Geometría como instrumento del Álgebra

Resumen

La multiplicación de binomios y la factorización de trinomios con coeficientes enteros son algunos de las tópicos tratados en el álgebra escolar que los alumnos consideran difíciles. Hay varias formas de abordar la enseñanza de los procesos involucrados, pero la mayoría de éstas recurren a la memorización al clasificar en casos, o de mucha paciencia al llevar a cabo el proceso correspondiente por ensayo y error. Este artículo muestra un método donde los alumnos, a tráves de la manipulación de material, encuentran una ilustración de los correspondientes procesos y de la teoría matemática subyacente. El desarrollo se lleva a cabo en tres fases: concreta, conceptual y simbólica. En la primera se usa material concreto, en la segunda dibujos y en la tercera se trabaja directamente sobre la expresión algebraica. Se dan pautas para que el maestro haga la preparación previa de los alumnos y dirija los talleres propuestos.

Abstract: The binomial multiplication and the trinomial factoring with integral coefficients are some of the topics treated in the school algebra, which are considered difficult by the students. There are several ways for teaching of the involued processes, but most of them use the memory application for classifying the cases, or a lot of patience in using the trial and error process. This article displays a method in which the students by using the material manipulation, find an illustration of the processes and of the underlying mathematical theory. The development is carried out in three phases: concrete, conceptual and symbolic. The first phase uses concrete material, the second phase uses sketcher of drawing, and the third one utilizes the direct work on the algebraic expression. There are patterns for the teacher carrying out the previous preparation of the students, and directing the proposed works.

Objetivos

Con este taller se pretende que el alumno de álgebra escolar visualice, usando material manipulativo, los procesos involucrados tanto en la multiplicación de binomios de la

Carmen Samper de Caicedo
Universidad Pedagógica Nacional
Santafé de Bogotá, Colombia

forma , $Ax + B$, $A, B \in \mathbf{Z}$, como en la factorización de trinomios $ax^2 + bx + c$, a, b, y $c \in Z$. A partir de esta experiencia se propone un método para la factorización de trinomios, sin clasificarlos en distintas categorías.

En el taller se usan rectángulos para representar las expresiones algebraicas propuestas permitiendo así su visualización. El uso de figuras geométricas, como vehículo para la comprensión de situaciones abstractas, no es nuevo. El segundo libro de *Los Elementos* de Euclides, contiene varias proposiciones algebraicas que se demuestran haciendo uso de la geometría. Estas ideas fueron desarrolladas por los griegos (300 a.C.) para resolver, lo que para nosotros son ecuaciones y comprobar propiedades de la adición y la multiplicación.

El taller desarrolla cada tema en tres fases. La primera, o concreta, es aquella en la cual se manipula el material. Comienza así la construcción del concepto y la determinación de lo esencial en el proceso de multiplicación de binomios o en la factorización de trinomios. El alumno es el creador de su aprendizaje y no simplemente un receptor de información. En la segunda fase, o conceptual, se aleja al estudiante del material concreto sin desligarlo totalmente. Para ello se le invita a representar gráficamente las situaciones sugeridas aplicando su experiencia con el material. Se espera que de esta forma, debido al proceso de análisis requerido, vaya elaborando un algoritmo que usará posteriormente. En la tercera etapa, o simbólica, se espera ver el fruto del trabajo anterior, cuando el alumno pueda realizar los procesos algebraicos sin material de apoyo.

Es necesario que los alumnos manejen bien los conceptos de área y perímetro de un rectángulo. También deben saber cómo encontrar la factorización en primos de un entero positivo y trabajar hábilmente la suma y producto de enteros.

Material

Los alumnos trabajan en grupos de tres personas, las cuales se denominarán *A*, *B* y *C* respectivamente. Cada miembro del grupo tendrá el material descrito a continuación, el cual consta de los rectángulos, cortados de cartón, cuyas medidas se dan en la siguiente tabla. Cada rectángulo debe ser blanco de un lado y rojo del otro.

Cantidad	A	B	C
3	20 cm × 20 cm	16 cm × 16 cm	12 cm × 12 cm
3	6 cm × 20 cm	6 cm × 16 cm	6 cm × 12 cm
3	4 cm × 20 cm	4 cm × 16 cm	4 cm × 12 cm
12	2 cm × 2 cm	2 cm × 2 cm	2 cm × 2 cm
12	2 cm × 20 cm	2 cm × 16 cm	2 cm × 12 cm

El uso de material de diferente tamaño conlleva la idea de variabilidad que se busca. Es importante notar que, debido a las dimensiones fijas usadas en los rectángulos construidos, no todo binomio o trinomio puede ser representado usando el material. Esto significa que se debe hacer una selección cuidadosa de las correspondientes expresiones.

Preparación

1. Marque las dimensiones de cada rectángulo, en el lado correspondiente, así: la longitud más larga (20, 16 o 12 según el caso) con una x, la longitud de 6 cm con un 3, la de 4 cm con un 2 y la de 2 cm con un 1. Repita lo mismo del otro lado. La unidad de medida, en este caso, es 2 cms.
2. Según las dimensiones asignadas al rectángulo, halle su área y denótela en el centro de éste.

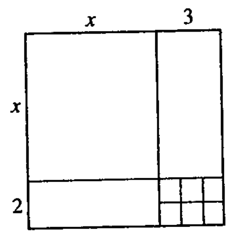
Actividad 1

Multiplicación de binomios

En esta parte del taller, se usarán sólo los rectángulos descritos en las primeras cuatro filas de la tabla.

1. Construya, usando el material, el rectángulo cuyas dimensiones se dan a continuación, y luego conteste las preguntas, para cada caso, consignando su respuesta en la tabla que sigue. En la construcción de los rectángulos, siempre coloque los rectángulos de área $2x$ o $3x$ a la derecha del cuadrado de área x^2 o debajo de éste y los cuadrados de área 1, a la derecha y debajo de los rectángulos de área $2x$ o $3x$.

EJEMPLO: A continuación se muestra el esquema de un rectángulo de dimensiones $(x + 3)$ por $(x + 2)$.



Dimensiones: *a*) $x + 3$ por $x + 3$ *b*) $x + 2$ por $x + 2$
c) $x + 3$ por $x + 4$ *d*) $x + 6$ por $x + 2$
e) $2x + 3$ por $x + 2$ *f*) $3x + 2$ por $x + 2$

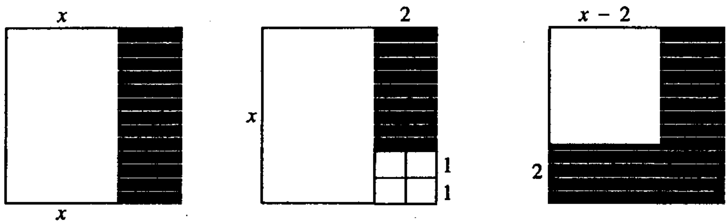
i) ¿Cuál es el área de la figura que obtuvo?
ii) ¿Cuál es la expresión del área como suma de las áreas de los rectángulos usados en la construcción?

Dimensiones	Área	Área como suma

iii) ¿Qué identidad muestra la equivalencia de las dos expresiones obtenidas para el área en cada caso?

2. Cuando se quiere construir un rectángulo en el cual se necesita disminuir la longitud inicial x, se tapa el cuadrado blanco de área x^2 con el rectángulo rojo correspondiente. Cada vez que se coloque un rectángulo rojo, éste debe cubrir una región blanca del mismo tamaño. Esto implica que a veces es necesario cubrir parte de una región roja con cuadrados blancos de área 1, para poder completar la construcción indicada. A continuación se ilustra este proceso con un ejemplo.

EJEMPLO: El esquema muestra la construcción de un rectángulo de dimensiones $x - 2$ por $x - 2$, paso por paso.



El área de la región blanca de la última figura, expresada como suma, consta de las áreas de los rectángulos usados en la construcción, indicando con el signo correspondiente, cuando se ha quitado la región y cuando se ha añadido. En este caso, el área será $x^2 - 2x + 4 - 2x$.

Según esto, construya un rectángulo con las dimensiones dadas. Complete una tabla como la anterior y conteste las preguntas del numeral 1.

Dimensiones: a) $x - 3$ por $x - 3$ b) $x + 3$ por $x - 2$
c) $x + 6$ por $x - 2$ d) $x - 5$ por $x - 2$

3. Sin usar el material, haga un esquema de la construcción de los rectángulos con un dibujo. Escriba la identidad correspondiente.

a) $(x + 6)$ por $(x + 3)$ b) $(x - 4)$ por $(x + 3)$
c) $(2x + 1)$ por $(2x + 4)$ d) $(2x - 3)$ por $(x - 4)$
e) $(3x + 1)$ por $(2x - 5)$

4. Algebraicamente efectuar el producto indicado por la expresión $(Ax + B)$ $(Cx + D)$ significa aplicar la propiedad distributiva. Es decir,

$$
\begin{aligned}
& (Ax + B)(Cx - D) & \\
&= Ax(Cx + D) - B(Cx + D) & \textit{distribuir} \\
&= ACx^2 + ADx + BCx + BD & \textit{multiplicar} \\
&= ACx^2 + (AD + BC)x - BD & \textit{agrupar}
\end{aligned}
$$

Según esto, efectúe cada producto que expresa el área en los ejercicios anteriores y compruebe el resultado con el que obtuvo geométricamente.

Actividad 2

Factorización

En esta parte del taller se usarán los rectángulos descritos en las primeras tres filas y la última fila de la tabla. Se trabajará con expresiones de la forma $ax^2 + bx - c$, a, b, y $c \in Z$ y $a > 0$.

1. En cada uno de los siguientes casos, use a rectángulos de área x^2, $|b|$ rectángulos de área x y $|c|$ rectángulos de área 1 para construir un rectángulo de área $ax^2 + bx + c$. Una vez que haya construido el rectángulo, compruebe que todos los integrantes del grupo pueden hacer la misma distribución. Si no es el caso, debe buscar otra forma de construirlo. Luego conteste las siguientes preguntas.

   i) ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo resultante?
   ii) Escriba una ecuación que exprese la relación entre las dos expresiones para el área del rectángulo construido.
   iii) ¿Cómo distribuyó los rectángulos de área x? ¿Cuántos rectángulos hay en cada grupo? Escriba la suma de estos números, su producto y el producto ac. ¿Qué relación nota?

   a) $2x^2 + 7x + 6$ b) $3x^2 + 10x + 8$
   c) $2x^2 + 9x + 10$ d) $2x^2 - 7x + 5$
   e) $x^2 - 4x + 4$

2. Represente gráficamente la situación correspondiente a cada caso que sigue.

   a) $x^2 + 7x + 10$ b) $x^2 - 8x + 7$
   c) $2x^2 - 5x + 3$ d) $4x^2 + 8x + 3$
   e) $4x^2 + 13x + 3$

Nota: Es difícil interpretar, con el material, la situación para $ax^2 + bx + c$, donde $b < 0$ y $c < 0$.

Factorizacion de trinomios

En los ejercicios anteriores, el alumno debió notar que los $|b|$ rectángulos quedaron separados en dos grupos. Cómo determinar esta división es precisamente lo que sigue. El método que se sugiere surge de la experiencia que los alumnos tienen con la actividad 2 y se basa en seguir el proceso inverso al que se utiliza cuando se efectúa el producto de factores de la forma $(Ax + B)$.

Los siguientes son los pasos en el producto:

$$\begin{aligned} & (Ax + B)(Cx + D) & \\ = \; & Ax(Cx + D) + B(Cx + D) & \quad \textit{distribuir} \\ = \; & ACx^2 + ADx + BCx + BD & \quad \textit{multiplicar} \\ = \; & ACx^2 + (AD + BC)x + BD & \quad \textit{agrupar} \end{aligned}$$

De esta forma, para factorizar el trinomio $ax^2 + bx + c$, con $a > 0$, se deben hallar los cuatro números A, B, C, y D. Observando que $a - AC$, $b - AD + BC$ y $c - BD$, se ve que los cuatro números son factores del producto ac y que b es la suma de dos números que surgen al distribuir estos factores en dos grupos, y multiplicar los correspondientes números en cada grupo.

EJEMPLO

	$(3x + 2)(2x - 5)$	
$=$	$3x(2x + 5) + 2(2x + 5)$	*distribuir*
$=$	$(6x^2 - 15x) + (4x - 10)$	*multiplicar*
$=$	$6x^2 + (-15x + 4x) + -10$	*agrupar*
$=$	$6x^2 + -11x + -10$	*simplificar*

Dado el trinomio $6x^2 + -11x + -10$ se deben hallar: 3, 2, 2, y −5. La factorización en primos de $|ac| = |6 \cdot -10 = 60$ es: $2^2 \cdot 3 \cdot 5$. Se deben separar estos factores en dos grupos de tal forma que, al multiplicar los que quedan en cada grupo, se obtengan dos números cuya suma es −11; estos son: −15 y 4. Por tanto,

	$6x^2 - 11x + -10$	
$=$	$6x^2 + -15x + 4x + -10$	*reescribiendo*
$=$	$(6x^2 - 15x) + (4x - 10)$	*agrupando*
$=$	$3x(2x - 5) + 2(2x + 5)$	*sacando factor común*
$=$	$(3x + 2)(2x + 5)$	

Preparación del alumno

Las etapas que se sugieren hacer para preparar a los alumnos para la enseñanza de este método son las siguientes:

1. Factorización en primos de enteros
2. Generación de dos números partiendo de una lista de números primos junto con el 1, utilizando todos, que cumplan una condición específica.
3. Hallar factor común de algunos monomios dados
4. En la factorización del trinomio $ax^2 + bx + c$ como $(Ax + B)(Cx + D)$ determinar los signos de B y D teniendo que $A > 0$ y $C >, 0$.

En lo que sigue se usará al trinomio $8x^2 - 56x + 30$ como ejemplo para el desarrollo.

1. Dado el trinomio $ax^2 + bx + c$, $a > 0$, hallar los factores primos de $|ac|$

Los factores primos de $|8 \cdot (-30)|$ son $2^4 \cdot 3 \cdot 5$.

2. Determinar los signos de B y D

En realidad, este paso facilita la generación de los dos números que se buscan. En el trinomio $ax^2 + bx + c$ con $a > 0$, si $ac > 0$ entonces B y D son ambos positivos o ambos negativos. En este caso, el signo de b determina el signo común de B y D. Si $ac < 0$ entonces uno de los dos es negativo y el otro positivo.

Se sugiere que los alumnos lleguen a la regla de signos anterior después de analizar varios ejemplos como sigue.

EJEMPLO a) $(2x - 3)(4x - 1) = 8x^2 - 14x + 3$

$$\left.\begin{array}{l}\text{signo de } ac \text{ es positivo}\\ \text{signo de } b \text{ es negativo}\end{array}\right\} B < 0 \qquad D < 0$$

b) $(2x + 3)(4x + 1) = 8x^2 + 14x + 3$

$$\left.\begin{array}{l}\text{signo de } ac \text{ es positivo}\\ \text{signo de } b \text{ es negativo}\end{array}\right\} B > 0 \qquad D > 0$$

c) $(2x + 3)(4x - 1) = 8x^2 + 10x - 3$

$$\left.\begin{array}{l}\text{signo de } ac \text{ es positivo}\\ \text{signo de } b \text{ es negativo}\end{array}\right\} B > 0 \qquad D > 0$$

d) $(2x - 3)(4x + 1) = 8x^2 + 10x - 3$

$$\left.\begin{array}{l}\text{signo de } ac \text{ es positivo}\\ \text{signo de } b \text{ es negativo}\end{array}\right\} B < 0 \qquad D < 0$$

3. Dados los factores primos de $|ac|$ y el 1, generar, usando todos los factores, dos números enteros para los cuales la suma es b.

Retomando el ejemplo que aparece en la página 10, se tiene que la suma debe ser -56. Los dos números serían 2^2 y $-2^2 \cdot 3 \cdot 5$, es decir, 4 y -60. En este paso es bueno recordarle a los alumnos que la suma de dos números pares o dos números impares es par. De esta forma, ellos sabrán que los factores correspondientes al 2 deben ser distribuidos entre los dos números que se están generando. También se puede hacer un análisis semejante usando que la suma de un número impar con uno par es impar, requiriendo en ese caso que todos los factores correspondientes de 2 sean agrupados para generar uno de los números buscados.

Para desarrollar destreza en este paso, se sugiere que los alumnos trabajen diversos ejercicios como los que siguen antes de involucrarlos en la factorización misma de trinomios.

EJEMPLO Usando los factores de $2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1$ halle dos números tales que:

a) la suma es 31: 2^4 y $3 \cdot 5$

b) la suma es 8: $2^2 \cdot 5$ y $-2^2 \cdot 3$

c) la suma es -239: $-2^4 \cdot 3 \cdot 5$ y 1

d) la suma es -38: -2^3 y $-2 \cdot 3 \cdot 5$

4. Hallar factor común de algunos monomios dados.

$$\begin{aligned} 8x^2 - 56x - 30 &= 8x^2 - 60x + 4x - 30 \\ &= (8x^2 - 60x) + (4x - 30) \\ &= 4x(2x - 15) + 2(2x - 15) \end{aligned}$$

En este último paso se debe sacar factor común en cada paréntesis.

Aquí conviene repasar un método para hallar el máximo común divisor de dos o más números enteros, puesto que es necesario para hallar el máximo común divisor de dos o más monomios con coeficientes enteros.

EJEMPLO a) Para $8x^2y$, $16xy$ y $28xy^2$ el máximo común divisor es $4xy$.
b) Para $-6x^2$ y $-4x$ el máximo común divisor es $2x$.
c) Para $3x(x + 2)$ y $4(x + 2)$ el máximo común divisor es $x + 2$.

Método de factorización del trinomio $ax^2 + bx + c, a > 0$

De esta forma, se llega al método que se sugiere. Los pasos a seguir son:

1. Análisis de signos de los números que se buscan.
2. Factorización en primos de $|ac|$.
3. Descomposición de factores anteriores en dos números cuya suma sea b.
4. Expresión del trinomio usando la descomposición de bx.
5. Agrupación y factorización.

Se ilustrará el método con unos ejemplos.

EJEMPLOS 1) $21x^2 + 11x - 2$

1. $ac < 0, b > 0$, luego uno de los números es positivo y el otro negativo.
2. $|ac| = 21 \cdot 2 = 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 1$
3. $b = 11$ y $(7 \cdot 2) + (-3) = 11$
4. $$\begin{aligned} 21x^2 + 11x - 2 &= 21x^2 + (-3x + 14x) - 2 \\ &= (21x^2 - 3x) + (14x - 2) \\ &= 3x(7x - 1) + 2(7x - 1) \\ &= (3x + 2)(7x - 1) \end{aligned}$$

2) $6x^2 - 19x + 15$

1. $ac > 0, b < 0$, luego los números son ambos negativos.
2. $|ac| = 6 \cdot 15 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 1$
3. b $= -19$ y $-19 = -(2 \cdot 5) + -(3 \cdot 3)$
4. $6x^2 - 19x + 15 = 6x^2 + (-10x + -9x) + 15$
5. $$\begin{aligned} &= (6x^2 - 10x) + (-9x + 15) \\ &= 2x(3x - 5) + -3(3x - 5) \\ &= (2x - 3)(3x - 5) \end{aligned}$$

Nota: Al sacar factor común es importante factorizarlo con el signo correspondiente del primer sumando en el paréntesis.

3) $x^2 + 7x + 6$

1. $ac > 0, b > 0$, luego ambos números son positivos.
2. $|ac| = 6 = 2 \cdot 3 \cdot 1$
3. $b = 7$ y $7 = (2 \cdot 3) + (1)$
4. $x^2 + 7x + 6 = x^2 + (6x + x) + 6$

$$= (x^2 + 6x) + (x + 6)$$
$$= x(x + 6) + (x + 6)$$
$$= (x + 1)(x + 6)$$

4) $24x^2 + 22x + 3$

1. $ac > 0, b > 0$, entonces ambos números son positivos.
2. $|ac| = 24 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 1$
3. $b = 22$ y $22 = 2 \cdot 3^2 + 2^2$
4. $24x^2 + 22x + 3 = 24x^2 + (18x + 4x) + 3$

$$= (24x^2 + 18x) + (4x + 3)$$
$$= 6x(4x + 3) + (4x + 3)$$
$$= (4x + 3)(6x + 1)$$

Si el trinomio no involucra una sola variable, el método sigue siendo útil como se observa en el siguiente ejemplo.

5) $15x^2 + xy - 6y^2$

1. $ac < 0$ y $b > 0$, por tanto, un número es positivo y el otro negativo.
2. $|ac| = 15 \cdot 6 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 1$
3. $b = 1$ y $1 = (2 \cdot 5) + (-3^2)$
4. $15x^2 + xy - 6y^2 = 15x^2 + (10xy + -9xy) - 6y^2$
5. $= (15x^2 + 10xy) + (-9xy - 6y^2)$

$$= 5x(3x + 2y) + -3y(3x + 2y)$$
$$= (5x - 3y)(3x + 2y)$$

Es posible usarlo en la factorización de diferencia de cuadrados como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO $49x^2 - 25y^2$

1. $ac < 0$ y $b = 0$. Por eso un número tiene que ser positivo y el otro su opuesto.
2. $|ac| = 7^2 \cdot 5^2$
3. $b = 0$ y $7 \cdot 5 + (-7 \cdot 5) = 0$
4. $49x^2 - 25y^2 = 49x^2 + (-35xy + 35xy) - 25y^2$

$$= (49x^2 - 35xy) + (35xy - 25y^2)$$
$$= 7x(7x - 5y) + 5y(7x - 5y)$$
$$= (7x + 5y)(7x - 5y)$$

Si en el paso 3 no se encuentran los dos números enteros cuya suma es b, el trinomio no se puede factorizar como producto de binomios con coeficientes enteros. Esto se ve claramente al recordar la relación entre b y los enteros buscados A, B, C y D.

EJEMPLO $x^2 + 6x + 3$

1. $ac > 0$ y $b > 0$. De esta forma, los dos números solicitados deben ser positivos.
2. $|ac| = 13$
3. No existe combinación posible de 1 y 3 que generen dos números cuya suma es 6.

Este polinomio no se puede factorizar como producto de dos binomios con coeficientes enteros pero en el sistema de los números reales sí es posible la factorización.

Esta forma de abordar el proceso de factorización de trinomios con coeficientes enteros excluye la memorización de productos notables y la clasificación de los trinomios y reduce todo a un solo proceso. La satisfacción que sienten los alumnos al entender el método y ver como logran la factorización con éxito, hace que éste sea valioso. Aun cuando en cursos de matemáticas más avanzados que el álgebra escolar se necesita la factorización en **R** o **C**, todos los profesores sabemos la importancia de poder factorizar trinomios con coeficientes enteros. Generalmente, al introducir temas como la simplificación de fracciones algebraicas, la resolución de desigualdades cuadráticas, la determinación de los puntos críticos de la derivada o la integración de una función racional usando fracciones parciales, los textos usan estos trinomios para ilustrar los correspondientes procesos. Es, entonces, la habilidad de poder llevar a cabo el proceso de factorización la llave para entender otros conceptos matemáticos en cursos más avanzados.

Referencias

Domínguez, Mariano., (1989), *El Uso de Materiales en la Enseñanza de las Matemáticas*, Studia Paedagogica. Revista de Ciencias de la Educación # 21, Universidad de Salamanca.

Kieran, Carolyn., (1989), *The Early Learning of Algebra: A Structural Perspective*, Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra. Wagner, S., Kieran, C. editors, Reston, VA, E.E.U.U.: NCTM.

Sobel, Max A. y Maletsky, Evan M., (1975), *Teaching Mathematics*, A Sourcebbok of Aids, Activities, and Strategies, Prentice Hall, Inc.

Vasco, Carlos Eduardo., (1986), *El Enfoque de Sistemas en el Nuevo Programa de Matemáticas*, Un Nuevo Enfoque para la Didáctica de las Matemáticas, Vol. II, Santafé de Bogotá.