Las esferas de Dandelin

Resumen

En este trabajo se muestran las posibilidades didácticas de materiales elaborables o proyectables en el aula, respecto al análisis de relaciones por parte de los estudiantes para establecer las características definitorias de las curvas denominadas cónicas. El tratamiento del tema se realiza mediante el examen de las propiedades métricas y de tangencia de una superficie cónica con esferas inscritas y el plano de seccionamiento. Este contenido está contemplado en la quinta unidad temática de la propuesta de nuevo programa de estudio para el curso Álgebra y Geometría Analítica II en el Bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades.

Abstract This paper contains didactical suggestions for instructional materials (to-be made or transparencies) to aid the students to establish some properties that define the conics. Metric properties of tangents to a conic surface containing inscribed spheres and a cutting plane are used to examine the mathematical content. The topic proposed appears as a unit in the new program for Algebra and Analytic Geometry at the high school leved in Colegio de Ciencias y Humanidades, Mexico.

-I-

Es común en la práctica docente y en los textos de estudio para el nivel bachillerato abordar el estudio de las cónicas a partir de las definiciones formales de estas curvas, consideradas como lugares geométricos. En algunas ocasiones se refiere el origen del nombre genérico, señalando la naturaleza de los cortes que se requieren efectuar en un cono para obtener dichas curvas.

[1] Uno de los dos subsistemas de enseñanza media superior de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Joaquín Ruiz Basto
Colegio de Ciencias y Humanidades[1]
UNAM, México

A medida que el plano de corte inclina su posición original respecto al eje, se generan sucesivamente (Figura 1) una circunferencia, una elipse, una parábola —cuando el plano es paralelo a la generatriz del cono—, y una curva formada por ramas separadas, llamada hipérbola, al cortar el plano ambas hojas del cono.

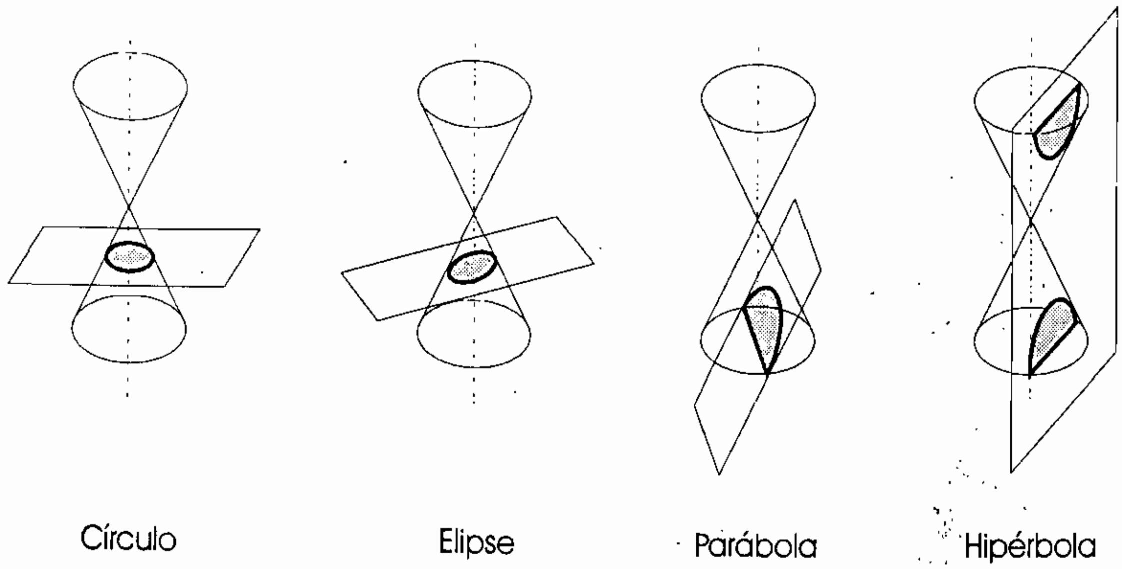


Figura 1

Lo anterior puede ser comprendido fácilmente por los estudiantes a partir de la exhibición y análisis de algunas representaciones gráficas, e incluso, a partir de la ejecución misma de los cortes en modelos físicos.

Aunque este proceder formal puede resultar impecable desde el punto de vista matemático, no es lo suficientemente rico para explicar al estudiante de qué manera y de dónde surgen las condiciones geométricas que las determinan.

La incorporación de algunos de los aspectos históricos que dieron lugar al surgimiento de estos conceptos puede aportar elementos didácticos valiosos para el tratamiento y comprensión de dicho tema, más allá de la mera referencia anecdótica, como veremos en este artículo.

-II-

En la antigua Grecia el planteamiento de tres problemas de construcción geométrica dio origen a un proceso de búsqueda de soluciones que apasionó a mentes brillantes de distintas épocas y posibilitó la construcción de nuevos y valiosos conocimientos matemáticos. Este periodo concluyó el siglo pasado cuando, con ayuda del álgebra, se estableció la imposibilidad de la resolución de tales problemas bajo las restricciones impuestas (empleo exclusivo de dos instrumentos para el trazo: una regla sin marcas y un compás que no traslada distancias).

Estos problemas clásicos se conocen como 1) trisección del ángulo (dividir un ángulo cualquiera en tres partes iguales), 2) duplicación del cubo (determinar el lado de un cubo con volumen doble de uno dado) y 3) cuadratura del círculo (obtener un cuadrado de área igual a la de un círculo).

Desde la antigüedad se obtuvieron, con mayor o menor precisión, los segmentos o figuras solicitados en estos problemas, pero las construcciones o aproximaciones realizadas no constituyeron una solución en términos estrictos, ya que indefectiblemente violaron las condiciones impuestas respecto a los instrumentos.

En este esfuerzo grandes matemáticos griegos crearon ingeniosos dispositivos mecánicos para el trazo —como el mesolabio—, e inventaron curvas —como las lunas de Hipócrates, la cuadratriz de Hipias—, que superaban en complejidad a los entes geométricos conocidos hasta entonces (rectas y circunferencias).

Es en este contexto, para solucionar el problema de la trisección del ángulo, que Menecmo introduce en el siglo IV antes de nuestra era, una tríada de curvas obtenidas como secciones de un cono circular. El plano secante o de corte se mantenía perpendicular a una generatriz (recta que va del vértice a la curva directriz) (Figura 2), de modo que el ángulo en el vértice del cono determinaba la naturaleza de la curva. (Figura 3).

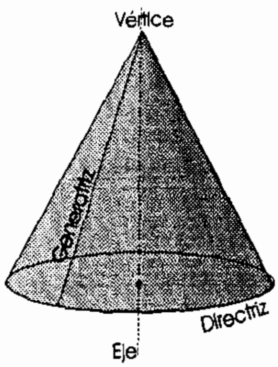
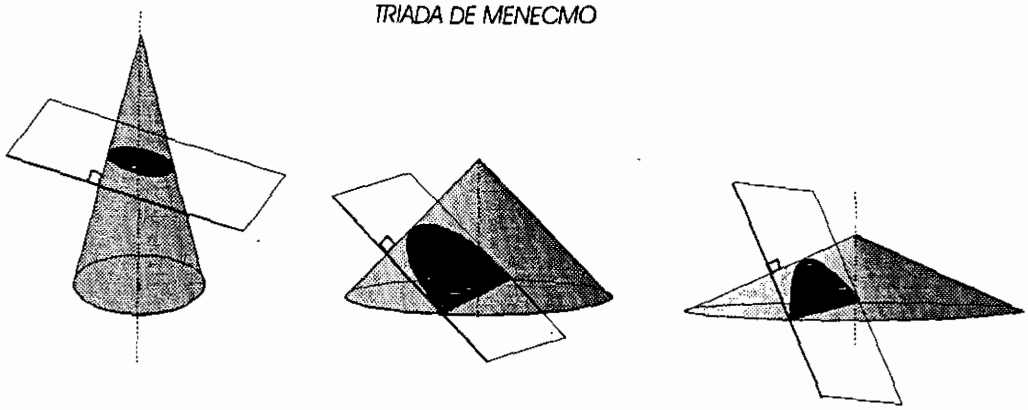


Figura 2

TRIADA DE MENECMO



Cono Acutángulo | Cono Rectángulo | Cono Obtusángulo

Figura 3

Menecmo identifica estas curvas pero no da un nombre particular a cada una de ellas. Proporciona dos soluciones al problema de la duplicación del cubo, una mediante la intersección de dos parábolas y otra utilizando la intersección de una parábola con una hipérbola.

Es en la edad de oro de la matemática griega, en el denominado periodo Alejandrino, cuando el estudio de las propiedades de estas curvas cobra su mayor impulso a través de los trabajos de Apolonio de Pérgamo, uno de los tres grandes matemáticos de esta época (los otros dos fueron Euclides y Arquímedes).

Apolonio escribió un tratado de ocho "libros" (capítulos) denominado "Secciones Cónicas", donde define a estas curvas y examina muchas de sus propiedades. Debido a esta labor, entre sus contemporáneos se le conoció como "El Gran Geómetra". Es él quien da a estas curvas los nombres que actualmente poseen, en razón de las propiedades de área que emplea para el establecimiento de lo que denominó "sus síntomas". Así, *Parábola* proviene de "aplicación" (simple) de tales propiedades; *Elipse*, de una "aplicación por defecto"; *Hipérbola*, de una "aplicación por exceso."[2]

2 Estos términos se corresponden con los que se emplean en gramática para designar, respectivamente, las figuras retóricas *Parábola*, *Elipsis* e *Hipérbole*, pues poseen un significado análogo.

El estudio de estas curvas y sus propiedades posibilitó su empleo en diversas disciplinas, como la Física y la Astronomía. Las leyes de Kepler en relación al movimiento planetario, no hubieran podido establecerse sin el conocimiento de tales curvas, por ejemplo.

En el siglo pasado, Germinal Dandelin, matemático Belga, analizó la naturaleza de las cónicas, y precisó sus características particulares de una manera sencilla y elegante: a partir de la inscripción de esferas en un cono.

En dicho trabajo muestra de que modo la caracterización que hacen los griegos de estas curvas como secciones de un cono, se corresponde con las definiciones que actualmente utilizamos en Geometría Analítica.

El punto central de sus deducciones se apoya en la igualdad de las tangentes a una esfera desde un punto exterior (Figura 4). Este resultado deriva de los siguientes hechos: 1) tres puntos distintos son coplanares 2) un plano y una esfera se intersectan en una circunferencia y 3) son iguales las tangentes trazadas desde un punto exterior a una circunferencia (Figura 5).

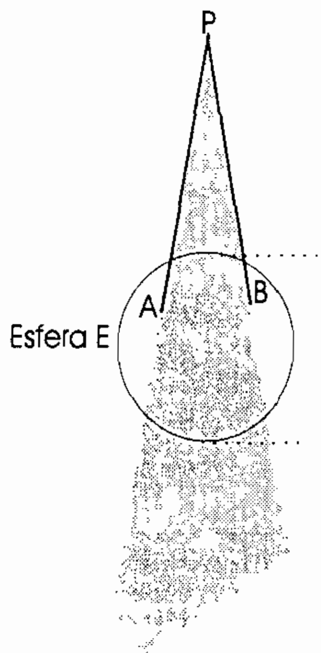


Figura 4

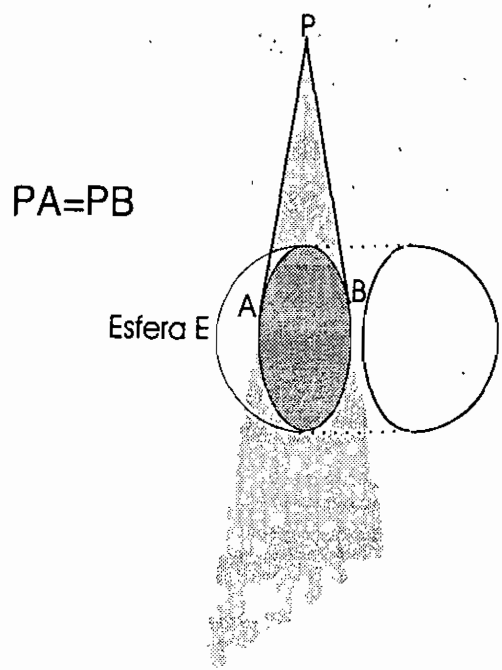


Figura 5

-III-

Examinemos ahora cada cada una de estas curvas como sección de un cono utilizando las esferas de Dandelin. Incluiremos dentro de las cónicas a la circunferencia, como es usual en los tratamientos modernos. Comenzaremos con dicha curva por su simplicidad.

Cuando la curva de intersección del cono con el plano secante es una circunferencia, puede inscribirse una esfera por encima del plano de corte y éste y aquella son tangentes precisamente en el centro de la circunferencia (Figura 6). Idéntica situación se obtiene cuando una esfera se inscribe por debajo del plano de corte (Figura 7). Ambos casos pueden resumirse en uno solo (Figura 8).

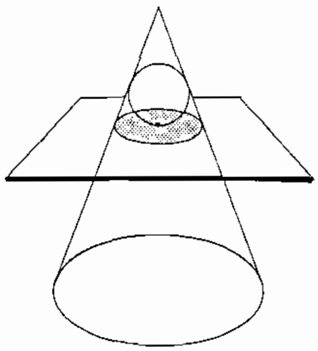


Figura 6

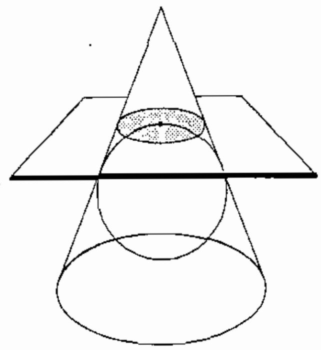


Figura 7

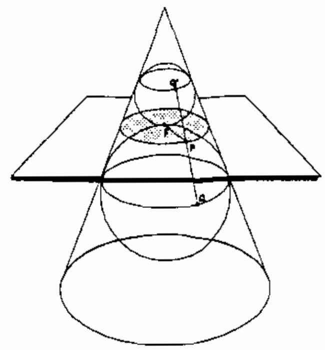


Figura 8

Es posible percibir en la Figura 8 que la distancia de un punto P de la circunferencia, al centro F (punto de contacto entre el plano y las esferas) es siempre la misma. En efecto, como QQ' está sobre una generatriz y como los planos que determinan a Q y Q' son paralelos, QQ' se mantiene constante. Por otro lado, debido a la igualdad de las tangentes a una esfera desde un punto exterior, tenemos $FP = PQ$ y $FP = PQ'$. Esto significa que FP es la mitad de QQ', es decir, es constante para cualquier punto P de la circunferencia.

Esta situación sugiere estudiar, desde la misma perspectiva, la curva obtenida al inclinar el plano (pero cortando aún todas las generatrices del cono): la elipse (Figura 9).

Las esferas inscritas en el cono son tangentes al plano de corte, por encima y por abajo, en los puntos F y F'. Al ser $PF = PQ$ y $PF' = PQ'$, ya que son iguales dos tangentes de un punto exterior P a cualquiera de las esferas, resulta que $PF + PF' = PQ + PQ' = QQ'$ que es una longitud constante sobre una generatriz del cono.

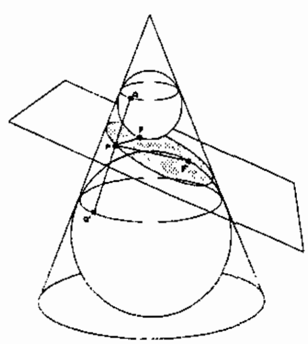


Figura 9

El caso de la parábola (Figura 10), es posible examinarlo de igual manera: observemos que el punto de tangencia de la esfera inscrita y el plano paralelo a una generatriz del cono es el foco F; la recta **d** (directriz de la parábola) es la intersección del plano que contiene a la circunferencia de tangencia entre la esfera y el cono. El punto D es el punto en el pie de la perpendicular desde P a la recta **d**.

La propiedad que define a la parábola, $PF = PD$, se sigue de los hechos siguientes: $PF = PQ$ por ser tangentes a la esfera desde el punto exterior P; $PQ = P'Q'$ por ser generatrices comprendidas entre planos paralelos; por último, en el paralelepípedo que forman los planos

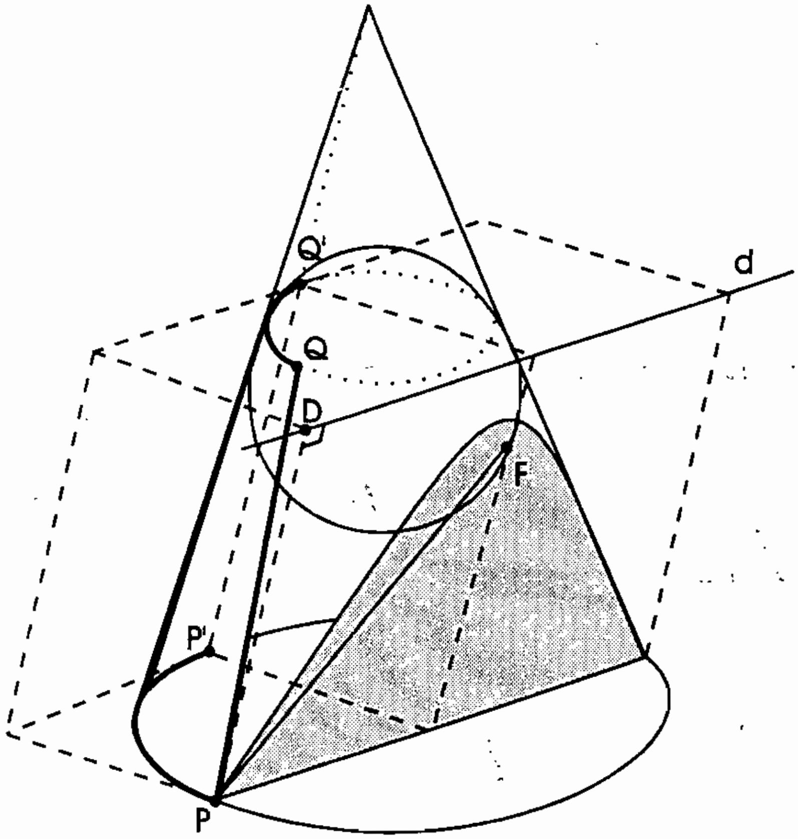


Figura 10

indicados en la Figura 10, $P'Q' = PD$[3]. Tenemos así la cadena de igualdades $PF = PQ = P'Q' = PD$ que muestra que $PF = PD$.

Para la hipérbola (Figura 11), observemos que los focos F y F', son los puntos de

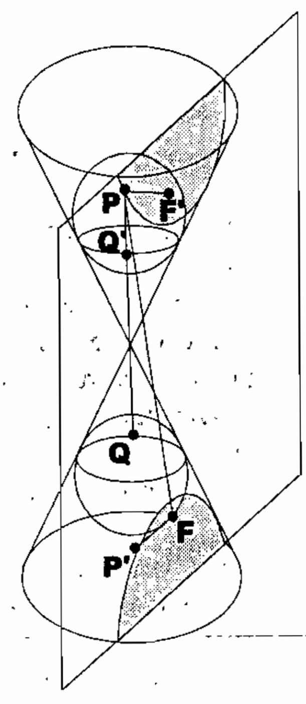


Figura 11

3 Nótese que el segmento $P'Q'$ está sobre la generatriz del cono a la cual es paralela el plano que contiene a la parábola. Tal generatriz constituye la intersección del cono con el plano tangente paralelo al de la parábola).

tangencia de las esferas inscritas, superior e inferior, con el plano de corte; P es un punto sobre una de las ramas de la curva.

Debido al hecho de que $PF = PQ$ y que $PF' = PQ'$ (por ser pares de tangentes externas, desde P, a cada esfera), podemos concluir que $FP - F'P = PQ - PQ' = QQ'$, que es una distancia constante. Ésta es, claramente, la propiedad que define a esta curva.

Es conveniente mostrar al estudiante las situaciones en que las curvas degeneran en puntos o rectas, con el fin de completar la interpretación geométrica de los casos que aparecerán posteriormente con la aplicación de los métodos algebraicos:

a) Circunferencia o elipse nulas

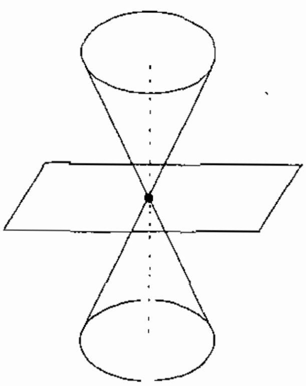


Figura 12

El plano corta al cono sólo en un punto.

b) Parábola degenerada

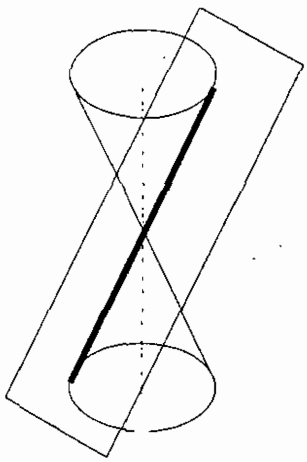


Figura 13

El plano es tangente al cono a lo largo de una generatriz.

c) Hipérbola degenerada

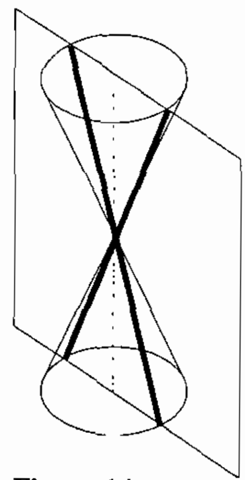


Figura 14

El plano secciona al cono en dos rectas que se cortan en el vértice.

-IV-

Con el fin de estimular el desarrollo de la imaginación y visualización espacial por parte de los estudiantes —capacidades que también son promovidas en los temas de geometría plana y del espacio en cursos anteriores—, es recomendable comenzar con algunos ejercicios de relaciones espaciales, necesarios para la comprensión de estos análisis, referentes a tangencia e intersección entre planos, conos y esferas.

Para ello, como se señaló al inicio de este trabajo, puede recurrirse a modelos tridimensionales, construidos por los mismos alumnos con materiales sencillos. Podrían sugerirse actividades como las siguientes:

1.- Para observar la tangencia de una esfera con un plano:

a) Colocar una esfera sobre una superficie plana cubierta de una fina capa de grafito para observar que el contacto o tangencia es un punto (Figura 15). Representar esto en un diagrama de corte.

b) Colocar esferas de igual o distinto diámetro, por arriba y por debajo de una placa de cristal u otro material transparente, recién cubiertas en la zona del contacto con una capa de material de color fácilmente transferible —tinta para sello, barra de lápiz labial, etc.— (Figura 16). Revisar aquí la equivalencia de los casos en que el plano está colocado con distintas inclinaciones (Figura 17) y el caso en que las dos esferas coinciden en el punto de tangencia (Figura 18). Visualizar mediante un diagrama de corte.

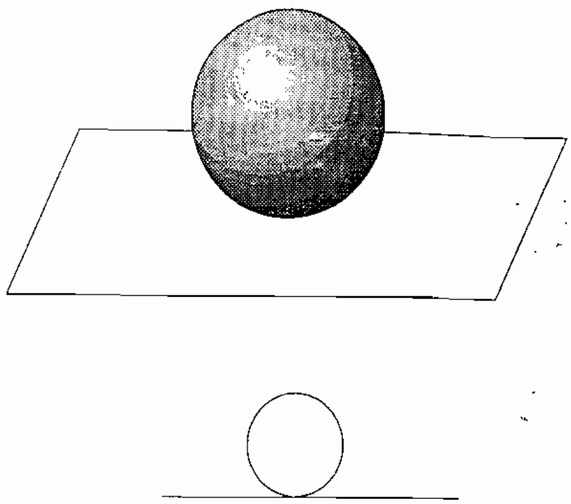


Figura 15

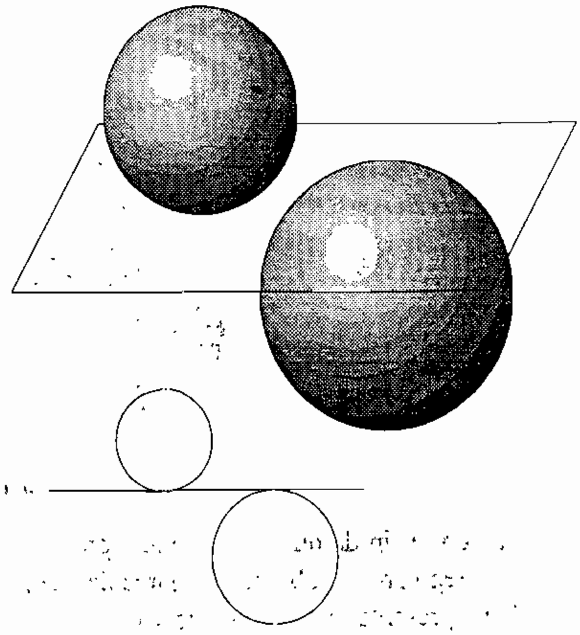


Figura 16

2. La tangencia de un cono con una esfera inscrita en el mismo puede examinarse de esta forma:

a) Si se utilizan materiales duros o pesados (conos de plástico, metal o cartón —v.gr. embudos, bases para estambre—; esferas macizas de acrílico, vidrio u otro material consistente) puede colocarse en el interior del cono un forro de papel carbón para

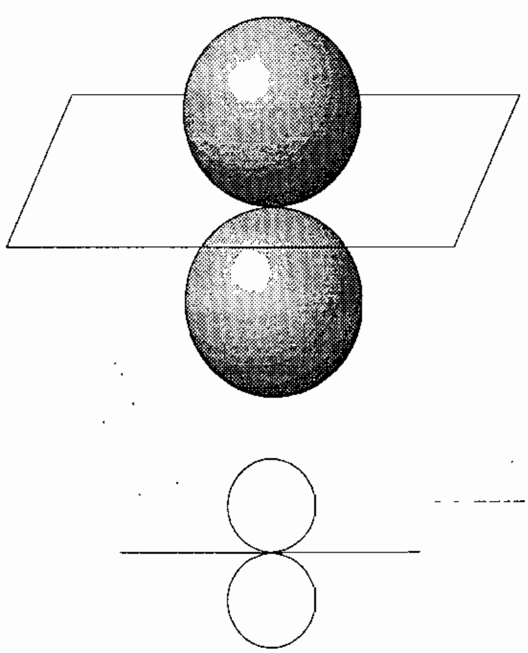


Figura 17

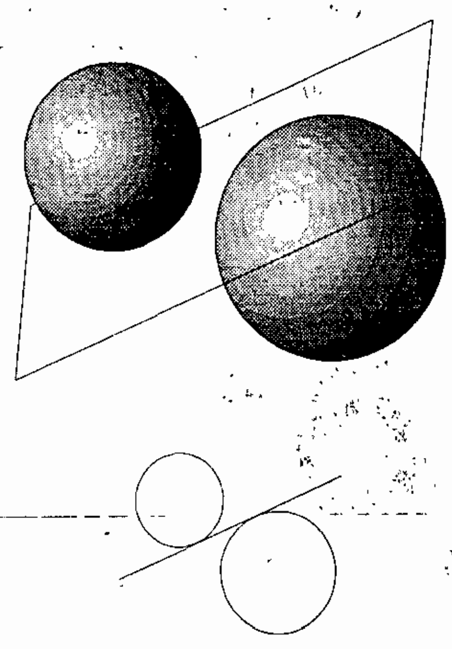


Figura 18

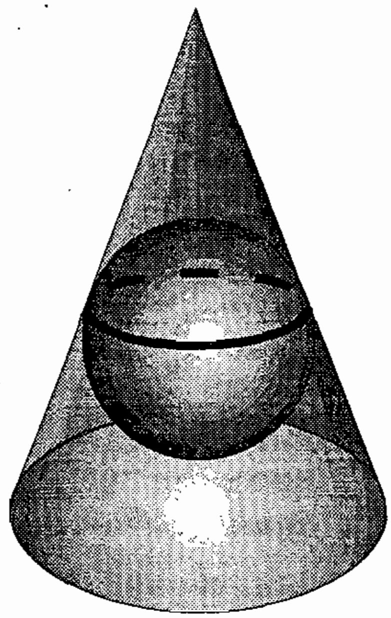


Figura 19

calca, con el fin de que el estudiante presione fuertemente al introducir la esfera —de tamaño regular—, y observe la marca dejada por ésta en el interior del cono (Figura 19). Es útil representar esto en perspectiva.

b) Si sólo se dispone de materiales suaves o ligeros (por ejemplo, conos de papel o láminas de acetato transparente y esferas de unicel o pelotas de esponja o plástico delgado), es recomendable usar tinta para sello o barra de lápiz labial, como en el caso de la tangencia del plano con una esfera.

c) Realizado lo anterior, una importante actividad de reflexión que debe proponerse a los estudiantes, consiste en examinar la imposibilidad de que el círculo de tangencia entre el cono y la esfera sea máximo. Para esto deberán analizar el comportamiento de las tangentes a una circunferencia, realizando un corte longitudinal que seccione al cono pasando por el vértice y el diámetro en la base (Figura 20-a); la propiedad de perpendicularidad de los radios en el punto de tangencia conlleva el paralelismo de las tangentes en los extremos del diámetro. La extrapolación de esto al espacio conduciría al caso de la intersección de una esfera con un cilindro (Figura 20-b):

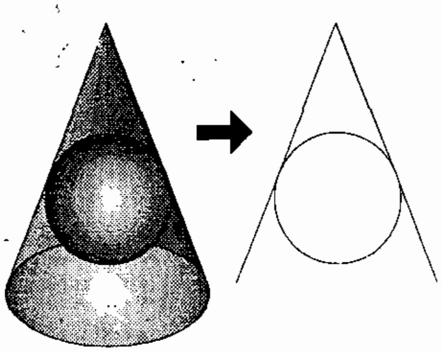


Figura 20-a

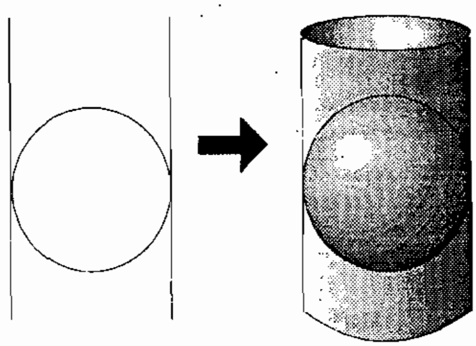


Figura 20-b

Una actividad reflexiva ligada a la anterior consiste en extrapolar relaciones entre figuras planas al caso de sus análogos en el espacio, contemplando a aquellas como cortes de ciertos cuerpos, que habría que determinar en este ejercicio de imaginación y visualización espacial (Figura 21).

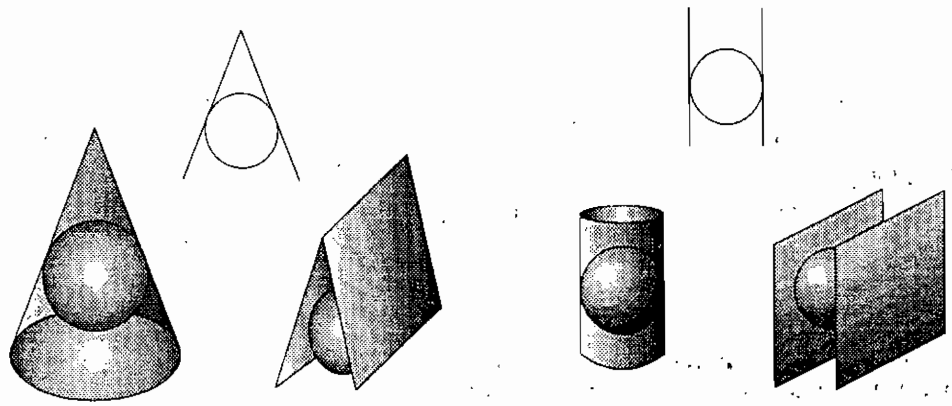


Figura 21

Otra actividad adicional podría ser el análisis dinámico de las posiciones de las tangentes y puntos de tangencia en una circunferencia, trazadas desde un punto exterior (Figura 22) a medida que:

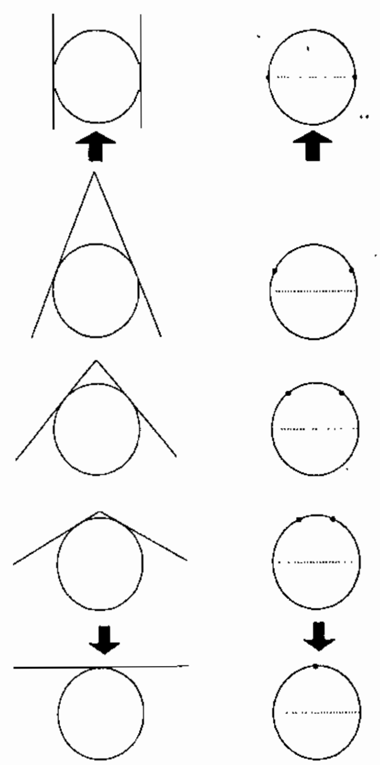


Figura 22

(i) Éste se aproxima a aquella hasta llegar al caso límite de coincidencia de los dos puntos de tangencia y obtención de una sola tangente.

(ii) Alejamiento del punto exterior y el caso al infinito cuando las tangentes son paralelas —caso del cilindro en la extrapolación al espacio.

Estos recursos didácticos muestran una forma de abordar con materiales modestos y accesibles —tanto para los estudiantes como para el profesor—, un importante tópico de estudio. Éste aparece actualmente en la propuesta de nuevos programas de estudio para el bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades.

El bosquejo expuesto para su desarrollo exhibe las posibilidades educativas de este planteamiento, al igual que la congruencia y continuidad del mismo con respecto a los contenidos geométricos contemplados en otros cursos donde se introduce el estudio de algunos sólidos, en especial del cono y la esfera.

Bibliografía

BABINI, JOSÉ Y PASTOR, J. REY, *Historia de las Matemáticas,* Vol. 1, Barcelona, España, Gedisa, S.A., 1985.

CASTELNUOVO, EMMA, *Didáctica de la Matemática Moderna,* México, Trillas, 1980.

HOWARD, EVES, *An Introduction to the History of Mathematics,* New York, U.S.A., Holt, Rinehart and Winston, 1964.

MATEMÁTICAS, COMISIÓN DE PROGRAMAS Y GRUPO DE SÍNTESIS, *Propuesta de Programas de Estudio para las Asignaturas: Matemáticas I a IV.* México, UNAM, Gaceta CCH, Cuadernilo No. 83, febrero de 1996.

RUIZ, JOAQUÍN, *Geometría Analítica,* México, Plantel Oriente, Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM, 1985.

STRUIK, DIRK J., *Historia Concisa de las Matemáticas,* México, Instituto Politécnico Nacional, Consejo Editorial, 1980.

WEXLER, CHARLES, *Geometría Analítica, un Enfoque Vectorial,* Barcelona, España, Montaner y Simón, S.A., 1968.

El autor desea expresar su agradecimiento a Martín Escamilla Carmona por su valiosa colaboración en la elaboración de los dibujos que aparecen en este artículo.