Generalización del Teorema de Pitágoras

Resumen

Tradicionalmente, el manejo y la interpretación del teorema de Pitágoras se limita a lo siguiente: "En todo triángulo rectángulo, la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa". Conviene que los profesores de matemáticas de la escuela secundaria y del nivel medio superior conozcan y manejen con propiedad la generalización de este teorema, cuyo mensaje consiste en que tal relación no sólo se cumple para cuadrados, sino en general para toda tema de figuras semejantes. De este modo podrán propiciar en sus alumnos un conocimiento más pleno. Este artículo contiene tal análisis con sus correspondientes demostraciones, incluyendo además el estudio de la ley del coseno y estableciendo comparaciones y diferencias entre ambos enfoques.

A. Justificación

A partir del tercer grado de secundaria, el teorema de Pitágoras está presente en la matemática escolarizada con una frecuencia bastante considerable. Por ésta y otras razones conviene que los profesores conozcan el tema con un nivel que vaya más allá del planteamiento tradicional, para que incluso puedan propiciar en sus alumnos una visión más plena y emocionante. A esto obedece la publicación del presente artículo, dirigido sobre todo a profesores de matemáticas del nivel medio. En síntesis, se trata de demostrar que no sólo para cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo se cumple la tan famosa igualdad, sino que en general en vez de cuadrados pueden ser figuras cualesquiera, siempre que sean semejantes entre sí. Comenzaremos con una demostración de la forma tradicional del teorema de Pitágoras (cuadrados sobre los lados), luego sustituiremos sucesivamente los cuadrados por: triángulos equiláteros, semicírculos y rectángulos, para después demostrar otros teoremas elementales que encadenados nos llevarán a la generalización que deseamos. Finalmente analizaremos la ley del coseno, a la cual a veces se le menciona como "la generalización del teorema de Pitágoras".

Profr. Eduardo Zárate Salas
Universidad Pedagógica Nacional
Unidad Ajusco, México, D. F.

B. Presentación tradicional del Teorema de Pitágoras

Se le atribuye a Pitágoras de Samos (585?-500?) el descubrimiento de éste tan famoso teorema, que nos dice que "la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa". Esta definición es una alusión numérica, pues textualmente se trata de elevar al cuadrado las longitudes de los tres lados del triángulo rectángulo; y su interpretación geométrica es en el sentido de que "la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa", sobreentendiendo obviamente que los lados de esos cuadrados son congruentes con los lados del triángulo, y este sobreentendido campeará en todos los casos similares del presente artículo.

A través de la historia de las matemáticas y en diversas latitudes, a este teorema se le ha dado relevante importancia como lo muestra la Figura 1, reproducida austeramente en la Figura 3.a) para ilustrar la interpretación geométrica antes mencionada.

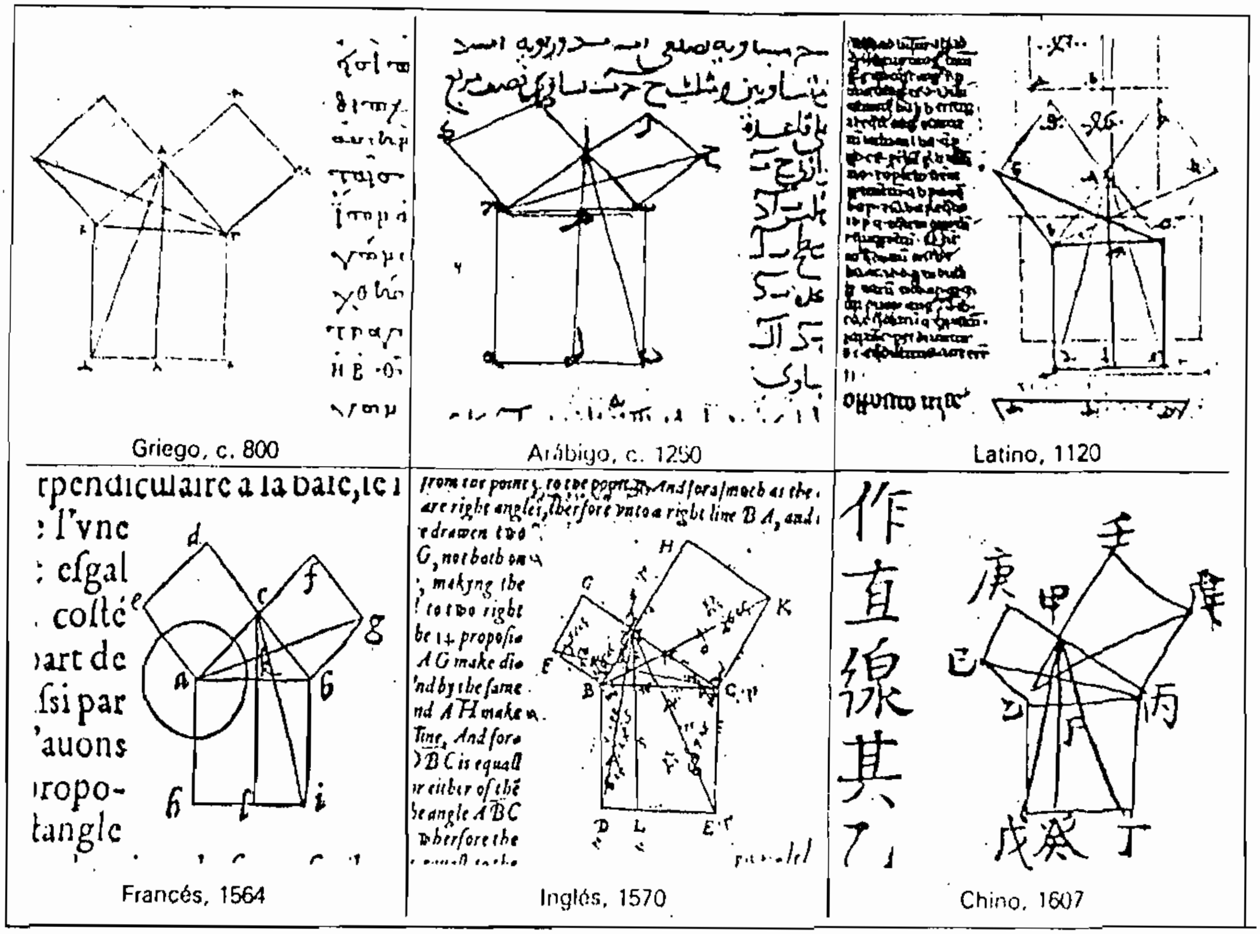

Figura 1[1]

Se conocen varios procedimientos para demostrar el teorema de Pitágoras. No es por demás mencionar que las presentaciones con materiales didácticos son muy valiosas como ilustraciones en el sentido de que ayudan a los alumnos a interpretar más cabalmente

[1] Ilustración tomada de BERGAMINI, David, et. al.: *Matemáticas*. Colección Científica de TIME-LIFE, segunda edición. Time-Life International, México, 1981. p. 78.

el mensaje del teorema, pero no se debe perder de vista que por sí mismas no son demostraciones. Para la demostración es necesario en este caso el formalismo matemático, el cual, es muy conveniente que vaya precedido de ilustraciones geométricas tales como los materiales didácticos aludidos. Bienvenidos los recursos didácticos y enhorabuena la laboriosidad del profesor, pero tengamos cuidado de no fomentar en los alumnos las ambigüedades en el sentido de que lo aparente o lo intuitivo se eleve al rango de suficiencia como demostración. Al respecto existen contraejemplos de configuraciones geométricas que visualmente parecen cumplir ciertas propiedades, pero que el escrutinio matemático las desmiente. Ilustremos esto con un ejemplo:

La Figura 2.a) muestra un cuadrado de 8 unidades por lado que se ha cortado en cuatro partes congruentes por parejas: dos triángulos rectángulos de catetos 8 y 3 y dos trapecios rectángulos de lados paralelos 5 y 3 y altura 5. Esas cuatro partes se han separado y se han vuelto a unir en una configuración diferente que constituye ahora un rectángulo ilustrado en la Figura 2.b). Observe el lector que las dimensiones asignadas para las partes de la Figura 2.a) coinciden con las asignadas para las partes de la Figura 2.b), lo cual puede hacer suponer que las áreas de ambas figuras coinciden. Pero resulta que el área del cuadrado es $8^2 = 64$ y la del rectángulo es $13(5) = 65$, esto es, tales áreas difieren en una unidad.

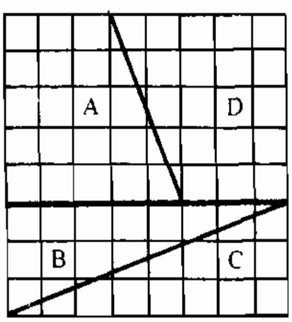

Figura 2.a

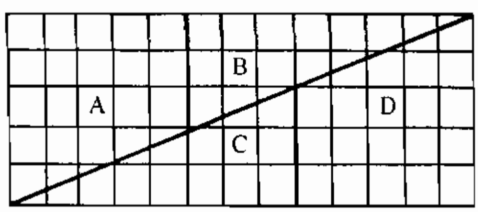

Figura 2.b

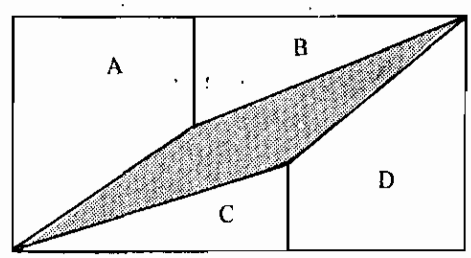

Figura 2.c

La Figura 2.c) es a propósito una exageración de la clave de la falacia (que seguramente el lector descifrará, pues se la dejamos de tarea[2]). Esta falacia nos hace reflexionar en el sentido de que, lo que en apariencia geométrica resulta aceptable, debe ser sometido a otro tipo de análisis, y que no debemos entonces aceptar *a priori* lo aparente. Es frecuente que el Teorema de Pitágoras se muestre a los alumnos a través de materiales (madera, cartón, lámina, etc.) como un rompecabezas, pero por mucho que el alumno mecanice los movimientos de las piezas para formar el cuadrado grande con los dos cuadrados pequeños, esto sólo debe servir para ilustrar el mensaje geométrico y llevar a lo concreto las abstractas ideas matemáticas, las cuales deben ser sometidas al escrutinio algebraico, pues el ensamble geométrico de las piezas, en la práctica, puede presentar ajustes dudosos.

Una ambigüedad muy común entre quienes no han comprendido adecuadamente este teorema, se refleja cuando a la pregunta: "¿En qué consiste el teorema de Pitágoras?", contestan: "$a^2 = b^2 + c^2$", o bien: "$a^2 + b^2 = c^2$", sin mencionar qué letra le asignaron a la hipotenusa o qué son para ellos a, b y c.

Veamos una de las varias demostraciones del teorema multicitado. Llamémoslo por ahora teorema 1, pues además de éste manejaremos otros teoremas.

2 Este ejemplo está tomado de: HUNTLEY, H.E. *The divine proportion*. Dover. New York, 1970. p. 48.

TEOREMA 1: La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

HIPÓTESIS: Consideremos el cuadrado *PQRS* de la Figura 3 b). Sean *PT, QU, RV* y *SW* segmentos congruentes, de magnitud a. Sean $\overline{TQ} = b$ y $\overline{WT} = c$.

TESIS: $a^2 + b^2 = c^2$

DEMOSTRACIÓN:

De las hipótesis se deducen las siguientes consideraciones:

1. Por la relación de congruencia *LAL* (lado ángulo lado), los cuatro triángulos rectángulos que se generan (*PTW, QUT, RVU* y *SWV*) son congruentes.
2. Como α y β son los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, entonces α y $\beta = 90°$; y como $\alpha + \theta + \beta = 180°$, entonces $\theta = 90°$. Aplicando en los vértices *T, U, V* y *W* estas conjeturas y las hipótesis preestablecidas, se deduce que el cuadrilátero *TUVW* es un cuadrado.
3. El área del cuadrado *PQRS* es $(a + b)^2 = a^2 = 2ab = b^2$.
4. El área de cada uno de los cuatro triángulos es $\dfrac{ab}{2}$.
5. El área de los cuatro triángulos es $4\left(\dfrac{ab}{2}\right) = 2ab$.

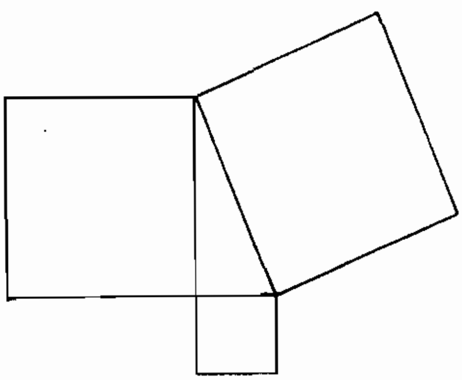

Figura 3.a

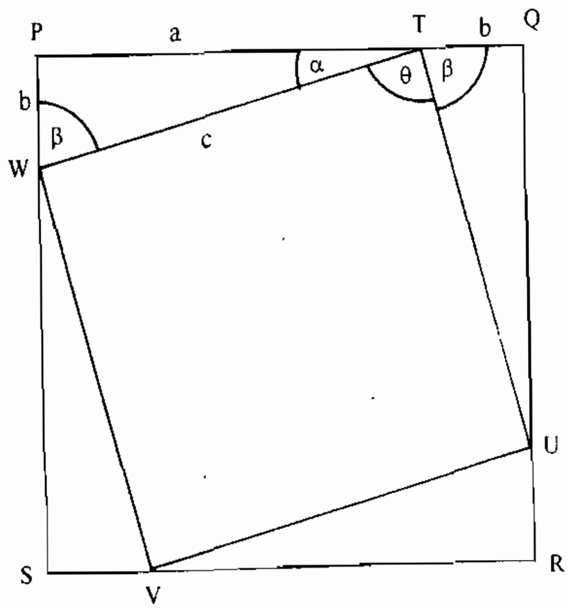

Figura 3.b

6. El área del cuadrado *TUVW* es c^2.
7. El área del cuadrado *TUVW* también puede encontrarse restando, del área del cuadrado *PQRS*, el área de los cuatro triángulos, esto es:

$$(a^2 + 2ab + b^2) - 2ab = a^2 + b^2$$

8. Por los resultados de las consideraciones 6 y 7, se tiene que

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

como queríamos probar.

Hasta aquí la versión tradicional que se maneja escolarizadamente, la cual geométricamente nos habla de cuadrados construidos sobre los tres lados del triángulo. Pero ¿qué tal si en vez de cuadrados construimos triángulos equiláteros, semicírculos, rectángulos, o en general figuras cualesquiera, siempre que las tres sean semejantes, y catetos e hipotenusa sean homólogos en tal relación de semejanza? Veámoslo. En los procedimientos nos apoyaremos en la versión tradicional (cuadrados sobre los lados), lo cual es legítimo toda vez que ya hicimos la demostración.

C. Triángulos equiláteros en vez de cuadrados

TEOREMA 2: La suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre los catetos es igual al área del triángulo equilátero construido sobre la hipotenusa.

HIPÓTESIS: Consideremos la Figura 4, en la cual aparece un triángulo rectángulo de catetos a y b y de hipotenusa c. En tales lados se han trazado sendos triángulos equiláteros de alturas h_1, h_2 y h_3 respectivamente. Sean A, B y C, respectivamente, sus áreas.

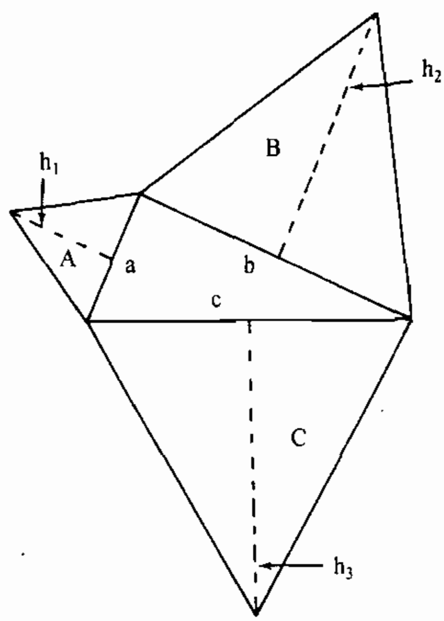

Figura 4

TESIS: $A + B = C$.

DEMOSTRACIÓN:
Apliquemos el teorema 1 en la Figura 4 para encontrar las magnitudes de las alturas de los triángulos equiláteros.

$$h_1 = \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \mathrm{d}\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Por procedimiento análogo tendremos que $h_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}b$ y que $h_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}c$.

Consideremos ahora las áreas de los tres triángulos equiláteros:

$$A = \frac{ah_1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2. \text{ Análogamente: } B = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 \text{ y } C = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2.$$

Entonces $A + B = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$, pero por el teorema 1 sabemos que en la Figura 4 se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$, por lo tanto la suma de las áreas en cuestión quedaría de la forma $A + B = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$, cuyo segundo miembro, como ya vimos, es C, con lo que A + B = C, lo cual queríamos probar.

D. Semicírculos en vez de cuadrados

Veamos ahora lo que ocurre si en vez de cuadrados o triángulos equiláteros construimos semicírculos sobre los lados de un triángulo rectángulo.

TEOREMA 3: La suma de las áreas de los semicírculos construidos sobre los catetos es igual al área del semicírculo construido sobre la hipotenusa.

HIPÓTESIS: Consideremos la Figura 5, en la cual aparece un triángulo rectángulo de catetos a y b y de hipotenusa c. Sobre tales lados se han construido sendos semicírculos, a cuyas áreas designaremos, respectivamente, con A, B y C.

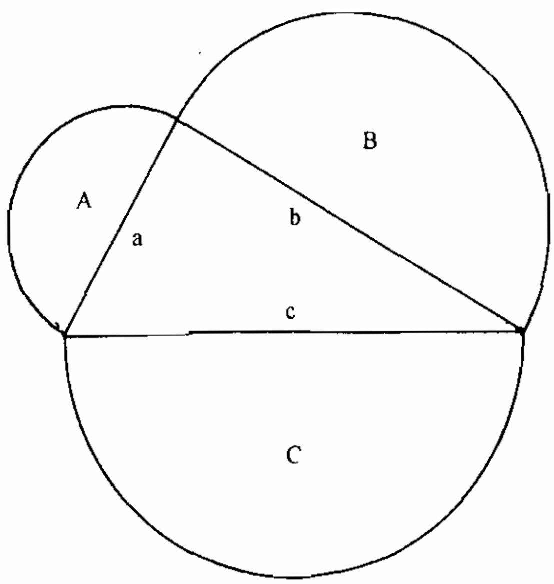

Figura 5

TESIS: $A + B = C$

DEMOSTRACIÓN:

De la Figura 5 se deduce que

$$A = \frac{1}{2}(\pi r^2) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{a^2}{4}\right) = \frac{\pi}{8}a^2. \text{ Análogamente: } B = \frac{\pi}{8}b^2 \text{ y } C = \frac{\pi}{8}c^2.$$

Entonces $A + B = \frac{\pi}{8}a^2 + \frac{\pi}{8}b^2 = \frac{\pi}{8}(a^2 + b^2)$, pero por el teorema 1 sabemos que en la Figura 5 se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$, de modo que $A + B = \frac{\pi}{8}c^2$. Como ya habíamos establecido que el segundo miembro de esta última igualdad es el valor de C, finalmente tenemos que $A + B = C$, que es lo que queríamos probar.

E. Rectángulos semejantes en vez de cuadrados

Los casos expuestos anteriormente se refieren a cuadrados, triángulos equiláteros y semicírculos trazados sobre los lados de un triángulo rectángulo. Pero como el cuadrado, el triángulo equilátero y el círculo son figuras regulares, podría pensarse que en general el caso sólo se cumple para figuras regulares, por lo que en este apartado aplicaremos el caso a rectángulos, que son figuras irregulares.

TEOREMA 4. Si sobre los lados de un triángulo rectángulo se construyen rectángulos semejantes de modo que tales lados sean homólogos en dicha relación, entonces la suma de las áreas de tales rectángulos construidos sobre los catetos es igual al área del rectángulo construido sobre la hipotenusa.

HIPÓTESIS: Consideremos la Figura 6, en la cual aparece un triángulo rectángulo de catetos a y b y de hipotenusa c. Sobre tales lados se han trazado rectángulos semejantes, cuyas alturas son h_1, h_2 y h_3 respectivamente. Sean A, B y C sus áreas, respectivamente, y sean a, b y c homólogos en esa relación de semejanza.

TESIS: $A + B = C$.

DEMOSTRACIÓN:

Por la semejanza de los rectángulos se tiene que:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{b}{a}, \text{ de donde } h_2 = \frac{b}{a}h_1; \text{ y } \frac{h_3}{h_1} = \frac{c}{a}, \text{ de donde } h_3 = \frac{c}{a}h_1.$$

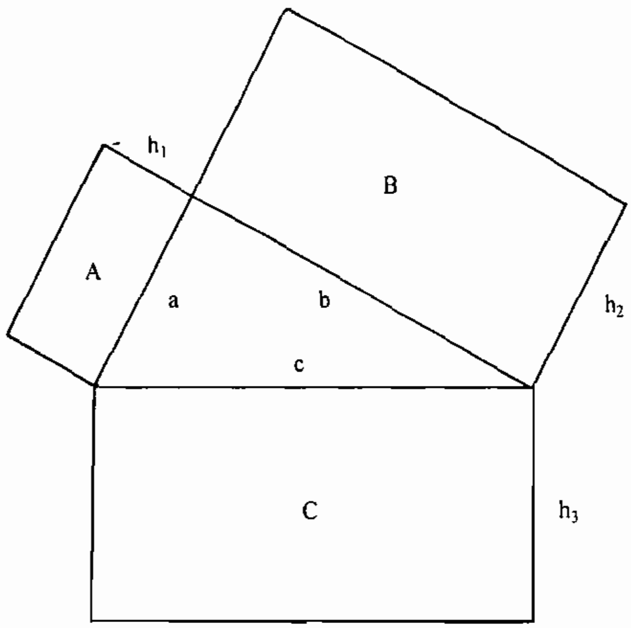

Figura 6

Por lo tanto, para las áreas tendremos:

$$A = ah_1,$$

$$B = bh_2 = b\left(\frac{b}{a}h_1\right) = \frac{b^2}{a}h_1,$$

$$C = ch_3 = c\left(\frac{c}{a}h_1\right) = \frac{c^2}{a}h_1,$$

De las igualdades anteriores se deduce que:

$A + B = ah_1 + \frac{b^2}{a}h_1 = \left(a + \frac{b^2}{a}\right)h_1 = \left(\frac{a^2 + b^2}{a}\right)h_1$, pero por el teorema 1 sabemos que en la Figura 6 se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$, por lo tanto nuestra suma de áreas queda de la forma $A + B = \frac{c^2}{a} h_1$ cuyo segundo miembro es, como ya mostramos, C, de modo que finalmente tenemos que $A + B = C$, como queríamos probar.

F. Otros teoremas necesarios para el caso

Hemos estado construyendo el camino para llegar a cierta generalización del teorema de Pitágoras. Veamos algunos otros teoremas necesarios como parte del camino.

TEOREMA 5. Si dos triángulos son semejantes, las alturas correspondientes conservan la razón de semejanza.

HIPÓTESIS: Consideremos los triángulos semejantes ABC y $A'B'C'$ de la Figura 7, en la cual: h y h' son alturas correspondientes, D y D' los pies de tales alturas y r_L la razón de semejanza (esto es, r_L es el cociente de las longitudes de lados homólogos).

TESIS: $\frac{h}{h'} = r_L.$

DEMOSTRACIÓN:

Por hipótesis se tiene que:

a) $r_L = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

b) $\alpha = \alpha'$ y $\beta = \beta' = 90°.$

Por el inciso b) y por la propiedad de semejanza AA (ángulo ángulo), se deduce que los triángulos ABD y $A'B'D'$ son semejantes, de donde resulta que

$$\frac{c}{c'} = \frac{h}{h'}.$$

Pero de acuerdo con el inciso a), $\frac{c}{c'} = r_L$. De estas dos últimas igualdades se concluye que $\frac{h}{h'} = r_L$. como queríamos probar.

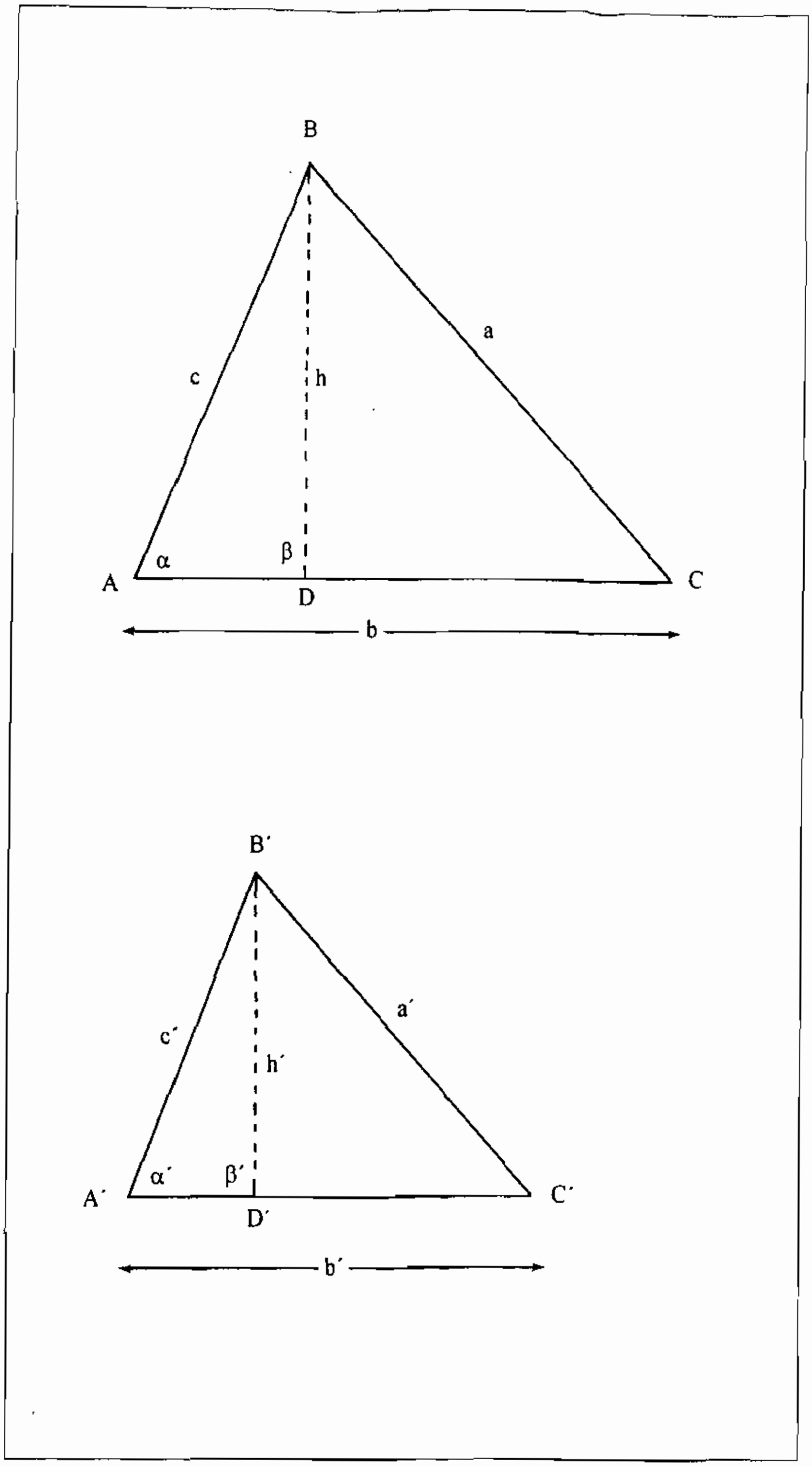

Figura 7

TEOREMA 6. La razón que hay entre las áreas de dos triángulos semejantes es el cuadrado de la razón de semejanza.

Este teorema es un caso particular para triángulos semejantes. La generalización del caso engloba a toda pareja de figuras semejantes, lo cual abordaremos en el teorema siguiente.

Por el momento se trata de contextualizar el tema para este caso particular, el cual nos servirá de lema para el teorema siguiente.

HIPÓTESIS: Consideremos los triángulos semejantes STU y $S'T'U'$ de la Figura 8. Sean, respectivamente, A_1 y A_2 sus áreas y sean h y h' alturas correspondientes. Sea r_L la razón de semejanza y sea r_A la razón que hay entre sus áreas.

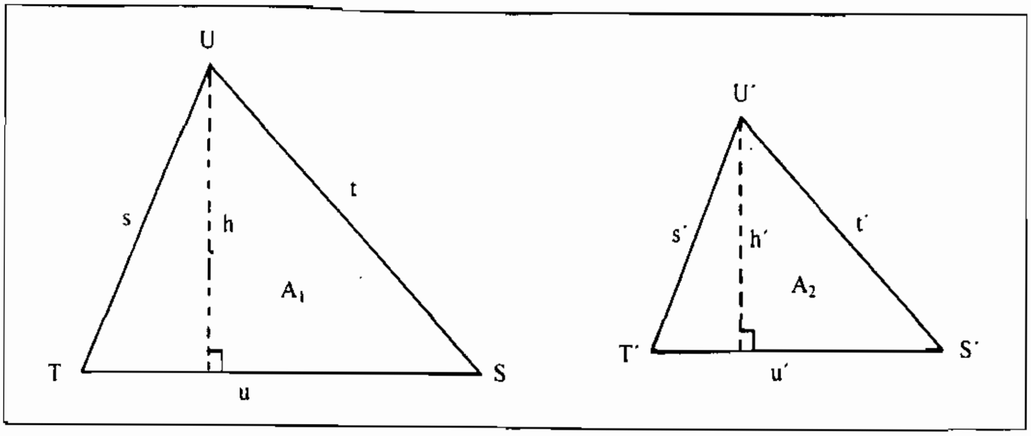

Figura 8

TESIS: $r_A = r_L^2$.

DEMOSTRACIÓN:

Por hipótesis y por el teorema 5 tenemos que $r_L = \frac{s}{s'} = \frac{t}{t'} = \frac{u}{u'} = \frac{h}{h'}$, por lo tanto:

$$r_A = \frac{A_1}{A_2} = \frac{\left(\frac{uh}{2}\right)}{\left(\frac{u'h'}{2}\right)} = \frac{uh}{u'h'} = \frac{u}{u'} \bullet \frac{h}{h'} = r_L \bullet r_L = r_L^2, \text{ lo cual se quería probar.}$$

Pasemos a la generalización del caso inmediato anterior, en el siguiente teorema.

TEOREMA 7. La razón que hay entre las áreas de dos polígonos semejantes es el cuadrado de su razón de semejanza.

HIPÓTESIS: Consideremos los polígonos semejantes P_1 y P_2 de la Figura 9, donde:

- Q y Q' son puntos interiores homólogos (en casos especiales puede requerirse más de un punto interior en cada polígono; el objetivo es que el área de cada polígono quede adecuadamente dividida en triángulos mediante puntos interiores {vértices comunes de triángulos} que sean homólogos de un polígono a otro).
- $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ y $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$ son las áreas de los triángulos que se generan al unir Q y Q' con sus respectivos vértices.
- Designaremos con: A y B las áreas de los polígonos, r_L la razón de semejanza que hay entre ellos y r_A la razón entre sus áreas.

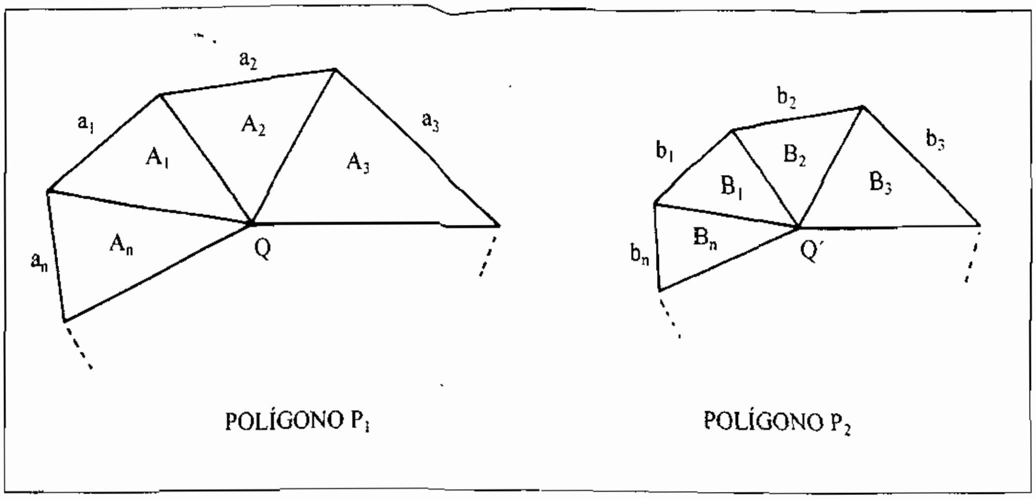

Figura 9

TESIS: $r_A = r_L^2$.

DEMOSTRACIÓN: Con base en las hipótesis, tenemos que

$$A = A_1\, A_2 + \dots + A_n, \quad B = B_1 + B_2 + \dots + B_n, \quad r_L = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}.$$

Por la semejanza entre los polígonos P_1 y P_2, y por ser Q y Q' homólogos, resulta que cada triángulo del polígono P_1 es semejante a su correspondiente triángulo del polígono P_2. Luego, por el teorema 6, tenemos que

$\dfrac{A_1}{B_1} = \dfrac{A_2}{B_2} = \dots = \dfrac{A_n}{B_n} = (r_L)^2$, de donde se sigue que

$$A_1 = B_1 r_L^2 \quad A_2 = B_2 r_L^2, \dots, A_n = B_n r_L^2.$$

Consideremos ahora la razón entre las áreas de los polígonos:

$$r_A = \frac{A}{B} = \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{B_1 + B_2 + \dots + B_n} = \frac{B_1 r_L^2 + B_2 r_L^2 + \dots + B_n r_L^2}{B_1 + B_2 + \dots + B_n} = \frac{(B_1 + B_2 + \dots + B_n) r_L^2}{B_1 + B_2 + \dots + B_n} =$$

$= \dfrac{B}{B} r_L^2 = r_L^2$, esto es: $r_A = r_L^2$, lo cual se quería probar.

NOTA IMPORTANTE: Como toda curva puede ser considerada como una sucesión de segmentos infinitamente pequeños, entonces toda superficie plana limitada por una curva puede ser considerada como la superficie interior de un polígono. Por esto, el teorema inmediato anterior es válido en general para figuras planas.

G. Generalización del Teorema de Pitágoras para toda terna de figuras semejantes trazadas sobre los lados de un triángulo rectángulo

Los ejemplos previos y los teoremas hasta aquí analizados nos servirán de soporte para alcanzar nuestro principal objetivo en este artículo, esto es, para demostrar el siguiente

TEOREMA 8. Si sobre los lados de un triángulo rectángulo trazamos sendas figuras semejantes de modo que dichos lados sean homólogos en esa relación de semejanza, entonces la suma de las áreas de dichas figuras trazadas sobre los catetos es igual al área de la figura trazada sobre la hipotenusa.

HIPÓTESIS: Consideremos la Figura 10, en la cual:

- a y b son los catetos de un triángulo rectángulo y c es la hipotenusa.
- A, B y C son las áreas de tres figuras semejantes trazadas, respectivamente, sobre a, b y c, y estos lados son homólogos en esa relación de semejanza.

TESIS: $A + B = C$.

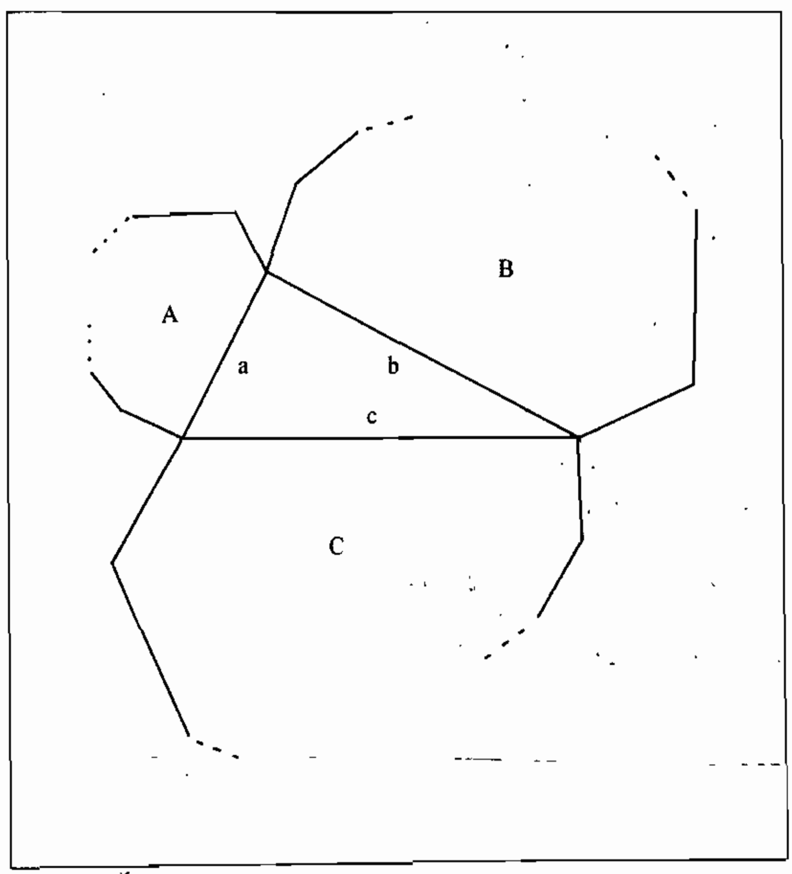

Figura 10

DEMOSTRACIÓN:

Por hipótesis y por el teorema 7 tenemos que

$$\frac{A}{C} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} \text{ y que } \frac{B}{C} = \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{b^2}{c^2}, \text{ por lo tanto: } A = C\left(\frac{a^2}{c^2}\right) \text{ y } B = C\left(\frac{b^2}{c^2}\right).$$

Entonces resulta que

$$A + B = C\left(\frac{a^2}{c^2}\right) + C\left(\frac{b^2}{c^2}\right) = C\left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}\right) = C\left(\frac{a^2 + b^2}{c^2}\right).$$

Pero por el teorema 1 sabemos que en la Figura 10 se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$, de modo que la suma de las áreas de interés queda expresada como

$$A + B = C\left(\frac{c^2}{c^2}\right) = C(1) = C, \text{ esto es, } A + B = C, \text{ como queríamos probar.}$$

Hasta aquí hemos analizado una importante generalización del Teorema de Pitágoras, referida exclusivamente a triángulos rectángulos. Sin embargo, existe otro enfoque del caso, totalmente distinto, que se extiende a todo tipo de triángulos, como veremos a continuación. Se trata de la ley del coseno.

H. La Ley del Coseno

Algunas veces a la ley del coseno (conocida también como teorema del coseno) se le da el nombre de "teorema general de Pitágoras" o "generalización del Teorema de Pitágoras"; esto en virtud de que es aplicable a cualquier triángulo y de que su aplicación al triángulo rectángulo viene siendo sólo un caso particular, el cual constituye lo que tradicionalmente se conoce como "el Teorema de Pitágoras", referido únicamente a los cuadrados de los lados. La demostración de la ley del coseno la dividiremos en dos partes.

TEOREMA 9. Ley del coseno: En todo triángulo, el cuadrado de cualquiera de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de esos dos lados multiplicado por el coseno del ángulo que ellos dos forman.

Primera parte:

HIPÓTESIS: Consideremos el triángulo de la Figura 11, en el cual a, b y c son sus lados, m y n son las partes en que la altura h divide al lado c, y $\alpha < 90°$.

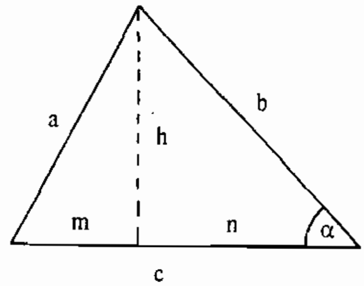

Figura 11

TESIS: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$.

DEMOSTRACIÓN:

Aplicando el teorema 1 en la Figura 11, surgen las relaciones (1), (2) y (3) siguientes:

$$a^2 = h^2 + m^2 \tag{1}$$

$$b^2 = h^2 + n^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - n^2 \tag{2}$$

$$c^2 = (m+n)^2 = m^2 + 2mn + n^2 \Rightarrow m^2 = c^2 - 2mn - n^2 \tag{3}$$

Sustituyendo los miembros derechos de (2) y (3) en (1), resulta que

$$a^2 = b^2 - n^2 + c^2 - 2mn - n^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2n^2 - 2mn$$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2n(n+m)$. Pero $n + m = c$, entonces

$a^2 = b^2 + c^2 - 2cn$. Pero $\cos\alpha = \frac{n}{b} \Rightarrow n = b\cos\alpha$, por lo tanto:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, lo cual queríamos probar.

NOTAS:

1. En la Figura 11 se observa que el ángulo formado por los lados a y b puede ser agudo u obtuso sin que se afecte el desarrollo anterior, lo cual muestra que la relación deducida se cumple para los ángulos agudos de cualquier triángulo.
2. Si $\alpha = 90°$, entonces el resultado se reduce a la forma tradicional del teorema de Pitágoras en virtud de que $\cos 90° = 0$.
3. Faltaría solamente probar la relación refiriéndola a un ángulo obtuso, lo cual haremos a continuación.

Segunda parte

HIPÓTESIS: Consideremos el triángulo de la Figura 12, en el cual a, b y c son sus lados, h una altura, m la proyección de b sobre c, y $\alpha>90°$.

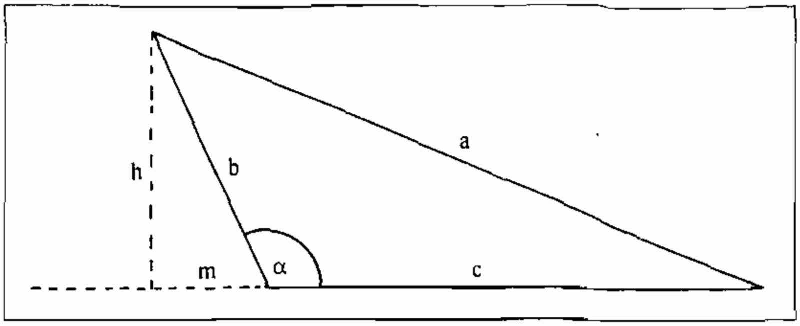

Figura 12

TESIS. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$.

DEMOSTRACIÓN:

Aplicando el teorema 1 en la Figura 12, tenemos las relaciones (1) y (2) siguientes:

$$a^2 = h^2 + (m + c)^2 = h^2 + m^2 + 2mc + c^2 \qquad (1)$$

$$b^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - m^2 \qquad (2)$$

Aplicando (2) en (1), se tiene:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2mc.$$

Pero $m = b \cos(180 - \alpha) = b(-\cos\alpha) = -b \cos\alpha$, por lo tanto

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$, lo cual se quería probar.

I. Sinopsis y conclusiones

Hemos hecho el análisis y la demostración de la versión tradicional del teorema de Pitágoras, esto es, de la relación que existe entre los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo, y hemos analizado y demostrado la generalización de tal relación para cualquier terna de figuras semejantes construidas sobre los lados de dicho triángulo. También hemos analizado la ley del coseno y vimos que ésta es aplicable a todo triángulo, y que su aplicación particular al triángulo rectángulo es precisamente la versión tradicional del Teorema de Pitágoras.

Cabe hacer notar que estos dos enfoques aquí analizados son totalmente diferentes, pues el primero es aplicable exclusivamente a triángulos rectángulos y nos dice que:

> **"si sobre los lados de un triángulo rectángulo trazamos sendas figuras semejantes de modo que tales lados sean homólogos en esa relación de semejanza, entonces la suma de las áreas de dichas figuras trazadas sobre los catetos es igual al área de la figura trazada sobre la hipotenusa";**

y el segundo enfoque es aplicable a cualquier triángulo, y nos dice que:

> **"en todo triángulo, el cuadrado de cualquiera de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de esos dos lados multiplicado por el coseno del ángulo formado por ellos dos".**

Los enfoques presentan intersección, pues cuando en el primer tratamiento las figuras aludidas son específicamente cuadrados, el caso se reduce a la versión tradicional del teorema de Pitágoras, versión a la cual se reduce también el segundo tratamiento cuando su aplicación es específicamente sobre el triángulo rectángulo.

Ya comentamos que a la ley del coseno a veces se le menciona como "generalización del teorema de Pitágoras".[3] Sin embargo, Baldor[4] imprime una pequeña variante y define la "generalización del Teorema de Pitágoras" de la siguiente manera:

> "En todo triángulo, el cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble del producto de uno de estos lados por la proyección del otro sobre él".

Observemos que en la definición de Baldor hay equivalencia con la ley del coseno aplicada a ángulos agudos, sin embargo para nada menciona la función coseno, y además restringe su enfoque al lado opuesto de un ángulo agudo. No considera el lado opuesto a un ángulo recto u obtuso, y la ley del coseno es una relación general para cualquier lado de todo triángulo.

Después de todas las consideraciones anteriores, cabe preguntarse: ¿no sería más legítimo reconocer como "la generalización del Teorema de Pitágoras" a la versión referida en general a figuras semejantes sobre los lados del triángulo rectángulo? Este cuestionamiento parece estar apoyado por la historia de las matemáticas, pues las inscripciones que han quedado registradas a través de los siglos en relación al Teorema de Pitágoras, hacen alusión a la interpretación geométrica en el sentido de que la suma de las áreas de las figuras construidas sobre los catetos es igual al área de la figura construida sobre la hipotenusa, aunque tales figuras hayan sido siempre cuadrados, como lo ilustra la Figura 1 del presente artículo.

Por otro lado, el hecho de que la aplicación de la ley del coseno en el triángulo rectángulo se reduzca al Teorema de Pitágoras, no necesariamente tendría que implicar que la ley del coseno sea la generalización del Teorema de Pitágoras, pues la ley del coseno en general es aplicable a todo tipo de triángulos perdiéndose en esa generalidad

---

[3] Esto puede verse por ejemplo en: VANCE, Elbridge P., *Álgebra y trigonometría*. Addison Wesley Iberoamericana. U.S.A. 1986. p. 400.

[4] BALDOR, Aurelio. *Geometría plana y del espacio y trigonometría*. Publicaciones Cultural. Octava reimpresión. México. 1992. pp. 121 y 374.

la relación de las áreas, y la historia de las matemáticas parece inclinar la balanza en el sentido de que el Teorema de Pitágoras tiene su esencia y su sustento fundamental en la relación de las áreas. Puede ser respetable la opinión en el sentido de que la ley del coseno sea la generalización del Teorema de Pitágoras, pero considero más respetable, por estar mejor fundamentada históricamente, la versión de las figuras semejantes sobre los lados del triángulo rectángulo, pues es el mensaje de la relación de las áreas el que se transmite y se conserva imperturbable a través del tiempo en las ilustraciones geométricas (insisto en la Figura 1 del presente artículo), y en la ley del coseno (insisto) no existe en general el mensaje de la relación de las áreas.

La ilustración geométrica que pudiera hacerse para la ley del coseno en general, no llevaría el histórico mensaje geométrico que los pitagóricos plasmaron en su sublime teorema; y por el contrario, las figuras semejantes sobre los lados del triángulo rectángulo conservan el armonioso mensaje de la relación de las áreas, que inmortaliza a su descubridor, el genio de Samos, cuya sensibilidad debe haberle hecho vibrar en armonía con el universo ante tan trascendente descubrimiento.

Si analizamos el caso desde el punto de vista histórico y geométrico, y consideramos las ilustraciones que por siglos han sido plasmadas llevando la información del Teorema de Pitágoras, seguramente nos inclinaremos a considerar a la relación de las áreas como el excelso mensaje del teorema. Y ante esto, la ley del coseno queda muy lejos de ser considerada como la "generalización del Teorema de Pitágoras", cediéndole el paso, para ocupar este honor, a "la terna de figuras semejantes trazadas sobre los lados del triángulo rectángulo". De ser esto así, tendríamos la siguiente

Generalización del Teorema de Pitágoras:

Si sobre los lados de un triángulo rectángulo construimos sendas figuras semejantes de modo que tales lados sean homólogos en esa relación de semejanza, entonces la suma de las áreas de dichas figuras construidas sobre los catetos es igual al área de la figura construida sobre la hipotenusa.

El lector tiene la palabra.