúa el número y la magnitud en este primer nivel, Stevin pasa a un segundo nivel de representación en el cual el número "habla" del nivel precedente.

A partir de esta primer definición, Stevin borra la dicotomía continuo-discreto de la cantidad al negar la "discretez" del número como una característica de su esencia:

QUE EL NÚMERO NO ES UNA CANTIDAD DISCONTINUA
[Stevin, *Op. cit.* p 2 (en mayúsculas en el original)].

El número, como entidad aislada, es "continuo" en el sentido aristotélico, es decir, es posible dividirlo indefinidamente sin que pierda su esencia y, en todo caso, hereda la característica de continuidad o discretez de la "cosa" (su cantidad) que está cuantificando; por ejemplo, si se habla de 1 hombre, el número 1 es discreto, mientras que si hablamos de 1 legua, el número 1 resulta ser continuo. Con ello, continuo y discreto dejan de ser categorías ontológicas, la discusión se apartar del campo de la matemática, ya que el ser continuo o discreto son propiedades circunstanciales imputables sólo a los objetos cuantificados.

Una definición de número asociado a cantidades continuas y discretas

El concepto griego de número y el nuevo concepto de Stevin corresponden a dos organizaciones diferentes de la relación entre cantidad y número: en los griegos, el número es una parte de la cantidad y se construye a partir de la oposición entre discreto y continuo; en Stevin, cantidad y número son dos dominios diferentes, el primero corresponde a una abs- tracción que se realiza sobre un contexto empírico, el segundo se sitúa en un nivel puramente simbólico. Esta nueva organización de la situación favorece la evolución del concepto de número hacia un dominio unificado, pero presenta ciertas dificultades que se manifiestan al tratar de justificar la relación entre número y cantidad. Veamos cuáles son éstas.

En la matemática griega el número se define por intermediación de la unidad, esto es, número es un agregado de unidades:

> *Número es una multitud compuesta de unidades [Elementos, Def. VII-2].*

y la unidad se define (oscuramente) como:

> *Unidad es aquello de acuerdo a lo cual cada cosa es llamada uno [Elementos, Def. VII-1].*

Esta definición de número permite pensar, de entrada, en una especie de "número puro", de tal manera que las relaciones entre dos o más números pueden ser concebidas independientemente de las cantidades a las que ellos se refieran, por ejemplo, 10 es la mitad de 20 y también es el doble de 5, sin que sea necesario imaginar las cantidades (la cosa contada) que estos números representan.

Uno de los problemas que surgen al extender la definición de número a las cantidades continuas radica en que, a diferencia de lo que ocurre en las cantidades discretas, para tratar con las primeras no se dispone de una "unidad natural", sino que el número se asigna a la cantidad por medio de una unidad <u>convencional</u>, a saber, aquella que se eligió como unidad de medida. En esta situación, al operar con números no es claro si se está operando con "números verdaderos", con símbolos o con la "cantidad numerada" como reprocha a Stevin Le Teneur, uno de sus más fieros detractores contemporáneos [Cfr. Jones, 1978]. La ausencia de una unidad natural, tiene como consecuencia la dificultad de concebir el número "depurado" del contexto, que permita operar sin tener que apelar a la cantidad correspondiente. Consciente de esta dificultad, Stevin define *número aritmético* como el número obtenido después que ha sido abstraído de la cantidad que le dio origen

> *El número aritmético es el número que se expresa sin adjetivo de magnitud [*Stevin, *Op. cit. Def. 4,* pg. 3*].*

Una buena parte del trabajo en *L'Arithmétique* está dedicada a mostrar que el dominio de los números es <u>homogéneo</u> en el sentido de que éstos se independizan de sus orígenes y, por lo tanto, se puede operar con ellos sin referirse a las cantidades de donde surgieron. Por ejemplo, el número 9, que podemos imaginar como asociado a una cantidad lineal, puede ser visto también, como el área de un cuadrado, sin que por ello pierda o modifique sus propiedades relacionales con respecto a otros números ni tampoco sus propiedades operatorias.

Es claro que la unidad deja de tener el carácter privilegiado que tiene en la matemática griega, como principio generador del número, con lo que Stevin debe renunciar a la posibilidad de tener un principio de generación absoluto, y se ve obligado a buscar para su concepto de número una sustentación externa a la matemática, situada en el contexto físico: la cantidad de cada cosa.

La ampliación del dominio numérico a consecuencia del nuevo concepto de número

Euclides, en *Los Elementos*, establece las siguientes propiedades de la cantidad numerable, que marcan una diferencia fundamental con la cantidad medible:

a) La unidad para numerar no es divisible.
b) La unidad para numerar no es un número (el 1 no es un número).
c) Las razones entre cantidades numerables no son números (las fracciones no son números).

El número de Stevin, por su parte, se refiere no sólo a la cantidad numerable sino también a la medible, lo que implica un cambio en las acciones asociadas al número: el número no sólo se emplea para contar sino también para medir.

A este nuevo concepto de número, cuyo objetivo es establecer una identificación del tratamiento de cantidades continuas y discretas, Stevin tiene que atribuir, explícitamente, propiedades que lo diferencian del número griego:

a) La unidad (numérica o geométrica, ahora identificadas) <u>es</u> un número:

QUE LA UNIDAD ES NÚMERO
[Stevin, *Op. cit.* p 1 (en mayúsculas en el original)].

b) La unidad es <u>divisible</u> ilimitadamente.
c) Las partes de la unidad son, a su vez, números.

De estas tres premisas Stevin obtiene, de manera directa, una ampliación del dominio numérico que incluye tanto a la unidad, como a las fracciones de ella. Pero ésta no es la única ampliación que introduce Stevin, sino que generaliza el dominio numérico a los resultados de la extracción de raíces, incorporando así a los números radicales (racionales e irracionales) y, en general, a todos los resultados de operaciones algebraicas con números positivos.

Al abrir un espectro tan amplio a los números, queda la preocupación de si efectivamente estos nuevos entes se ajustan a la definición inicial y representan "cantidades de cosas". Stevin se da entonces a la tarea de mostrar que, así como a cada magnitud le corresponde un número (el resultado de la medición), a cada número le corresponde una magnitud. Para llevar a cabo esta tarea Stevin tiene que mostrar que la identificación griega restringida a las potencias de un número con ciertas magnitudes geométricas (x^2 es una superficie y x^3, un volumen y no hay otra posibilidad) no es única.

Un ejemplo de estos razonamientos es el siguiente: supongamos que tenemos un segmento de longitud 2 (Figura 1). Si formamos un cuadrado con él, el área será $2^2 = 4$ y si ahora construimos un cubo, su volumen será $2^3 = 8$. Hasta aquí el razonamiento coincide con el griego: la primera potencia es lineal, la segunda es cuadrada y la tercera es cúbica. Si ahora apilamos 2 de estos cubos, el volumen del prisma resultante será $2^4 = 16$, con lo que le habrá dado un significado geométrico a la cuarta potencia y, de manera análoga a todas las subsiguientes [Cfr. Stevin, *Op. cit.* pp 4-5].

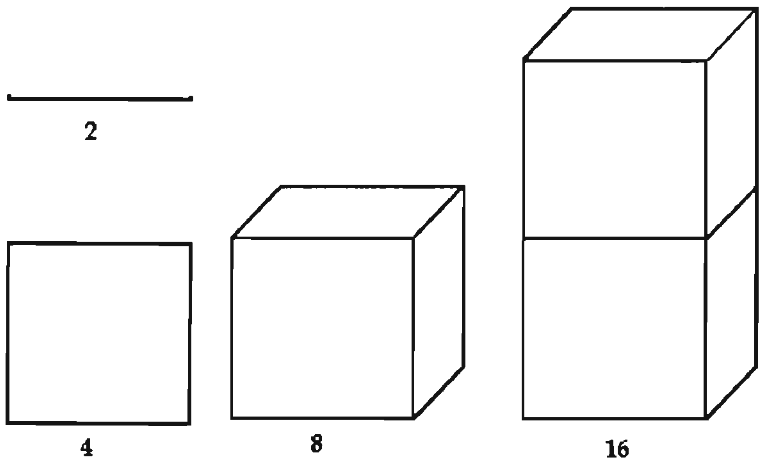

Figura 1

Análogamente, Stevin exhibe magnitudes geométricas que se asocian a potencias de números fraccionarios. Por ejemplo, partamos ahora de un segmento de longitud 1/2 (Figura 2) y construyamos el cuadrado correspondiente que tendrá área $(1/2)^2 = 1/4$, y el cubo tendrá volumen $(1/2)^3 = 1/8$. Dividiendo el cubo por la mitad obtendremos un prisma cuyo volumen es $(1/2)^4 = 1/16$, y así sucesivamente para las potencias siguientes [Ibid.].

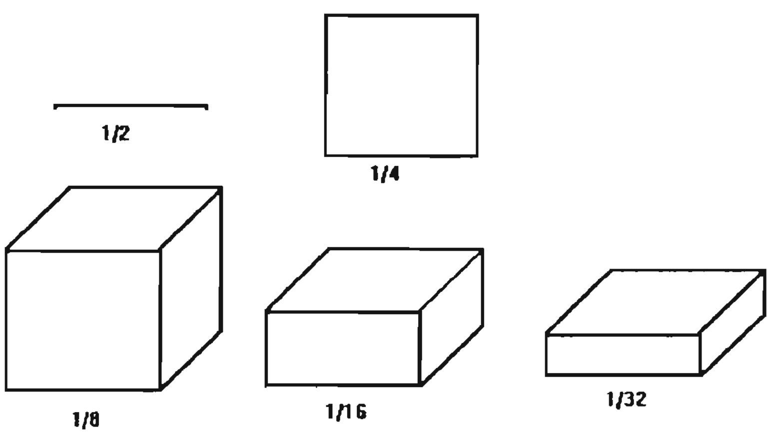

Figura 2

Con este método, Stevin quiere mostrar que dado un número, siempre puede exhibir una magnitud que lo represente, de la misma manera que dada una magnitud, siempre puede exhibir un número asociado a ella. Mediante esta identificación funcional, Stevin pretende fundamentar la homogeneidad del dominio numérico y la naturaleza de su "número aritmético", con lo que concluye:

> *QUE CUALQUIER NÚMERO PUEDE ser cuadrado, cúbico, etc. Así como cualquier raíz es un número* [Stevin, *Op. cit.* p 8 (en mayúsculas en el original)].

El significado de las operaciones aritméticas en la evolución del número

La obra de Stevin está marcada por el predominio del campo operatorio, hasta cierto punto pragmático, para dar realidad al número. Hay varios momentos en la obra de Stevin —no propiamente dentro de su explicitación de principios sino en sus argumentaciones adyacentes— en donde es posible apreciar este hecho. Resaltaremos estos momentos:

a) "La esencia del número está en sus operaciones"

El primer indicio de que el número de Stevin está condicionado por las operaciones que se pueden realizar con él lo encontramos en un pasaje de *L'Arithmétique* en donde Stevin argumenta a favor de la división de la unidad, afirmando que negar la divisibilidad de la unidad es limitar la naturaleza del número, "*... la esencia de la cual se manifiesta en las operaciones aritméticas que muchos autores realizan, entre otras, la absoluta partición de la unidad... como lo hace Diofanto*" [Cfr. Stevin, *Op. cit.* p 2].

Con afirmaciones como la anterior Stevin da al número una existencia operatoria, es decir, son las operaciones que podemos realizar con los números las que determinan su naturaleza. Pero ¿dónde se sustentan las operaciones aritméticas? Imaginemos una posible argumentación de Stevin:

El número expresa la cantidad de cada cosa

Las operaciones aritméticas, como relaciones y transformaciones de números, expresan las acciones y transformaciones que se hacen con las cosas (en tanto cuantificables).

Entonces, son las acciones que se realizan sobre las cantidades las que dan sustento a las operaciones aritméticas y éstas, a su vez, las que constituyen la esencia del número; de la misma manera que las acciones de medir, comparar, partir, transformar, etc. son las que dan sentido a la cantidad.

El predominio del campo operatorio de Stevin es determinante para la reconceptualización del número, y es a partir del desarrollo de la notación decimal que Stevin lleva a cabo con el propósito de facilitar las "cuentas de los negocios de los hombres" (el título completo de *La Disme* es: *La Disme, que enseña fácilmente a expresar en números enteros sin quebrados, todas las cuentas que se encuentran en los negocios de los hombres*), que se posibilita el establecimiento de un isomorfismo operatorio entre números y cantidades. La introducción de los números decimales cobran entonces una importancia teórica hasta ahora ignorada.

b) Cerradura del dominio numérico respecto a las operaciones algebraicas

Un paso muy importante hacia la ampliación del dominio numérico, es la consideración de que los resultados de operaciones algebraicas realizadas con números, son a su vez números. Stevin tiene dos formas de argumentar sobre este punto. La primera, como lo hemos visto, está basada en la práctica de la medición y consiste en exhibir magnitudes geométricas que se puedan asociar a dichos resultados. La segunda forma de argumentación, usada repetidamente por Stevin, tiene carácter extralógico y fue, en su tiempo, duramente criticada(historiadores contemporáneos como J. Klein, han puesto también en este argumento el foco de su atención). Veamos esta segunda forma de argumentación en su primera exposición, cuando Stevin afirma que la unidad es un número:

Que la unidad es número

La parte es de la misma materia que su todo
La unidad es una parte de la multitud de unidades
Entonces, la unidad es de la misma materia que la multitud de unidades
Pero la materia de la multitud de unidades es número
Entonces, la materia de la unidad es número.
[Stevin, *Op. cit.* p 1].

Esta argumentación presenta niveles de abstracción ambiguos. La primera premisa, *"La parte es de la misma materia que su todo*", hace referencia a objetos materiales (en otro momento, Stevin refuerza su argumento diciendo que "... *negar esto es negar que un pedazo de pan es pan")*, en tanto que la segunda, *"La unidad es parte de una multitud de unidades*", se refiere a objetos matemáticos y, por tanto, abstractos. El paso irrestricto de un nivel a otro evidencia el soporte normativo que da la realidad física al concepto de número de Stevin.

Ya hemos dicho que Stevin sustenta su concepto de número sobre la base de las operaciones que es posible realizar con él, y éstas, en las acciones que es posible realizar sobre la materia (en tanto cuantificable). Estas acciones, cuyos resultados no alteran la cantidad total de materia que interviene en el proceso y que, por lo tanto caracterizan su conservación, se manifiestan, en el nivel de los objetos matemáticos, como operaciones que caracterizan, a su vez, la cerradura del conjunto. Los tres niveles de abstracción a través de los cuales transita Stevin, apoyado en intuiciones que él considera universales, son:

NIVEL	REFERENTE	ACCIÓN	RESULTADO
Contexto empírico:	Materia	Acciones concretas	Conservación de la cantidad
Abstracción empírica	Cantidad	Acciones interiorizadas	Conservación de la cantidad
Abstracción simbólica	Número	Operaciones algebraicas	Cerradura del dominio numérico

Así, como al partir el pan se obtiene pan, al operar con números se obtienen números. De nueva cuenta, son las operaciones con los números, las que sustentan las características del dominio numérico.

Las magnitudes, funcionalmente isomorfas respecto a los números, no tienen todavía con Stevin las características estructurales de éstos. A cada magnitud le corresponde un número y a cada número, una magnitud, pero no hay una manera de unificar las magnitudes ni de tener una representación única para ellas, esto sólo sería posible mediante la introducción de la geometría analítica de Descartes, menos de un siglo después.

La magnitudes de Stevin constituyen todavía un dominio caótico, por así decir, pero este hecho pasa a un segundo término al privilegiar el modo de representación numérico. Los números se han enriquecido al introducir nuevos elementos y al ampliar las operaciones entre ellos y, con la introducción de la notación decimal, se han dado pasos que preparan el estudio de la variación continua. Éstas son grandes aportaciones de Stevin.

c) La elección de la unidad

La divisibilidad de la unidad está contextualizada en los procesos de medición, mediante los cuales se asocia un número a una magnitud. Stevin propone una estructuración teórica basada en la sistematización de esa práctica. El punto fino en esta propuesta está en el hecho de identificar una unidad "natural" —la numérica— con una unidad "arbitraria" —la métrica. Stevin parece sustentar esta identificación en la "generalidad de la arbitrariedad" que caracteriza la elección de la unidad métrica. En otras palabras, el concepto de unidad numérica resulta de la abstracción de una propiedad común a todos los objetos físicos —su singularidad, en tanto que la unidad de medida resulta de la abstracción de una característica común a toda actividad de medir —elegir arbitrariamente una magnitud como patrón— a la cual se le puede aplicar siempre y de la misma manera la operación de subdividirla en diez partes iguales.

Stevin no argumenta a favor de una única unidad de medida, de hecho, recomienda que se tome la unidad usual en cada región y que, sobre ésta, se generalice la práctica de tomar subdivisiones decimales. La siguiente cita resalta lo que acabamos de mencionar:

> *... se partirán todas las medidas, ya sea de longitud, líquidos, secos, monedas, etc., por las anteriores progresiones de décimos y cada una de estas famosas especies se llamará **Comienzo (Commencement)**; por ejemplo el Marco, Comienzo de pesos, por el cual se pesan el oro y la plata, la Libra, Comienzo de otros pesos comunes; la Libra Gruesa de Flandes, la Libra Esterlina en Inglaterra, el Ducado en España, y así cada Comienzo de monedas.* [Stevin, *La Disme* en *La Practique de l'Arithmétique*, p 212].

Stevin llama *Comienzo* a cada una de las unidades de medida, no importa su naturaleza o dimensión, y es a este *Comienzo* que va a asociarle la unidad numérica.

> *Todo número propuesto es llamado el COMIENZO (COMMENCEMENT), su símbolo es* (0) .[Stevin, *Def. II*, *La Disme*, p *208]*.

Si se tiene el número trescientos sesenta y cuatro, éste se llamará trescientos sesenta y cuatro *Comienzos*, escribiéndolo de la siguiente manera 364 (0). A lo largo de *La Dis-*

me, Stevin deja ver cómo establece, a través de la práctica de medir, la equivalencia entre cada una (y todas) de las unidades métricas con una única unidad natural numérica.

La unidad de Stevin es entonces el resultado no sólo de una abstracción realizada sobre los objetos en tanto cantidades, sino, principalmente, de una abstracción realizada sobre las acciones coordinadas que se efectúan en el proceso de medir estos objetos.

La inclusión de la unidad dentro del dominio numérico y la posibilidad de subdividirla indefinidamente, son las innovaciones teóricas más importantes de la aritmética de Stevin. Esto le permite establecer las bases de la identificación entre número y magnitud y amalgamar sus campos operatorios. No es extraño, entonces, que Stevin dedique varios párrafos de *L'Arithmétique* a la argumentación en favor de ello. Dentro de esta argumentación, ocupa un lugar especial la afirmación de que no es la unidad en la aritmética lo que juega un papel análogo al punto en la geometría, sino es el cero. El número y la magnitud, dice Stevin, son tan semejantes y tienen tantas cosas en común que parecen casi idénticos, consecuentemente, debe haber algo en el número que corresponda al punto en las magnitudes, pero no es, como se creía en la antigüedad, que la unidad sea el principio del número tal y como el punto es el principio de la magnitud, este papel corresponde al cero [Stevin, *Le Premier Livre de L'Arithmétique*, p 2]. Con esta afirmación, Stevin da un paso importante hacia lo que habría de ser la identificación punto-número en la recta de Descartes.

Conclusiones

Al hacer el análisis de un momento crítico en el desarrollo histórico del número, podemos destacar algunos puntos esenciales pertinentes en el momento de la construcción psicológica del concepto y que pueden ser útiles para posteriores estudios de corte didáctico.

Sin intento de jerarquizar estos puntos, vemos primero la dificultad de identificar, a través de un solo concepto, las magnitudes continuas y las cantidades discretas. La separación clásica entre contar y medir, que supone una serie de acciones y operaciones distintas en cada caso y que, por lo tanto, siguen caminos de construcción diferentes, se pone de manifiesto de manera clara cuando se examina la historia de estas nociones; el hecho notable de que Stevin haya dedicado una obra tan extensa para convencer a sus contemporáneos que se podían usar los mismos números para ambas operaciones, nos habla de esa dificultad. Si bien en una primera instancia el niño en edad escolar puede aceptar aparentemente sin problema la afirmación de que un número puede estar asociado a una magnitud, la duda sobre la suficiencia de los números aparece muy pronto cuando se enfrentan los problemas de la aproximación y de la relación entre la "magnitud real" y la medida, entre el número y la magnitud.

En segundo lugar tenemos el papel de la conservación, indispensable para hacer la construcción de los conceptos de número (natural) y de magnitud geométrica, que juega un papel principal también en el momento de buscar la identificación de los conceptos. Con esto no se pretende decir que la identificación es posterior a la formación independiente de los conceptos, pero sí lo es a la tematización de esta identificación.

La diferencia que tanto parece preocupar a los maestros de la escuela primaria entre número y numeral se hace evidente en las objeciones que provoca en sus contemporáneos el punto de vista de Stevin cuyas argumentaciones continuamente se desplazan entre el nivel del símbolo, el de la cantidad y el de la "cosa numerada".

Otro punto que conviene revisar al analizar la construcción psicológica de los conceptos matemáticos es el referente a la presencia simultánea de los diferentes niveles de referencia en las argumentaciones, lo que nos remite a la necesidad de basar siempre el conocimiento nuevo en sustratos anteriores bien estructurados.

Finalmente y, de manera notable, se ha resaltado el sustrato operatorio del concepto: el número es la resultante de una coordinación de operaciones aritméticas, aunque esta coordinación no esté necesariamente tematizada. Stevin hace explícito este sustrato operatorio y sobre él fundamenta el concepto mismo, que puede entonces ser "aplicado" a todo tipo de cantidades.

Bibliografía

ARISTOTLE, The Great Books of the Western Word Vol. VIII, Encyclopaedia Britannica, Chicago 1978.

EUCLID, *The Elements*, en Sir Thomas Heath, *Euclid. The Thirteen Books of the Elements*, Dover Publications Inc., New York, 1956.

JONES, C. V., (1978), *On the concept of one as a number*, tesis doctoral, University of Toronto.

JONES, C. V., (1987), "La influencia de Aristóteles en el fundamento de Los Elementos de Euclid", en *Mathesis*, vol. II, No. 4.

KLEIN, J. (1968), *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*, Dover Publications, Inc. N. York (1992).

STEVIN, SIMON (1585), *L'Arithmetique et la Practique d'Arithmetique* en *Les Oeuvres Mathématiques* (1634) ed A. Girard, Leyde.

SARTON, G. (*1935*) "The First Explanation of Decimal Fractions and Measures (1585) Together with a History of the Decimal Idea and a Facsimile (no. XVII) of Stevin's Disme"" en *ISIS* 23, 1935, pp 153-244