NOTAS DE CLASE

Ideas geométricas en álgebra elemental

Resumen

En esta nota se presentan algunos ejemplos de ilustración geométrica de hechos matemáticos más generales. Nuestro propósito es incentivar la geometrización del aprendizaje de la matemática, basados en la concepción de que la naturaleza propia del quehacer matemático debe reflejarse en el salón de clase.

Abstract: In this note some examples are given as geometric ilustration of some more general mathematical facts. Our purpouse is to make a contribution to the geometrisation of mathematical learning, based on our opinion that the nature of the mathematical work must be reflected in the classroom.

La presente nota muestra una colección de ejemplos del uso del razonamiento geométrico en la enseñanza del álgebra elemental. Partimos de una concepción particular de la forma correcta de la transmisión de habilidades matemáticas, que considera que la forma más estéril de presentar las lecciones de matemáticas es aquella que tiene como único fundamento el rigor lógico. Ciertamente, una de las características fundamentales de la matemática es el rigor, sin embargo, se olvida con frecuencia que el otro ingrediente, también fundamental, es la libertad.

Presentar los conocimientos de matemáticas al educando como un todo organizado lógicamente, es equiparable a enseñar carpintería con base en la observación de piezas terminadas. Parte integrante de toda ciencia es la experimentación, el aprendizaje por medio de la comisión de errores. La matemática por supuesto, no es la excepción.

Este pequeño trabajo tiene como propósito estimular el uso de modelos geométricos en la enseñanza de la matemática a nivel medio. No hay obviamente pretensión

Juan Antonio Pérez
Centro Regional de Estudios Nucleares
Universidad Autónoma de Zacatecas, México

alguna de originalidad, fuera probablemente, de la presentación y el propósito. La idea motora es que si bien una figura no sustituye una demostración, es siempre un buen inicio en la construcción de ella.

1. Marco teórico

Como se apunta en la obra histórica de Bourbaki [1], el objetivo de entrenar la capacidad de razonamiento matemático del alumno implica actividades investigativas que metodológicamente son del mismo tipo que las realizadas por el matemático creador; es decir, el objetivo real es lograr que el alumno sepa pensar en términos de estructuras matemáticas. Adquirir la capacidad de apreciar las verdades matemáticas en toda su extensión científica conduce necesariamente al desarrollo de la capacidad de apreciar la belleza de *poemas matemáticos* tales como

$$e^{i\pi} = -1 \qquad \text{y} \qquad E = mc^2,$$

lo que presupone, como señala Marshall Stone en su artículo *La Revolución de las Matemáticas* en [2], una alta capacidad de análisis y síntesis.

Continuando con la analogía y siguiendo a Henri Lebesgue [8], quien apunta: "ningún descubrimiento matemático ha sido realizado mediante un esfuerzo de lógica deductiva, sino que ha sido el resultado siempre de un trabajo creador de la imaginación; una vez hecho el descubrimiento, la lógica ejerce su control, y es ella quien decide, en último término, si se trata realmente de un descubrimiento y no de una ilusión; así pues, su papel, aún siendo importante, no pasa de ser secundario".

La naturaleza de la matemática sin embargo, reviste un obstáculo ineludible, pues como ha sido apuntado por Jean Dieudonné en su artículo *La Abstracción en Matemáticas y la evolución del Álgebra* el cual puede consultarse en [7], la matemática es una ciencia en la que se manejan únicamente abstracciones lo que le imprime ese aspecto temible. El camino del aprendizaje de la matemática es pues, algo más largo y, por consiguiente, requiere de acercamientos paulatinos, razón por la cual proponemos la incorporación de ejemplos e ilustraciones geométricas en su enseñanza, lo que creemos es ampliamente estimulante de la iniciativa, ingrediente indispensable en la investigación, pues como Lichnerowicz [9] hace notar, es valioso que el estudiante resuelva los problemas que le son presentados, pero es millones de veces más valioso que sea capaz de inventar y de autoplantearse problemas e interrogantes.

Obviamente entonces, se coincide con René Thom [8] cuando escribe que el verdadero problema en la enseñanza de las matemáticas no es el rigor, sino la construcción del *sentido* de la *justificación ontológica de los objetos matemáticos*. Los ejemplos que se proponen a continuación pretenden estimular la generación de otros y corresponden a varios niveles de adquisición de madurez matemática.

2. Ideas básicas

La primera de las ideas que usaremos es que el producto ab de dos números positivos a y b, representa el área de un rectángulo cuyos lados tienen longitudes a y b respectivamente. Se tiene pues que a^2 es el área de un cuadrado de lado a. Para obtener el área de un triángulo rectángulo, consideremos un rectángulo de altura a y base b, como en la Figura 1.

Trazando una diagonal obtenemos dos triángulos congruentes, cada uno con área, digamos A, entonces como

$$2A = ab$$

que es el área total del rectángulo, obtenemos que el área de cada uno de los triángulos es

$$A = \tfrac{1}{2}ab$$

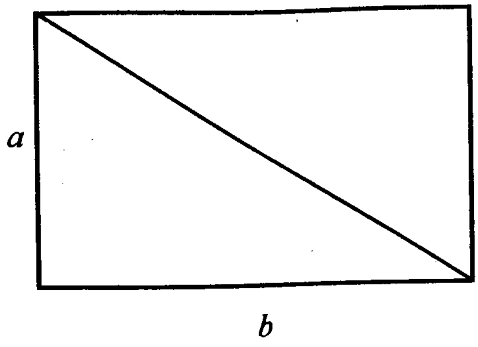

Figura 1

El área de un triángulo arbitrario se obtiene también usando la misma idea.

Consideremos un triángulo de base b y altura a, además de un rectángulo superpuesto con las mismas base y altura.

Los triángulos marcados con los números 1 y 2 tienen respectivamente áreas

$$A_1 = \tfrac{1}{2}ab_1 \qquad \text{y} \qquad A_2 = \tfrac{1}{2}ab_2.$$

Entonces, si A denota el área del triángulo marcado con 3, usando el hecho de que

$$A_1 + A_2 = \tfrac{1}{2}ab_1 + \tfrac{1}{2}ab_2 = \tfrac{1}{2}a(b_1 + b_2) = \tfrac{1}{2}ab.$$

como

$$A = ab - (A_1 + A_2) = \tfrac{1}{2}ab$$

tenemos pues que, al igual que para el caso particular de los triángulos rectángulos, el área de un triángulo arbitrario es el semiproducto de la base por la altura y un hecho sin duda curioso es que

$$A = A_1 + A_2.$$

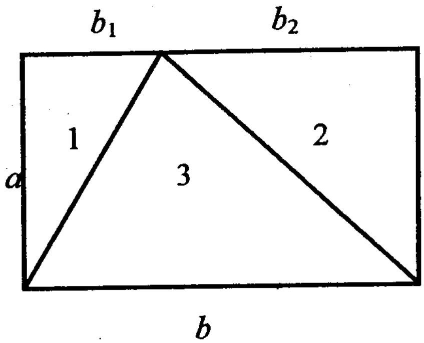

Figura 2

3. Algunos productos notables

Del dibujo que aparece en la Figura 3, se deduce sin dificultad que

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

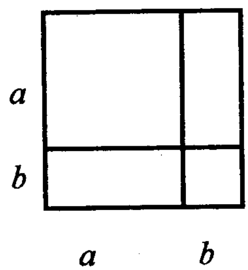

Figura 3

Supongamos ahora que $a > b$ y consideremos nuevamente un cuadrado de lado $a + b$ como el que se muestra en la Figura 4. El cuadrado central tiene lado $a - b$, su área es pues, $(a - b)^2$. Ahora bien, de la figura se desprende que

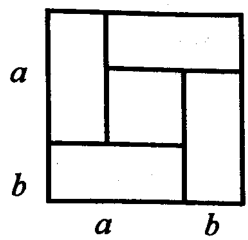

Figura 4

$$(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$$

de donde

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Una ligera modificación de la Figura 4 nos resulta de utilidad para visualizar la factorización de una diferencia de cuadrados.

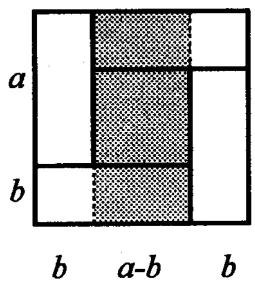

Figura 5

El rectángulo del centro tiene área $(a + b)(a - b)$, y de acuerdo con la figura, dicha área está también dada por la diferencia

$$(a + b)^2 - 2(a - b)b = a^2 - b^2$$

La utilidad de las figuras anteriores no termina aquí, del hecho que

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

obtenemos la desigualdad

$$\tfrac{1}{2}(a + b) \geq \sqrt{ab},$$

es decir, la media geométrica es siempre más pequeña o a lo sumo igual que la media aritmética.

Otra desigualdad interesante se obtiene al considerar una ligera variante de la figura anterior. Sean x, y , y a tres números positivos tales que a es simultáneamente menor que x y que y, de tal suerte que las diferencias $y - a$ y $x - a$ son ambas positivas. Consideremos ahora un cuadrado de lado como el que se muestra en la Figura 6.

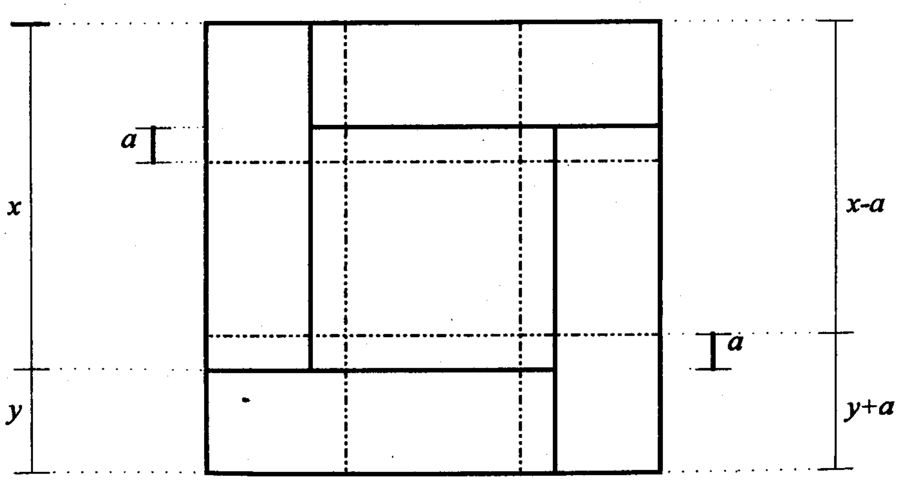

Figura 6

La superficie del cuadrado central de lados punteados es claramente menor que la del otro cuadrado central. Luego, comparando la suma de las áreas de los rectángulos fuera de los cuadrados mencionados obtenemos

$$4xy < 4(x - a)(y + a),$$

de donde se sigue que para cualesquiera números positivos x, y y a tales que $a < \text{mín}\{x, y\}$ se satisface la desigualdad

$$xy < (x - a)(y + a).$$

4. Usando el Teorema de Pitágoras

Como principio presentamos a continuación una de las más sencillas demostraciones del Teorema de Pitágoras, la cual representa un uso más de los cuadrados de lado $x + y$. El área total del cuadrado de la Figura 7 es

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$

en tanto que el área ocupada por los cuatro triángulos rectángulos con catetos x, y es $2xy$. Consecuentemente, el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa de uno de los triángulos está dada por

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy.$$

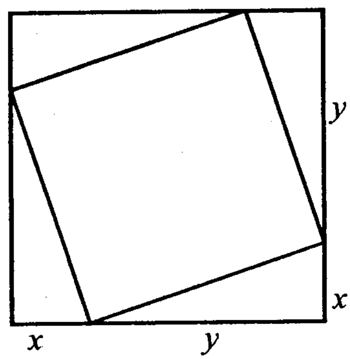

Figura 7

La construcción de un segmento de longitud x^2 dado uno de longitud x puede producir algunos resultados interesantes. Construyamos primero un triángulo rectángulo tal que sus catetos midan 1 y x. Prolonguemos el lado de longitud 1 y tracemos una perpendicular a la hipotenusa como se ilustra en la Figura 8.

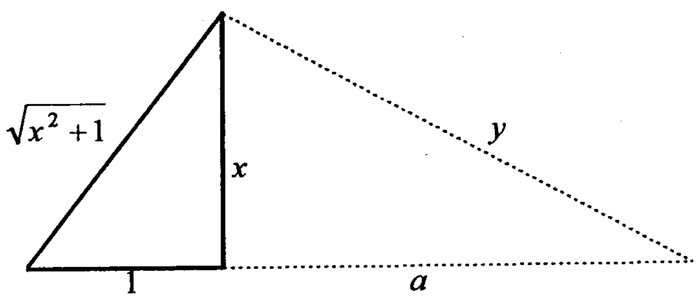

Figura 8

De esta manera obtenemos dos nuevos triángulos rectángulos, uno con hipotenusa y y otro con hipotenusa $a + 1$. Aplicando el Teorema de Pitágoras a tales triángulos obtenemos las ecuaciones

$$x^2 + a^2 = y^2 \qquad \text{y} \qquad y^2 + x^2 + 1 = (a + 1)^2$$

de donde se concluye inmediatamente que $a = x$.

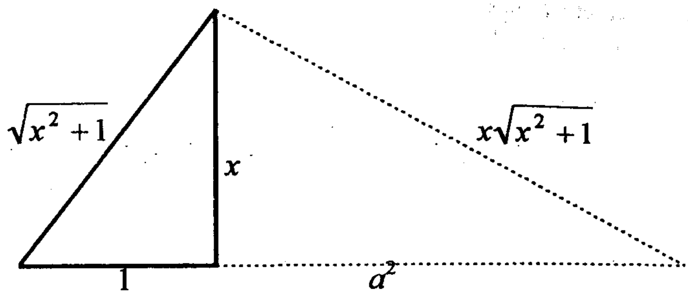

Figura 9

Tenemos entonces que los triángulos rectángulos de hipotenusas $\sqrt{x^2 + 1}$ y $\sqrt{x^2 + 1}$ son semejantes, correspondiendo el cateto de longitud 1 con un cateto de longitud x y el de longitud x con el de longitud x^2. Obtenemos entonces las siguientes desigualdades

$$x \leq 1 \Rightarrow x^2 \leq x \qquad \text{y} \qquad x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq x$$

donde por supuesto, como hasta ahora, x es un número positivo.

5. Números pitagóricos

Pierre de Fermat leía plácidamente una edición latina de la *Aritmetika* de Diofanto, cuando se encontró con el siguiente problema que dio origen a su célebre conjetura que tan fecunda ha sido. La redacción original sería algo como *descomponer un cuadrado en cuadrados*, que dicho con algo más de precisión significa: Encontrar la forma general de las ternas Pitagóricas. Entendemos por terna Pitagórica una terna de números enteros (supongamos positivos) de la forma

$$(a, b, \sqrt{a^2 - b^2})$$

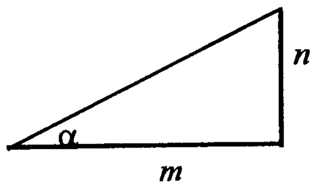

Figura 10

El problema anterior es equivalente a encontrar todos los triángulos rectángulos de lados enteros. Consideremos un triángulo rectángulo con catetos de longitudes enteras m y n satisfaciendo $m > n > 0$.

Dado que la hipotenusa tiene longitud $\sqrt{m^2 + n^2}$, por lo que tenemos

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} \qquad \text{y} \qquad \cos \alpha = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

Usando las identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \qquad \text{y} \qquad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$$

tenemos

$$\operatorname{sen} 2\alpha = \frac{2mn}{m^2 + n^2} \qquad \text{y} \qquad \cos 2\alpha = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}.$$

Existe entonces un triángulo rectángulo tal que uno de sus ángulos mide 2a y de manera que el cateto opuesto al ángulo 2α mide $2mn$ y el cateto adyacente tiene longitud $m^2 + n^2$.

Por supuesto tenemos

$$(m^2 - n^2) + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$$

por lo que para cualesquiera valores enteros positivos de m y n con $m > n$ se tiene que

$$(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$$

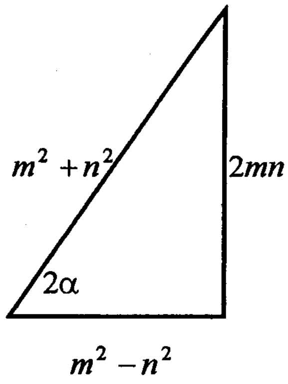

Figura 11

es una terna Pitagórica. El lectór interesado no tendrá dificultad en demostrar que además toda terna Pitagórica tiene la forma anterior. Para tal efecto nótese que es suficiente considerar el caso en el que los catetos no tienen factores comunes; es decir, son primos relativos. Demuestre además que la suma de los cuadrados de dos números impares no es divisible entre 4, para concluir que exactamente uno de los catetos debe tener longitud par.

6. Una desigualdad interesante

Tomemos dos fracciones positivas con numeradores y denominadores positivos

$$0 < \frac{a}{b} < \frac{c}{d}.$$

Queremos demostrar que

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Consideremos inicialmente un rectángulo con base 1 y altura c/d como el de la siguiente figura.

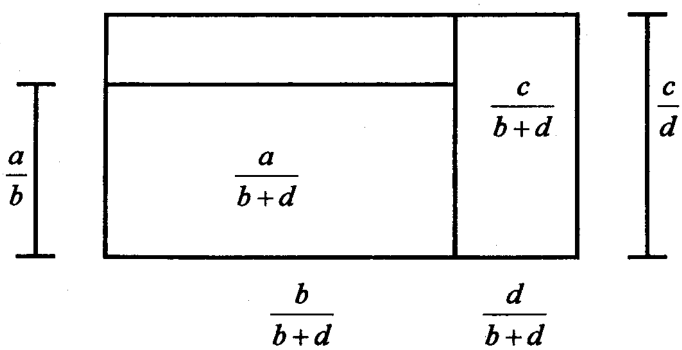

Figura 13

Si notamos que

$$\frac{b}{b+d} + \frac{d}{b+d} = 1$$

y además que

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{b+d} = \frac{a}{b+d} \quad \text{y} \quad \frac{d}{b+d} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{b+d}$$

obtenemos la redescomposición del rectángulo de la Figura 13 que se muestra a continuación.

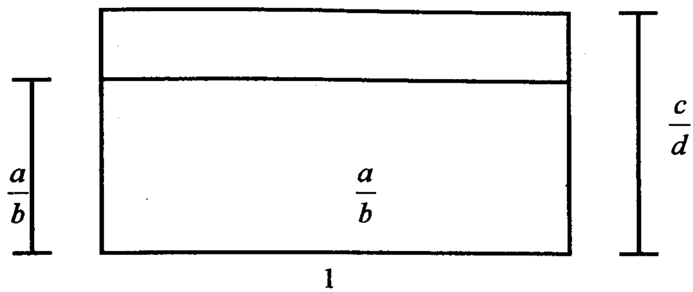

Figura 12

Comparando las superficies de la suma de los dos rectángulos pequeños con la superficie del rectángulo grande obtenemos la desigualdad buscada.

7. Sumas peculiares

Considerando un rectángulo de lados enteros con base $n + 1$ y altura n donde n es un número obviamente positivo, tenemos que el área de tal rectángulo es por una parte el producto $n(n + 1)$ y alternativamente, con una división como la que se muestra en la Figura 14, el área del rectángulo es

$$2 \sum_{k=1}^{n} k = 2(1 + 2 + \ldots + n)$$

de donde obtenemos la suma de los n primeros números naturales

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

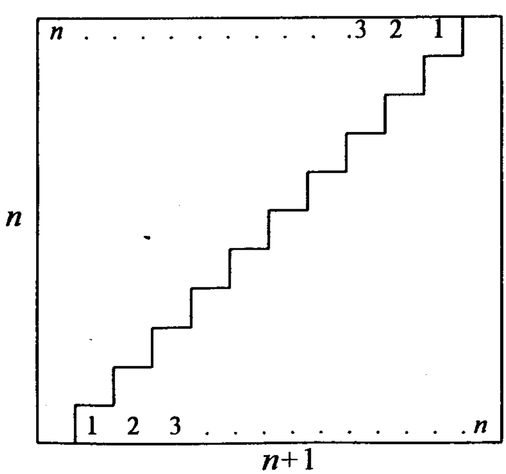

Figura 14

Consideremos a continuación un cuadrado de lado entero n y tracemos sobre él otros $n + 1$ cuadrados con un vértice común teniendo lados con longitudes desde 1 hasta $n - 1$. Obtenemos una figura como la siguiente.

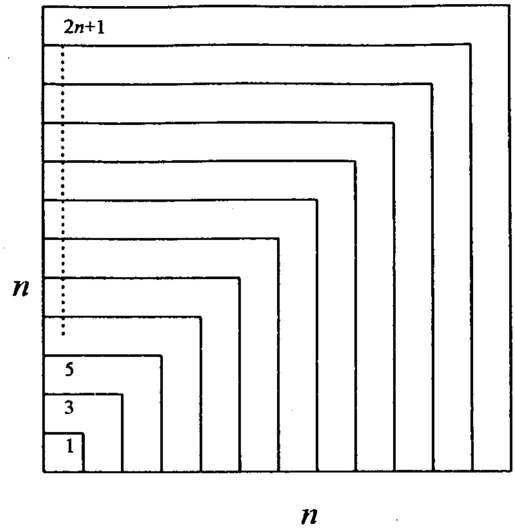

Figura 15

La ilustración anterior nos permite obtener la suma de los primeros n números naturales impares y además nos dice que tal suma es un cuadrado. Simultáneamente demostramos que el cuadrado de n es precisamente la suma mencionada; es decir

$$n^2 = 1 + 3 + \ldots + (2n - 1)$$

Agreguemos finalmente a nuestro cuadrado anterior un rectángulo de base $n^{k-1} - n$ y altura n.

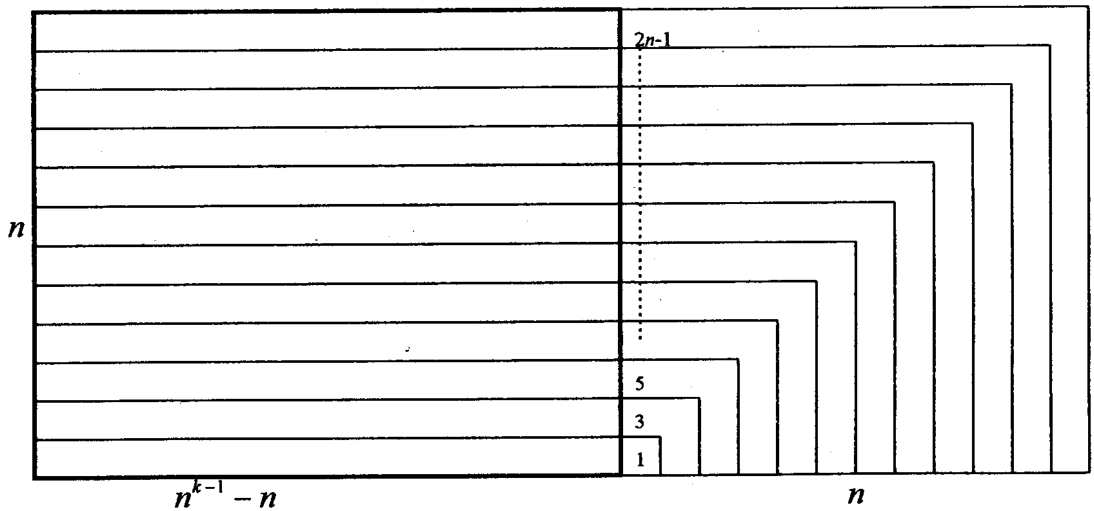

Figura 16

El rectángulo así obtenido tiene área n^k. La división del rectángulo ilustrada en la Figura 16, muestra que la k-ésima potencia de n es la suma de n números impares consecutivos, el menor de los cuales es $n^{k-1} - n + 1$. Es decir

$$n^k = (n^{k-1} - n + 1) + (n^{k-1} - n + 3) + (n^{k-1} - n + 2n - 1),$$

o en notación abreviada

$$nk = \sum_{t=1}^{n} (n^{k-1} - n + 2t - 1).$$

8. Áreas orientadas

El ejemplo que presentamos en la presente sección y la siguiente llegó a manos del autor por medio de las Memorias del XXVI Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, efectuado en Morelia Michoacán en 1993 y es debido al Dr. Juan José Rivaud. Los lectores interesados pueden consultar las referencias [10] y [6] de Rivaud y/o [10] de Waterhouse. Observemos como inicio que trazando una diagonal de un paralelogramo como el de la Figura 17 concluimos que su área está dada como el producto de su base por su altura.

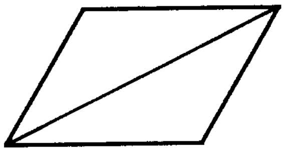

Figura 17

Continuando, orientemos el plano Cartesiano $\Re^2$ considerando las rotaciones antihorarias como positivas. No entraremos en más detalles sobre orientación, los cuales pueden ser encontrados en cualquier buen texto de álgebra lineal tal como Nering [6] o Lang [10].

Con la convención anterior orientemos el área de un paralelogramo dado por dos vectores a, $\mathbf{b} \in \Re^2$, de manera que si denotamos por $A(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ el área orientada del paralelogramo limitado por los vectores $\mathbf{a}$ y b y por $S(a, \mathbf{b})$ el área ordinaria del mismo paralelogramo, entonces

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |A(\mathbf{a}, \mathbf{b})|,$$

y de tal modo que

$$A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -A(\mathbf{b}, \mathbf{a})$$

Si denotamos $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$, lo anterior implica que $A(e_1, e_2) = 1$ y $A(e_2, e_1) = -1$.

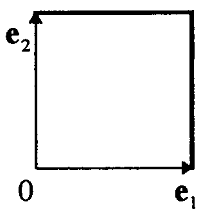

Figura 18

Tenemos también que la función A: $\Re^2 \times \Re^2 \rightarrow \Re$ es bilineal, es decir, que para todo se tiene se tiene $x, y \in \Re$ se tiene

$$A(x\mathbf{a}, \mathbf{b}) = xA(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad \text{y} \quad A(\mathbf{a}, y\mathbf{b}) = yA(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

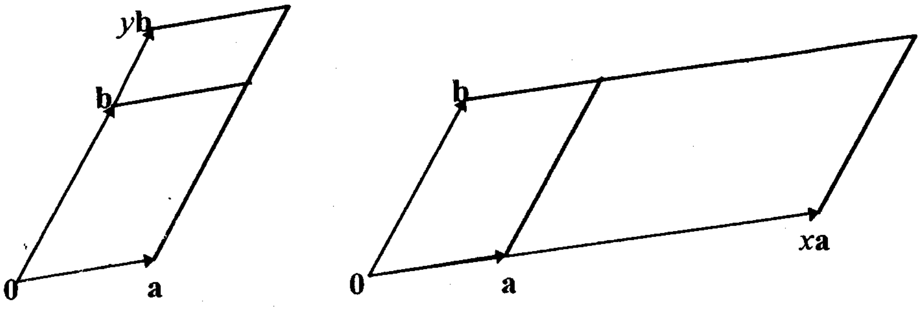

Figura 19

además de que

$$A(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = A(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + A(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \quad \text{y} \quad A(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + A(\mathbf{a}, \mathbf{c}).$$

En la figura siguiente se ilustra la primera de las igualdades anteriores.

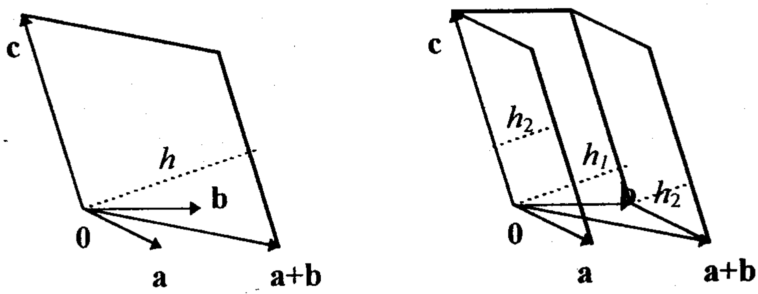

Figura 20

Para convencerse de lo anterior basta notar que $h = h_1 + h_2$. Note por otra parte que

$$A(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0.$$

En [6] p. 462 se demuestra que una función área orientada existe, es única y está dada de la siguiente manera: si $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ y $b = (b_1, b_2)$ y entonces

$$A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 b_2 - a_1 b_2 - a_2 b_1 = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

La demostración se basa en el hecho de que $A(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1$ y en las propiedades de linealidad de A. Tenemos entonces que

$$A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = A(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2, b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2) = (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, A(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$$

como se puede ver después de un cálculo sencillo.

9. La regla de Cramer

Consideremos ahora un sistema de dos ecuaciones lineales como el siguiente:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1, \\ a_2 x + b_2 y &= c_2. \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones puede ser interpretado como la ecuación vectorial

$$x(a_1, a_2) + y(b_1, b_2) = (c_1, c_2)$$

o bien

$$x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = \mathbf{c}$$

haciendo las identificaciones adecuadas. Suponiendo que nuestros vectores **a** y **b** no son colineales, de manera que $A(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ no sea cero.

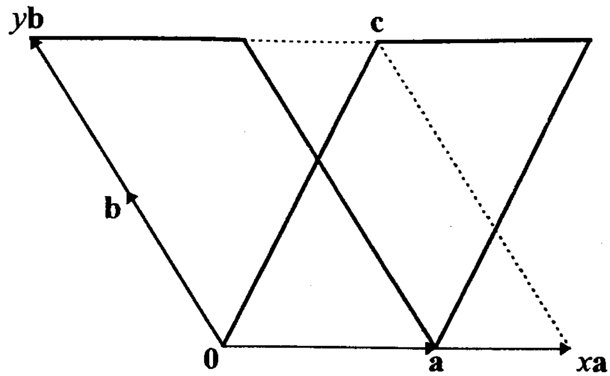

Figura 21

Observemos que, en la Figura 21, los dos paralelogramos trazados con línea continua, tienen como base común al vector **a** y tienen también la misma altura por lo que

$$A(\mathbf{a}, y\mathbf{b}) = A(\mathbf{a}, \mathbf{c})$$

y, en consecuencia,

$$y = \frac{A(\mathbf{a}, y\mathbf{b})}{\mathbf{A}(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = \frac{A(\mathbf{a}, \mathbf{c})}{A(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = \frac{\det\begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Análogamente, de la observación de la Figura 22,

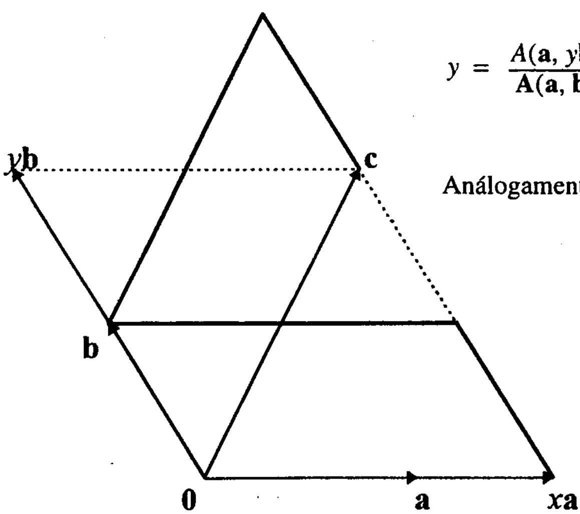

Figura 22

obtenemos que los dos paralelogramos trazados con línea continua tienen una base común, el vector **a**, y dado que están comprendidos entre las dos mismas rectas paralelas, tienen también la misma altura. Entonces

$$A(x\mathbf{a}, \mathbf{b}) = A(\mathbf{c}, \mathbf{b})$$

de donde al igual que en caso anterior tenemos

$$y = \frac{A(x\mathbf{a}, \mathbf{b})}{A(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = \frac{A(\mathbf{c}, \mathbf{b})}{A(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = \frac{\det\begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}} = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

con lo que hemos obtenido una forma geométrica de visualizar la Regla de Cramer.

Referencias

[1] **N. Bourbaki.,** *Historia de las Matemáticas,* Alianza Universidad. Madrid, 1982.

[2] **Jesús Hernández.,** *et. al, La enseñanza de las Matemáticas Modernas,* Alianza Universidad. Madrid, 1983.

[3] **Serge Lang.,** *Álgebra Lineal,* Fondo Educativo Interamericano, México, 1976.

[4] **Evard D. Nering.,** *Linear Algebra and Matrix Theory,* Wiley and Sons Inc. Co., New York, 1970.

[5] **Juan José Rivaud Morayta.,** *Álgebra Lineal,* Texto para el curso del mismo título en el Primer Coloquio del Departamento de Matemáticas del Cinvestav, Oaxtepec Morelos, 1979.

[6] **Juan José Rivaud Morayta.,** "Solución Geométrica de Sistemas de Ecuaciones Lineales", *Memorias del XXVI Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana,* Morelia, Michoacán, 1993.

[7] **Varios Autores.,** *La enseñanza de las Matemáticas Modernas,* Ed. Aguilar, Madrid, 1971.

[8] **Varios Autores.,** *La enseñanza de las Matemáticas Modernas,* Alianza Editorial, Madrid, 1983.

[9] **Varios Autores.,** Enciclopedia Técnica de la Educación}, Ed. Santillana, Madrid, 1982.

[10] "Visualising Cramer's Rule", *The Mathematical Gazette,* **67**, (1983), pp. 125-131.