El Problema de los Siete Puentes de Königsberg: Leonhard Euler y la Teoría de Grafos

Resumen

Se analiza la solución propuesta por Euler al problema de los siete puentes de Königsberg, publicada en su famoso artículo "Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis".

Abstract Following the ideas developed by Euler in his famous work "Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis", we describe and study the solution posed by Euler to the problem of the seven Königsberg bridges.

Podría muy bien ser que los conceptos más básicos de la teoría de grafos —una de las áreas más desarrolladas de las llamadas matemáticas discretas— fueron inicialmente establecidos por Leonhard Euler en su conocido artículo titulado *"Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis"* (La solución de un problema relacionado con la geometría de la posición). (Ver [3]. Existen traducciones al inglés de este trabajo, publicadas en [1] y [4].) A este respecto, en [1], Norman L. Biggs, E. Keith Lloyd y Robin J. Wilson comentan:

> "Los orígenes de la teoría de grafos son modestos, casi frívolos. Mientras que varias ramas de las matemáticas fueron motivadas por problemas fundamentales de cálculo, movimiento y mediciones, los problemas que condujeron al desarrollo de la teoría de grafos fueron frecuentemente un poco más que puzzles (rompecabezas), diseñados para poner a prueba la ingenuidad más que para estimular la imaginación. Pero a pesar de la aparente trivialidad de tales puzzles, ellos cautivaron el interés de matemáticos, con el resultado que la teoría de grafos ha llegado a ser un tema rico en resultados teóricos de una sorprendente variedad y profundidad".

Efectivamente, existe alguna justificación para aseverar que los grafos y la teoría de los grafos podrían haberse originado en Europa durante la primera mitad del siglo XVIII. En ese entonces, Leonhard Euler estudió y resolvió el problema conocido por el nombre de

Héctor Hevia
Universidad Católica de Valparaíso
Valparaíso, Chile

"los siete puentes de Königsberg", publicando tal solución en el artículo mencionado anteriormente.

Königsberg era el nombre de una ciudad en Prusia del Este, la cual es atravesada por un río, el río Pregel. (Kaliningrado es el nombre actual de la ciudad). El río Pregel fluye a través de la ciudad dividiéndola en cuatro áreas. En ese entonces, siete puentes conectaban estas diferentes áreas.

Se cuenta que los habitantes de Königsberg se entretenían tratando de encontrar una ruta alrededor de la ciudad que recorriese los siete puentes de Königsberg, sin pasar por algún puente más de una vez. Dado que estos intentos habían resultado infructuosos, varios de los habitantes de Königsberg creían que esta ruta no existía.

En el año 1736, Leonhard Euler, uno de los matemáticos de primera línea de su época, publicó un artículo en el cual no sólo solucionaba este problema particular, sino que además proporcionaba un método general para resolver otros problemas del mismo tipo. En palabras de Euler [3]:

> "... (de este problema particular) yo he formulado el problema general: cualquiera sea el arreglo y división del río en ramas, y sin importar cuantos puentes hay ¿puede uno determinar si es o no posible cruzar cada puente exactamente una vez? Mientras nuestro interés sea el problema de los siete puentes de Königsberg, éste puede ser resuelto construyendo una lista exhaustiva de todas las rutas posibles para luego determinar si alguna de las rutas satisface las condiciones del problema. Debido al número de posibilidades, este método de solución sería demasiado difícil y laborioso y en otros problemas con más puentes sería imposible ..."

Como una primera simplificación, Euler utiliza letras mayúsculas para denotar a las regiones en las que el río divide a la ciudad. A su vez, designa con letras minúsculas a los puentes. Ver en la Figura 1, el diagrama del río Pregel, las áreas en las que se divide la ciudad de Königsberg, y los puentes que comunican estas regiones.

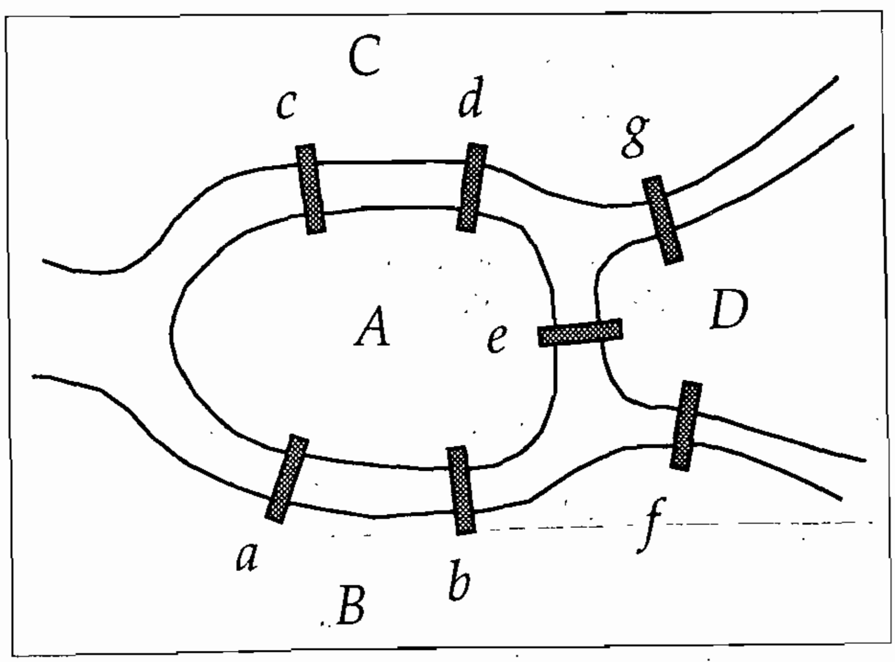

Figura 1

Más adelante, Euler afirma:

"Todo mi método se basa en una conveniente y particular manera con la cual se puede representar el cruce de un puente ... Si un paseante va de A a B sobre el puente a o b, yo escribo AB ..."

Euler logra así representar una ruta mediante una sucesión de letras. Por ejemplo, $ABDC$ representa a la ruta que va de A a B, de B a D, y de D a C, atravesando tres puentes. Es inmediato que si la ruta deseada existe, entonces su representación debe consistir de 8 letras (ya que cada uno de los siete puentes debe cruzarse exactamente una vez).

A continuación, Euler observa que si el número m de puentes que conducen al área A es impar, entonces A debe aparecer $\frac{m+1}{2}$ veces en la representación correspondiente a la ruta buscada. Luego, Euler concluye:

"En el caso de los puentes de Königsberg por tanto, debe haber tres ocurrencias de la letra A en la representación de la ruta, dado que cinco puentes (a, b, c, d, e) conducen al área A. Luego, dado que tres puentes conducen a B, la letra B debe ocurrir dos veces; similarmente, D debe ocurrir dos veces y C también. Así en una serie de 8 letras representando el recorrido de los siete puentes, la letra A debe ocurrir 3 veces, y las letras B, C, y D dos veces cada una —pero esto no puede suceder en una sucesión de 8 letras. Sigue de esto que tal travesía no puede ser tomada a lo largo de los siete puentes de Königsberg".

En los siguientes párrafos de su artículo, Euler se detiene a examinar la situación más general cuando el número de puentes que inciden en alguna de las áreas es par. En primer lugar, él generaliza su observación referente al número de ocurrencias de una letra en la representación de la ruta buscada.

"... Así, en general, si el número de puentes (que conducen a A) es par, entonces el número de ocurrencias de A será la mitad de este número si la travesía no se inicia en A, y el número de ocurrencias será en una unidad mayor que la mitad del número de puentes si la travesía se inicia en A".

En este momento, Euler se apresta a establecer una regla para el caso general, la cual será utilizada para determinar si puede o no existir un arreglo de letras que represente a la ruta buscada.

"Dado que en cualquier travesía, uno puede partir desde una sola área, definiré ... para cada área A, el *número de ocurrencias* de la letra A como igual a la mitad del número de puentes (que conducen a A) más uno, si este número de puentes es impar, y si este número de puentes es par, como igual a la mitad de este número".

Denotemos por $n(A)$ al número de ocurrencias de la letra A, según la definición dada por Euler. Sea $p(A)$ el número de puentes que conducen al área A. Entonces, la anterior definición puede formularse como sigue.

$$n(a) = \begin{cases} \dfrac{p(A)+1}{2} & si\ p(A)\ es\ impar \\ \\ \dfrac{p(A)}{2} & si\ p(A)\ es\ par \end{cases}$$

Conviene definir la *suma de Euler* de la configuración de aguas y puentes que se esté considerando (así llama Euler a estas configuraciones) como la suma de los números de ocurrencias de todas las áreas de la configuración. Es decir, si E denota a la suma de Euler de una configuración, entonces

$$E = \sum_A n(A)$$

Antes de enunciar y probar la regla encontrada por Euler, necesitamos del siguiente lema, cuya demostración se basa enteramente en las observaciones hechas por Euler con respecto al número de ocurrencias de una letra en la representación de la ruta buscada.

Lema. Dada una configuración de aguas y puentes, supongamos que existe una ruta R que recorre todos los puentes de la configuración, cada uno exactamente una vez.

I. Si a cada región llega un número par de puentes, entonces la ruta R se inicia y termina en la misma región.

II. Si existe una región a la que llegan un número impar de puentes, entonces hay exactamente dos de estas regiones, y R se inicia en una de ellas y termina en la otra.

Demostración. Para demostrar I, supongamos que el número de puentes que conducen a cada región es par. Basta observar que si la ruta R se inicia en una región A pero no termina en A, entonces el número de puentes que conducen a A debe ser impar. De aquí sigue el resultado.

Para demostrar II, observemos que si una letra no es ni inicial ni final en la representación de R, entonces el número de puentes que conducen a la región respectiva deber ser par. Por tanto, si existe una región A en la configuración a la que llegan un número impar de puentes, entonces la ruta R comienza en A o termina en A. Por otro lado, si la representación de R comienza y termina en la misma letra, entonces el número de puentes que conducen a tal región debe ser par. Esto forzosamente implica que si existe una región a la cual llegan un número impar de puentes, entonces existen exactamente dos regiones en la configuración a las cuales llegan un número impar de puentes, siendo una de estas regiones la inicial y la otra la final de la ruta R. ***Q. E. D.***

La siguiente propiedad, enunciada y demostrada por Euler en [3], es usualmente conocida como "el primer teorema de la teoría de grafos". Esta propiedad fundamental nos será de gran utilidad en lo que sigue.

Teorema Fundamental (de Euler). En una configuración de aguas y puentes, denotemos por P al número total de puentes de la configuración. Entonces

$$\sum_{A} p(A) = 2P$$

Demostración. Cada puente está contado exactamente dos veces en la sumatoria anterior. *Q. E. D.*

Corolario. En una configuración de aguas y puentes, sea h el número de regiones a las cuales llega un número impar de puentes. Entonces

$$\sum_{A} n(A) = P + \frac{h}{2}$$

Demostración.

$$\sum_{A} n(A) = \sum_{\substack{A \\ p(A)\text{ par}}} \frac{P(A)}{2} + \sum_{\substack{A \\ p(A)\text{ impar}}} \frac{P(A)+1}{2} = P + \frac{h}{2} \qquad \text{Q.E.D.}$$

Observar que de este corolario se concluye que el número h debe ser par. Esta conclusión, ahora parte del folklore de la teoría de grafos, también fue descubierta y probada por Euler en [3].

Ahora ya estamos preparados para presentar y demostrar la regla encontrada por Euler, la cual permite decidir cuándo la ruta buscada existe y cuál es la naturaleza de tal ruta.

Teorema de Euler. Dada una configuración de aguas y puentes, supongamos que existe una ruta R que recorre cada uno de los puentes exactamente una vez. Entonces, y sólo entonces, una de las siguientes proposiciones es verdadera.

i. La suma de Euler E de la configuración es igual al número total de puentes.
ii. La suma de Euler E de la configuración es igual al número total de puentes más uno.

En el caso i, a cada región llega un número par de puentes y la ruta R comienza y termina en una misma región. En el caso ii, existen exactamente dos regiones hacia las que llegan un número impar de puentes, debiendo la ruta R comenzar en una de estas regiones y terminar en la otra.

Demostración $\Rightarrow$) Supongamos que para una configuración de aguas y puentes dada, existe una ruta R que recorre cada uno de los puentes exactamente una vez. Denotemos por E a la suma de Euler de la configuración dada y denotemos por P al número total de puentes que existen en la configuración. Si a cada una de las regiones llega un número par de puentes, entonces, el corolario implica que

$$E = P.$$

Por el contrario, si existe una región a la cual llega un número impar de puentes, entonces el lema implica que hay exactamente dos de estas regiones. Aplicando el corolario, se obtiene

$$E = P + 1.$$

Antes de probar que la condición "i o ii" es suficiente para la existencia de la ruta buscada, debemos comentar que Euler no dio demostración alguna de esta suficiencia. En el último párrafo de [3] él escribe:

> "Cuando se ha determinado que tal travesía puede ser hecha, uno todavía tiene que encontrar como debiera realizarse. Para esto, yo uso la siguiente regla: mentalmente remueva los pares de puentes que conducen de un área a otra, reduciendo así considerablemente el número de puentes; entonces, es una tarea fácil construir la ruta requerida a través de los restantes puentes, y los puentes removidos no alterarán significativamente la ruta encontrada, como llegará a ser claro después de pensarlo un poco. Por tanto, no creo que tenga algún valor dar mayores detalles concernientes a cómo encontrar estas rutas".

A continuación, probamos la suficiencia de la condición "i o ii" del Teorema de Euler, con un argumento que sigue la intención subyacente en este último comentario.

$\Leftarrow$) En primer lugar, supongamos que i es verdadera. Entonces, del corolario se obtiene que a cada región llegan un número par de puentes. Sea A una región de la configuración. Construyamos una ruta R_1 que parta de A y que, abandonando A, retorne a A. Para tal efecto, procedemos como sigue. Una vez que salimos de A, y cada vez que alcanzamos una región $X \neq A$, continuamos nuestra ruta abandonando la región X por alguno de los puentes no utilizados que conducen a X (la existencia de tal puente está garantizada, porque el número de puentes que conducen a X es par). Consecuentemente, la ruta R_1 debe alguna vez retornar a A. Removamos mentalmente los puentes recorridos por la ruta R_1 y observemos que la configuración así obtenida satisface la condición i. De estas observaciones puede concluirse que es posible construir una familia $R_1, R_2, \ldots, R_k$ de rutas cerradas, que no comparten puente alguno en común y que contienen a todos los puentes de la configuración inicial. Notemos que si dos rutas R_i y R_j de este tipo pasan por una región común, entonces uno fácilmente puede construir una ruta compuesta de R_i y R_j, la que recorre todos los puentes cubiertos por R_i y R_j sin pasar dos veces por un mismo puente. (Ver un ejemplo en la Figura 2.) Componiendo en forma conveniente las rutas $R_1, R_2, \ldots, R_k$ se obtiene la ruta buscada.

En segundo lugar, supongamos que ii es verdadera. Entonces, del corolario se obtiene que hay exactamente dos regiones hacia las cuales llegan un número impar de puentes. Mentalmente construyamos un nuevo puente T entre estas dos regiones. Entonces, la nueva configuración de aguas y puentes así formada satisface i. Sea R una ruta que recorra todos los puentes de la nueva configuración y que pase exactamente una vez por cada puente. A partir de R, podemos construir una ruta R' que recorra la nueva configuración de tal modo que el último puente que R' atraviese sea T. Esta ruta R' recorrida en la configuración inicial (sin el puente T) satisface las condiciones requeridas. ***Q. E. D.***

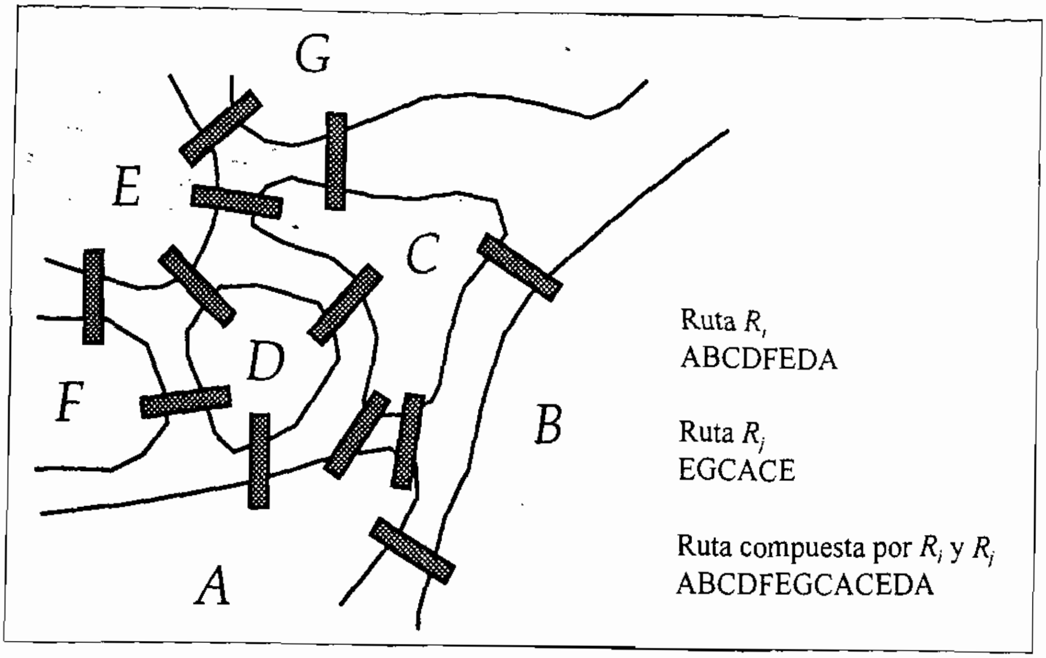

Figura 2

Para finalizar, leamos el párrafo con el cual Euler inicia la exposición de su trabajo [3]:

> "Agregada a esa rama de la geometría que se relaciona con magnitudes, la cual siempre ha recibido la mayor atención, existe otra rama, casi desconocida anteriormente, la cual Leibniz mencionó primero, llamándola *geometría de la posición.* A esta rama (de la geometría) le concierne sólo la posición y sus propiedades; no está relacionada con mediciones, ni se realizan cálculos con ellas. No se ha determinado todavía en forma satisfactoria, que clase de problemas son relevantes a esta geometría de posición, o que métodos deberían ser usados para resolver tales problemas. Por esto, cuando se mencionó un problema que parecía geométrico pero que no requería la medición de distancias ni tampoco ayudaban los cálculos en absoluto, yo no tuve dudas de que este problema estaba relacionado con la geometría de la posición —especialmente porque su solución envolvía sólo posiciones, y ningún cálculo fue de alguna utilidad. Por tanto, he decidido dar aquí el método que he encontrado para resolver esta clase de problemas, como un ejemplo de la geometría de la posición".

A mi parecer, este último párrafo muestra la extraordinaria visión de Euler, quien logra descubrir, en lo aparentemente trivial, los signos de nuevas formas del pensamiento. En nuestro lenguaje contemporáneo, se diría que Euler certeramente modeló el problema de los siete puentes de Königsberg, logrando así establecer algunas de las propiedades más básicas de la emergente teoría. Desde esta perspectiva, Euler también ilumina el quehacer de los matemáticos de hoy; en particular, de aquellos que aceptan el desafío de avanzar en áreas aún no desarrolladas del vasto conocimiento matemático.

Comentarios del Autor:

1. Existe una traducción al español de la referencia [4] publicada por Ediciones Grijalbo, S.A., Barcelona-México D.F. (1969) bajo el título "El Mundo de las Matemáticas". Es interesante leer el comentario que aparece al final del Capítulo 4 del Volumen 4

de esta obra. En él se discute brevemente la condición tácita de conexidad que debe tener el sistema de aguas y puentes, para garantizar la existencia de las rutas estudiadas.

2. En [2] puede encontrarse la teoría de "aguas y puentes" de Euler desarrollada utilizando el lenguaje actual de la teoría de grafos. (Ver Sección 2.3).
3. Este trabajo está dedicado a los estudiantes del Instituto de Matemáticas de la Universidad Católica de Valparaíso, con ocasión de la Primera Semana de la Carrera de Matemáticas, realizada el año 1995.

Bibliografía

N. L. BIGGS, E.K. LLOYD y R.J. WILSON, *Graph Theory 1736-1936*. Oxford University Press, London (1976).

G. CHARTRAND y L. LESNIAK, *Graphs and Digraphs*, 2nd Edition. Wadsworth Wadsworth & Brooks/Cole, Monterrey (1986).

L. EULER, Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. Comment. Academiae Sci. I. Petropolitanae **8** (1736) 128-140.

J.R. NEWMAN, *The World of Mathematics*. Simon and Schuster, Inc., New York (1956).