Reseñas de libros

Luis Ferrero
Tras la pista de la equis
(problemas para pensar, problemas para investigar)
Ediciones Pedagógicas.
Colección: Materiales complementarios en educación.
Madrid. 1995

En las reformas educativas de la Educación Básica que se vienen implementando en varios países de los continentes Americano, Europeo, algunos ya prácticamente en pleno ejercicio, tales los casos de España y México, predomina el enfoque que tiene como objetivo central a la resolución de problemas y a partir de esto, desarrollar en el alumno determinadas habilidades matemáticas como son la flexibilidad y la reversibilidad del pensamiento, la memoria generalizada, la clasificación completa y la imaginación espacial; además, se retoman otras más que se habían dejado algo de lado como el cálculo mental y la estimación de resultados.

Una de las preocupaciones más apremiantes del maestro en servicio es la de allegarse bibliografía adecuada y suficiente con este propósito y mucha de ella, si no es que la mayoría, se apoya en las propuestas originales de G. Polya (Cómo plantear y resolver problemas. Trillas, México, 1975).

Los "Estándares curriculares" de la National Council Teachers of Mathematics (NCTM), libro sobre los consensos de los profesores en matemáticas acerca de la orientación que debe tener la matemática educativa de finales de siglo en los E.U.A. y "Las matemáticas sí cuentan", también conocido como "Informe Cockcroft", sobre la situación de la enseñanza de las matemáticas en Inglaterra y Gales, hacen hincapié en la necesidad de incorporar una enseñanza de la matemática que, siendo útil e instrumental, parta de la resolución de problemas. El enfoque constructivista de los programas de estudio de la Educación Básica en México lleva la misma orientación.

Un libro de breve amplitud —apenas 173 páginas— pero intenso en contenido con esa orientación hacia el cómo y con qué intención resolver problemas es "Tras la pista de la equis". En él, el autor divide la obra en tres grandes intenciones didácticas:

1. El análisis de estrategias de resolución de problemas dedicado al estudio de casos particulares de éstas, vistas con un carácter instrumental.

2. El estudio de la generalización, cuya intención es la de identificar y usar modelos matemáticos, patrones, normas y la construcción de leyes generales.
3. El examen de problemas desarrollados, presentando ejemplos que llevan a relaciones generales, trabajados con varias estrategias, sugiriendo procedimientos, niveles resolutivos y de interpretación y proponiendo procedimientos para una mejor y mayor explotación didáctica.

En la prolongación, el autor se detiene brevemente a hacer ver la importancia de la matemática como parte de la cultura, su inserción en los mapas curriculares, su valor instrumental social, su necesidad en el desarrollo de habilidades mentales, su influencia en la formación de la personalidad individual y colectiva y las dificultades que entraña su aprendizaje dado su alto nivel de abstracción para transferirla a lo coditiano en la empresa de resolver problemas, considerada ésta como la mejor vía de aprendizaje, de tal suerte que se convierte en su aspecto fundamental, pues "Aprender a resolver problemas de una forma sistemática y estructurada permitirá a los alumnos adquirir seguridad y rigor en su razonamiento; también, a afianzar los contenidos matemáticos adquiridos, acceder a la construcción de otros nuevos contenidos y a establecer relaciones entre ellos", ya que los contenidos pueden dejar de ser vigentes por la dinámica de la evolución social y en este sentido la resolución de problemas tiene valor formativo pues permiten determinar relaciones lógicas, pensar crítica y creativamente y esto determina que " ...conviene más enseñar a pensar, razonar, a organizar el pensamiento, que a transmitir contenidos que con rapidez se olvidan: *importa más el proceso que el resultado.*"

El autor se basa en los pasos sistemáticos de Polya en la resolución de problemas, que comprenden:

1. La comprensión del enunciado problemático.
2. La organización de datos y ejecución de un plan de trabajo.
3. El análisis, comprobación, validación y comunicación de los resultados obtenidos.

También, se reconoce como adicto al trabajo de los alumnos en equipo y al uso de cualquier espacio para el ejercicio de las tareas escolares. En forma muy significativa finaliza su prolongación haciendo ver las ventajas del uso de la calculadora en el aula y sus ventajas en la resolución de problemas, pues permite fijar la atención en el proceso de resolución, ayuda a ir al encuentro de diversas estrategias y al planteamiento y comprobación de conjeturas y a hacer generalizaciones.

En el capítulo 1, "Estrategias de resolución de problemas", el autor se apoya en una definición de Miguel de Guzmán: "Las estrategias se ocupan del trazado de planes generales para alcanzar un objetivo propuesto. Las estrategias son pautas para comenzar a pensar, instrumentos cuya misión es impedir el bloqueo mental del alumno ante un problema concreto, resortes con los que manipular, dar vuelta a los enunciados, realizar simulaciones, etc". Enseguida muestra ejemplos de algunas estrategias y se detiene a enumerar una serie de recomendaciones didácticas que se deben de tomar en cuenta, haciendo ver que para resolver un problema se puede hacer uso de diversas estrategias, utilizar al aula para desarrollarlas y, cuando se pueda, emplear estrategias de carácter general.

El primer apartado de este capítulo está dedicado a la importancia que reviste el experimentar con los datos del problema propuesto a fin de familiarizarse con ellos, el uso del ensayo y error como parte del proceso y ver si un valor elegido como posible se comprueba para el enunciado y, si no, realizar tanteos sucesivos sistemáticamente y en un cierto orden y, con ello, poder llegar a posibles conclusiones aunque ellas sean fallidas; el segundo apartado lo dedica a la elaboración de un enunciado más sencillo que el propuesto a fin de que, resuelto éste, dé una idea de cómo resolver el enunciado problemático original; en el tercer apartado se presentan ejemplos de problemas resueltos de atrás hacia adelante, esto es, "...partir de la solución para llegar a los datos"; y, por último, en el apartado cuarto, establece la ventaja que tiene la organización de los datos a fin de obtener la mayor información posible, pues ello puede dar pistas y sugiere, además, el uso de dibujos, diagramas, o esquemas y la construcción de tablas de valores, pues ellos pueden mostrar la existencia de relaciones que a simple vista son imperceptibles.

Todos los ejemplos que presenta son interesantes y algunos de ellos serán conocidos con toda seguridad por los lectores de juegos y entretenimientos matemáticos, aunque ahí están presentados con libertad, frescura e ingenio, estableciendo "pautas de resolución" para algunos de ellos o incorporando al final de cada tipo de estrategia ejemplificada un apartado con "problemas para practicar".

En el capítulo 2, "La generalización", el autor inicia con los conceptos matemáticos de generalización y hace ver que es el fundamento de ciertas propiédades matemáticas observadas, estableciendo la diferencia entre una propiedad particular y una general, la necesaria capacidad de abstracción que requiere y la correspondiente simbolización en la búsqueda de reglas generales. Utiliza también para algunos problemas, "pautas de resolución y remata con "Solucionario". Especialmente significativa es la parte correspondiente a "Las demostraciones", numéricas y la necesidad de hacer demostraciones.

En el primer apartado de este segundo capítulo se hace ver que las actividades de exploración ayudan a descubrir relaciones, regularidades y propiedades y permiten, junto con las investigaciones, la construcción de saberes en la materia promoviendo, además, al razonamiento inductivo; en el segundo apartado se estudian problemas que llevan a una segunda fase, la de formular y comprobar conjeturas, que es una actividad que permite la construcción de los contenidos matemáticos y desarrollan en el alumno el ejercicio de la observación, la sistematización de resultados, la conexión entre diversos contenidos y la de relacionar nuevos contenidos con los ya adquiridos, la obtención de conclusiones lógicas y la imaginación, entre otros más. El autor propone en este apartado el uso de la calculadora con el fin de facilitar cálculos, la formulación de conjeturas, el descubrimiento de patrones, haciendo ver las dificultades que entrañan muchas actividades académicas en la enseñanza de la matemática sin este recurso didáctico.

En el capítulo 3, "Problemas desarrollados", el autor se apoya en el capítulo anterior proponiendo problemas para ejercitar obteniendo conclusiones, hacer conjeturas y generalizaciones, enunciando algunos propósitos que deben cumplirse en el proceso de aprendizaje por los alumnos. Introduce diversos problemas, ya vistos con anterioridad, pero con la intención de relacionar el contenido específico con otros contenidos matemáticos, especialmente relacionando lo geométrico con lo aritmético y con lo algebraico, analizando estrategias, yendo a generalizaciones y aplicando las fases mencionadas, relacionando los datos del problema, manipulándolos y haciendo comprobaciones, sin obviar las debidas comprobaciones.

En general, la obra es amena, adecuada al nivel escolar que se propone, de lenguaje sencillo y claro, con muchos recursos didácticos y que hacen ver que existe una nueva matemática que se va haciendo, cumpliendo con requisitos pedagógicos claros y definidos, que se construye con el saber inmediato, sin pretensiones formalizadoras excesivas, que permite el manejo en equipo de los alumnos y que rescata lo que ahora es una tendencia de la matemática escolar: el manejo de conceptos, procedimientos y actitudes.

Es claro que en esta forma de abordar la enseñanza de la matemática el maestro puede ser un promotor de conocimientos y saberes a partir del manejo de problemas desmenuzándolos, insinuando caminos de resolución, sugiriendo el análisis de los datos y de los resultados obtenidos, propiciando estimaciones, permitiendo el uso de diversos apoyos objetivos y rematando con la comprobación de los productos rescatados con el uso de este tipo de metodología en apoyo del desarrollo de los contenidos programáticos propuestos.

Santiago Valiente

Ed Dubinsky y Uri Leron (Comps.)
Learning Abstract Algebra with ISETL
Springer Verlag, 1994.

Los autores proponen al profesor y a los alumnos un nuevo método de aprender matemáticas a través de predecir los resultados de algunos problemas que plantean para después, interactuar con la computadora con el objetivo de construir conceptos, investigar y comprobar soluciones. Con el propósito de que fuera posible que la computadora proporcionara un medio que propiciara el aprendizaje de las matemáticas crearon un lenguaje de manipulación simbólica, ISETL, que utiliza una notación matemática lo más apegada a la que aparece normalmente en los libros y al escribir en papel.

1 Introducción

Los autores inician presentando el libro como una nueva manera de abordar las matemáticas. Le piden al alumno trabajo y a cambio le ofrecen un aprendizaje colectivo más significativo de las matemáticas. Para ello anuncian también la importancia de que el aprendiz asuma su responsabilidad como tal.

La estrategia para utilizar el texto que proponen los autores es que los alumnos lean el texto y contesten las preguntas que allí se plantean. Un aspecto importante es que antes de abordar los problemas con la computadora hay que pensarlo y discutirlo con los compañeros y el instructor. Le advierten al alumno que la acción de escribir una secuencia de código en la computadora hará, sin darse cuenta, construir conceptos y entender como funcionan las matemáticas. También advierten que en ocasiones les pedirán a los alumnos abordar problemas sin tener ningún antecedente para ello pero que la computadora junto con ISETL son un laboratorio para experimentar para entender. Otro aspecto novedoso de la estrategia es el consejo de discutir con los compañeros acerca de las conjeturas, los errores, los experimentos y los resultados como una forma de entender.

Para los autores escribir definiciones y demostraciones matemáticas es equiparable a escribir un programa con ISETL, por eso al tener la computadora como herramienta permite experimentar con las ideas y en la medida en que se mejora al escribir programas, la habilidad para pensar matemáticamente mejora.

Los autores proponen al instructor un ciclo, **ACE,** de una semana que consiste en:

- **A** Actividades con la computadora.
- **C** Material de discusión en clase.
- **E** Ejercicios tradicionales.

Los autores se basaron en la teoría constructivista (epistemológica no matemática) para escribir el texto y proponer el uso de la computadora con un lenguaje de programación como ISETL para aprender matemáticas.

2 ISETL

El lenguaje de programación ISETL corre en una computadora personal compatible con IBM bajo sistema operativo MS-DOS. El ejecutable tiene **OJO. DATO** Kilobytes y se puede manejar en un diskette. Además de hacer manipulación simbólica en ISETL se pueden hacer gráficas.

3 Estructura del libro y contenido

El contenido del libro está dividido en seis capítulos. Cada capítulo está dividido en secciones. Cada sección abarca un ciclo ACE de una semana. El primer capítulo del texto contiene una introducción al manejo del programa. Este capítulo se debe cubrir en tres semanas y permite que el alumno pueda realizar el trabajo de los capítulos posteriores. Adicionalmente, se ofrece un manual de ISETL como complemento.

El texto cubre el contenido que tradicionalmente se aborda en un curso universitario, de Álgebra Moderna: grupos, anillos y dominios enteros; cubriendo teoría de ecuaciones como una introducción a extensiones de campos. La duración total del curso, incluyendo el aprendizaje del uso del programa, es de dieciocho semanas.

4 Ejemplo del contenido

En el capítulo 2 inicia con actividades acerca de grupo, la segunda actividad es:

2..En cads uno de los siguientes incisos construye una pareja de objetos de ISETL *G* y *op* donde:

(a) *G* sea *Z*12 (los enteros módulo 12) y *op* sea *a* 12 (la suma módulo 12).
(b) *G* sea *Z*12 (los enteros módulo 12) y *op* sea *m* 12 (la multiplicación módulo 12).
(c) *G* sea *twoZ*12 (los pares módulo 12) y *op* sea *m* 12 (la suma módulo 12).
(d) *G* sea *Z*12 – {0} y *op*, *m* 12.
(e) *G* sea *Z*5 (los enteros módulo 5) y *op* sea *m* 5.

(f) G sea $Z5 - \{0\}$ y op, m 5.
(g) G sea $S3$ (el conjunto de permutaciones de $\{1,2,3\}$ y op la composición de permutaciones.

Por ejemplo, para (a) se puede escribir un código como el siguiente:

$$Z\,12 := \{0..11\};$$

$$a\,12 := | \, x, y \rightarrow (x + y)\ mod\ 12 \, |;$$

A continuación hay una subsección en la que se presenta la definición formal de grupo, ejemplos y algunas proposiciones con sus demostraciones. Las proposiciones se refieren a cuales de las parejas construidas con ISETL forman grupo.

Al final de la sección se plantean ejercicios como los siguientes:

1. Demuestre que la conmutatividad de $[Z_{12}, +_{12}]$ se hereda de la suma ordinaria.

.

.

.

21. Considere la permutación

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \varepsilon S_6.$$

Encuentre n tal que $p^n = e$, la permutación identidad.

5 Comentarios

El mismo esquema que se propone en el texto se puede desarrollar en una clase normal con dos inconvenientes. El primero, el tiempo que llevaría desarrollar todos los ejemplos a mano. El segundo inconveniente es que el instructor tendría que cerciorarse que todos los alumnos tienen correctamente desarrollados los ejemplos y al hacerlos con la computadora la retroalimentación es inmediata.

Para mejorar la forma de aprender matemáticas es necesario que tanto profesores como alumnos hagamos algunos cambios de actitud y papel en el aula. Los alumnos creen que en matemáticas es suficiente con llegar a un resultado correcto, lo más desconcertante para el profesor es que el alumno no muestra ningún interés por entender y comunicar con claridad cuando entiende, pero la formación con la que llegan los alumnos a nivel superior no les permite cambiar de actitud. El hecho de que se cuente con una herramienta como la computadora con un programa que permite uitilizarla como laboratorio de experimentación le da una dimensión diferente al aprendizaje de las matemáticas, el alumno no busca solamente la respuesta correcta si no que puede experimentar y entender. Además, la computadora simultáneamente es un instrumento que propicia la abstracción reflexiva. Más aún, las actividades conjuntas de discusión y comunicación propician el desarrollo de habilidades que antes no se encontraban como parte de los objetivos de aprendizaje de esta materia y que ahora se reconoce tienen un papel importante.

La organización del trabajo en el aula como se propone en este libro también ayuda a que el profesor pueda salir de su rol de expositor y pase a ocupar el de guía. La organización del material y la presentación del mismo ofrecen una herramienta de trabajo que le permite al profesor hacer la transición de forma más sencilla a una nueva manera de abordar la enseñanza.

Por todo lo anterior resultaría muy productivo e interesante llevar a cabo un experimento de utilización del texto en un curso de álgebra abstracta como se propone en el texto.

Araceli Reyes

Cordero, F. y Solís, M.
Las gráficas de las funciones como una argumentación del cálculo. Secuencias de actividades con el uso de la calculadora Texas Instrument TI-81
Grupo Editorial Iberoamérica, 1996.

En este cuaderno, los autores presentan cuatro actividades escolares dirigidas tanto a profesores como estudiantes. Los temas tratados corresponden a tópicos de cálculo y su discusión se hace mediante el uso de calculadoras gráficas (graficación y programación).

En la primera actividad se usa la gráfica de una función para explorar relaciones entre la representación gráfica y la representación algebraica. En la segunda actividad se discuten operaciones gráficas y se tratan de identificar éstas con comportamientos tendenciales de las gráficas. En la tercera actividad se discuten comportamientos tendenciales de una función f y de su derivada, f'. En la cuarta actividad se discuten algunos aspectos de simulación para ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

Las cuatro actividades están precedidas por una sección sobre lo que se entiende por "comportamientos tendenciales de las gráficas" y cómo la calculadora gráfica puede ayudar a visualizar los cambios de parámetros en la representación algebraica de una función.

Comparto con los autores la idea de que este tipo de actividades favorece una noción global del concepto de función, particularmente porque se hacen conexiones naturales entre dos representaciones, la gráfica y la algebraica, que los alumnos conciben como ajenas. En mi opinión, los ejemplos discutidos son apropiados para alumnos que están familiarizados con ideas de cálculo (funciones, operaciones con funciones, límites, derivadas).

Este cuaderno presupone familiaridad con la calculadora gráfica, sobre todo con el menú gráfico. Como este menú es similar en todos los modelos de calculadoras gráficas las actividades no sólo están limitadas a la TI-81.

Creo que las dificultades que los alumnos presentan en el aprendizaje del concepto de función no sólo en el nivel medio básico (Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990) sino también en el nivel superior (Ferrini-Mundy y Graham, 1991) imponen serias limitaciones para que los mismos alumnos comprendan el contenido de este documento. Con esta consideración recomiendo el material para maestros y no para alumnos que tienen una pobre concepción de funciones.

Otra posible dificultad al leer y usar este cuaderno es la notación que usan los autores en las instrucciones para la calculadora: el uso de paréntesis triangulares (< y>) para separar las teclas (algo bastante confuso). Esta dificultad se añade a la situación de teclas faltantes en varios de los programas incluidos.

Me llama la atención ver que el subtítulo que aparece en las páginas interiores no aparece en la portada y que el cuaderno no contiene referencias, incluso a otros cuadernos didácticos de esta misma colección, que también están dirigidos al uso de las calculadoras gráficas. Este libro pertenece a la colección cuadernos didácticos de esta editorial.

Bibliografía

FERRINI-MUNDY, J. y GRAHAM, K. (1991). *Research in calculus learning: understanding of limits, derivatives, and integrals.* Paper presented at the Joint Mathematics Meetings, Special Session on Research in Undergraduate Mathematics Education, January, 1991, San Francisco, CA.

LEINHARDT, G. ZASLAVSKY, O., y STEIN, M. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research, 60(1)*, 1-64.

Armando Martínez Cruz